Zadania úloh Matematickej olympiády v školskom roku 2005/2006

Kategória Z4

1. Jurko rád kreslí autíčka. V pondelok namaľoval niekoľko autíčok, v utorok ich namaľoval trikrát toľko ako v pondelok, ale potom 12 pondelkových vygumoval. V stredu mal zlú náladu, nič nenamaľoval a ešte roztrhal polovicu utorkových, čiže 24. Koľko autíčok namaľoval v utorok? Koľko autíčok namaľoval v pondelok, v utorok a v stredu spolu?

   (M. Dillingerová)

2. Z čísla 9 635 347 vyškrtni niekoľko číslic tak, aby vzniklo čo najväčšie číslo a súčet všetkých jeho číslic bol menší ako 20.

   (M. Dillingerová)

3. Rozprávkový nafukovací štvorec, ktorý vie rozprávať, mal pred 5 minútami dĺžku strany 8 cm. Pri každom klamstve zväčší svoj obvod dvojnásobne. Pri každej vyslovenej pravde sa zmenší dĺžka každej jeho strany o 2 cm. Za posledných 5 minút 2-krát klamal a 2-krát hovoril pravdu.
   a) Aký najväčší obvod môže mať teraz?
   b) Aký najmenší obvod môže mať teraz?

   (S. Bodláková)

4. Peter má na papier napísať z čísel od 1 do 200 všetky také, ktoré sa dajú deliť piatimi bezo zvyšku, ale nedajú sa deliť bezo zvyšku siedmimi. Pavol má vypísať z čísel od 1 do 200 všetky také, ktoré po delení siedmimi dávajú zvyšok 5. Koľko čísel má napísať Peter a koľko Pavol?

   (M. Smitková)

5. Žabka Rosnička stála na rebríku, ktorý mal 5 priečok, na tretej priečke. Urobila šesť skokov a zostala stáť na piatej priečke. Vypíš všetky možnosti, ako mohla Rosnička skákať, ak vždy skočila len o jednu priečku hore alebo o jednu priečku dole.

   (S. Bodláková)

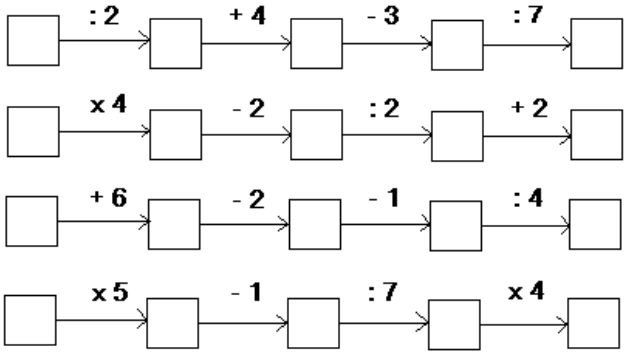
6. Majka má v stavebnici len rovnako veľké kocky s hranou dĺžky 3 cm. Keď z nich postaví vežu, ktorá má na každom podlaží 4 kocky, bude mať veža výšku 54 cm. Aká vysoká by bola iná veža z takého istého počtu rovnakých kociek, ktorá by mala v každom podlaží deväť kociek?

   (M. Dillingerová)

Kategória Z5

1. Doplň do prázdnych políčok prirodzené čísla od 1 do 20 (každé číslo môžete použiť len raz) tak, aby platili matematické vzťahy.

(M. Smitková)



2. Blcha Skákalka skáče po číselnej osi. Vie robiť iba skoky dvoch dĺžok. Jedným preskočí o 14 doprava alebo doľava, druhým preskočí o 18 doprava alebo doľava. Práve stojí na čísle 2.
   a) Nájdi spôsob, ako má skákať, aby sa štyrmi skokmi dostala na číslo 10.
   b) Tvrdí, že včera bola na čísle 13. Hovorí pravdu alebo klame? Zdôvodni.

(M. Dillingerová)

3. Rozprávkový nafukovací štvorec, ktorý vie rozprávať, mal pred 5 minútami dĺžku strany 8 cm. Pri každom klamstve zväčší svoj obvod dvojnásobne. Pri každej vyslovenej pravde sa zmenší dĺžka každej jeho strany o 2 cm. Za posledných 5 minút 2-krát klamal a 2-krát hovoril pravdu.
   a) Aký najväčší obvod môže mať teraz?
   b) Aký najmenší obvod môže mať teraz?

(S. Bodláková)

4. Peťo si kúpil na jarmoku 4 autíčka, biele, zelené, červené a modré. Biele autíčko stálo dvakrát toľko ako červené, zelené trikrát toľko ako biele a za modré zaplatil toľko ako za červené a biele spolu. Pritom červené stálo o 70 Sk menej ako zelené. Koľko Sk stáli jednotlivé autíčka?

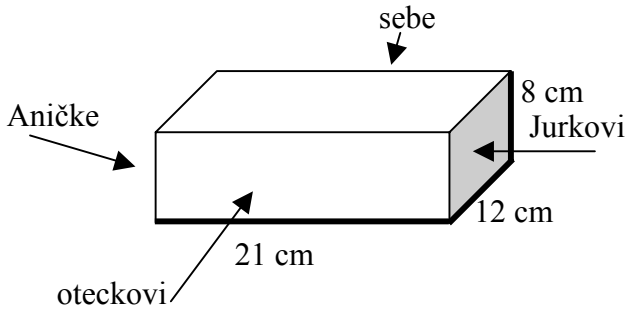
(Š. Ptáčková)

5. Mama stonožka má dve deti a manžela. Každý z nich má sto nôh a každý člen rodiny si berie každý deň čisté ponožky. V sobotu ráno o 6:00 začala mamička stonožka prať špinavé ponožky. Naraz sa jej ich do práčky zmestí 357 a jedna várka sa operie za dve a pol hodiny. Zisti, kedy skončí s praním, ak vieš, že ponožky perie raz za týždeň, uloženie ponožiek do práčky jej trvá 2 minúty a ich vybratie z práčky 3 minúty.

(S. Bednářová)

6. Mamička má v chladničke tehlu syra (obr. 1). Postupne z nej odrezáva 1 cm hrubé plátky na vyprážanie. Najprv odrezala spredu plátok s rozmermi pre otecka, potom odrezala zboku pre Jurka, zozadu pre seba a nakoniec z druhého boku pre Aničku. Napíš, aké rozmery majú jednotlivé plátky. Urči rozmery zvyšku syra.

(M. Dillingerová)

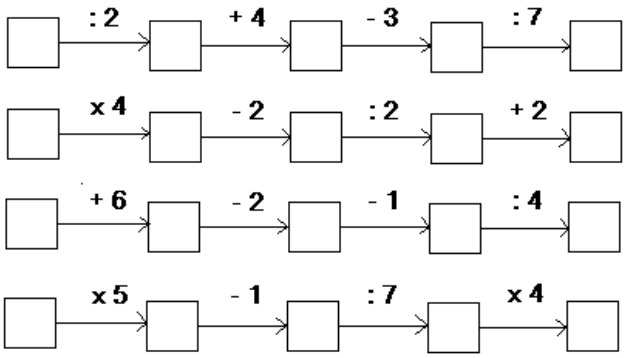


Obr. 1

Kategória Z6

1. Doplňte do prázdnych políčok prirodzené čísla od 1 do 20 (každé číslo môžete použiť len raz) tak, aby platili matematické vzťahy.

(M. Smitková)



2. Snehulienka so siedmimi trpaslíkmi zbierali lieskové oriešky. Snehulienka ich mala toľko ako všetci trpaslíci spolu. Keď sa vracali domov, stretli veveričku Finku. Snehulienka aj každý trpaslík jej dali rovnaký počet orieškov. Doma trpaslíci a Snehulienka vysypali oriešky na kôpky na stole, každý na inú kôpku a Vedko zapísal počty orieškov v kôpkach: 120, 316, 202, 185, 333, 297, 111 a 1672. Koľko orieškov dostala veverička Finka?

(L. Hozová)

3. Keď sme čísla 80 a 139 vydelili tým istým prirodzeným číslom, získali sme zvyšky 8 a 13. Ktorým číslom sme delili?

(M. Volfová)

4. Obvod trojuholníka je 16 cm. Aké môžu byť dĺžky jeho strán, keď sú to prirodzené čísla a súčet dĺžok dvoch strán je o 6 cm väčší ako dĺžka tretej strany?

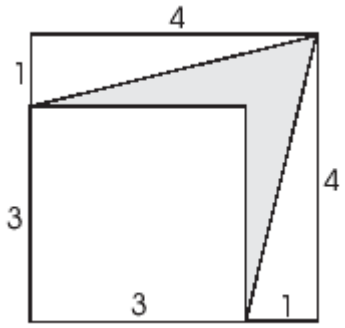
(L. Hozová)

5. Maruška dostala päť rôzne ťažkých koláčov. Priemerná hmotnosť koláča bola 200 gramov. Maruška jeden koláč zjedla a priemerná hmotnosť zvyšných koláčov potom bola 160 gramov. Koľko gramov vážil koláč, ktorý Maruška zjedla?

(B. Šťastná)

6. Určte veľkosť plochy šedého štvoruholníka na obrázku 1, kde všetky rozmery sú udávané v centimetroch.

(P. Tlustý)



Obr. 1

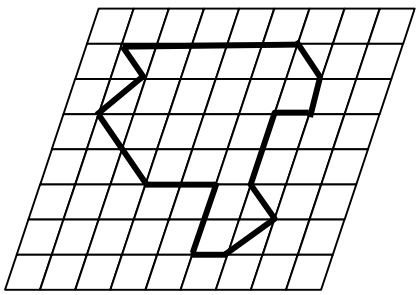
Kategória Z7

1. Pat a Mat upravovali nový asfalt na ceste. Najprv išli s valcom 10 m dopredu, potom 7 m cúvli, opäť prešli 10 m dopredu a 7 m cúvli… Takto pokračovali, až kým po prvý raz nezišli z nového asfaltu.
   a) Koľko metrov najazdil valec na novom 540-metrovom úseku cesty?
   b) Koľkokrát prešli po devätnástom metri nového asfaltu?

(M. Dillingerová)

2. Zistite obsah a veľkosti všetkých vnútorných uhlov mnohouholníka znázorneného v kosoštvorcovej sieti na obrázku 1, ak viete, že priamky siete zvierajú uhol 80 stupňov a jeden malý kosoštvorček má obsah 1 cm^2. (Pozor, obrázok je nepresný, neoplatí sa merať.)

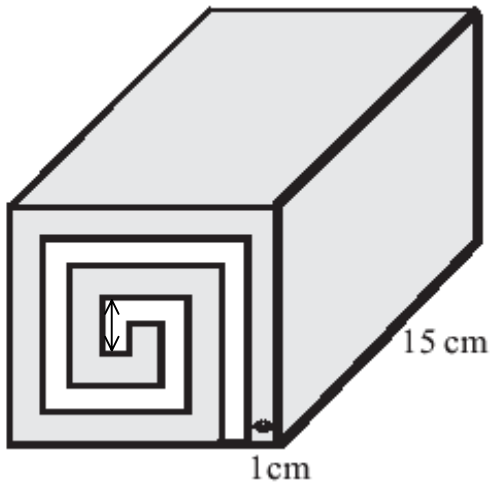
(S. Bednářová)



Obr. 1

3. Na obrázku 2 vidíte špeciálny druh rolády, tzv. KVADRILÁDU. Je vyrobená z bielej a hnedej marcipánovej hmoty, pričom obe hmoty majú rovnakú hrúbku 1 cm. Celá kvadriláda má dĺžku 15 cm. Predáva sa rozkrájaná na 10 rovnakých plátkov, pričom sa krája rovnobežne s prednou stenou. Zistite
   a) rozmery jedného plátku,
   b) koľko gramov hnedej hmoty a koľko gramov bielej hmoty treba na jej prípravu, ak viete, že jeden cm^3 marcipánovej hmoty váži 2 gramy.

   (Neoznačená šípka v obrázku má dĺžku 2 cm.)



Obr. 2

(S. Bednářová)

4. Nájdite všetky päťciferné čísla, ktoré sa škrtnutím prvej a poslednej cifry zmenšia 250-krát.

(L. Šimůnek)

5. Pavol dostal na domácu úlohu vyjadriť desatinným číslom zlomky $\frac{3}{7}$ a $\frac{7}{13}$. Aby urobil pani učiteľke radosť, písal úlohu miesto do zošita na latky školského plota. Najprv vyjadroval $\frac{3}{7}$, teda na prvú latku navrch napísal 0, na druhú desatinnú čiarku, na tretiu 4 atď. Keď skončil, napísal pod tieto čísla vyjadrenie zlomku $\frac{7}{13}$. Na prvú latku dole napísal 0, na druhú desatinnú čiarku, na tretiu 5 atď. Koľko bolo latiek na plote, ak viete, že číslicu 5 napísal presne 667 krát a že na 668 latkách bola dvojica rovnakých čísel?

(M. Dillingerová, P. Tlustý)

6. V Kocúrkove majú dve zmenárne. V súčasnosti majú takéto kurzy:

1. zmenáreň			**2. zmenáreň**		
mena	nákup	predaj	mena	nákup	predaj
1**euro**	123Kk	132Kk	1**euro**	143Kk	154Kk

Slavo Špakulatý mal niekoľko **eur**. V 2. zmenárni ich zamenil za Kocúrkovské koruny (Kk) a tie potom zamenil v 1. zmenárni späť na **euro**. Takto zarobil jedno **euro**. Koľko **eur** mal na začiatku?

(S. Bednářová)

Kategória Z8

1. Určte všetky dvojciferného čísla, pre ktoré súčin ciferného súčtu a ciferného súčinu je 126.

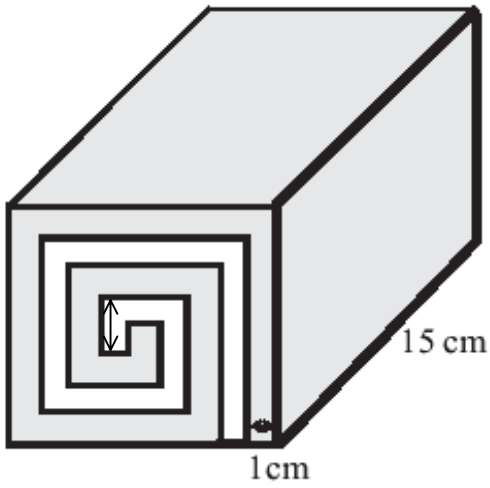
(M. Raabová)

2. Pani Zručná sa uchádzala o miesto vo výrobe vianočných perníkov. Pri pohovore s vedúcim chcela povedať, koľko perníkov ozdobí za koľko minút. Bola nervózna, a preto omylom prehodila počet minút s počtom perníkov. Vedúci podľa jej údajov vypočítal, koľko perníkov by mala pani Zručná stihnúť ozdobiť za päťhodinovú pracovnú dobu, a presne tento počet jej dal za úlohu ozdobiť. Pani Zručnej trvala práca o 2 hodiny a 12 minút dlhšie. Koľko perníkov ozdobila?

(L. Šimůnek)

3. Na obrázku 1 vidíte špeciálny druh rolády, tzv. KVADRILÁDU. Je vyrobená z bielej a hnedej marcipánovej hmoty, pričom obe hmoty majú rovnakú hrúbku 1 cm. Celá kvadriláda má dĺžku 15 cm. Predáva sa rozkrájaná na 10 rovnakých plátkov, pričom sa krája rovnobežne s prednou stenou. Zistite
   a) rozmery jedného plátku,
   b) koľko gramov hnedej hmoty a koľko gramov bielej hmoty treba na jej prípravu, ak viete, že jeden cm^3 marcipánovej hmoty váži 2 gramy.

   (Neoznačená šípka v obrázku má dĺžku 2 cm.)



Obr. 1

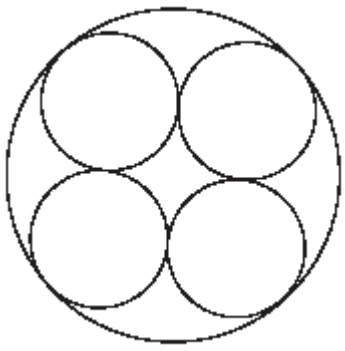
(S. Bednářová)

4. Roman písal na papier za sebou celé čísla tak, že nasledujúce získal z predchádzajúceho striedavo násobením dvoma a odčítaním troch. Napr. postupnosť čísel $1;\ 2;\ -1;-2;-5;\ -10$ vyhovuje jeho pravidlu, ale postupnosť 10; 7; 4; 8; 16; 32 jeho pravidlo nespĺňa. Po chvíli sčítal posledných 5 čísel, ktoré napísal a vyšlo mu 114. Ktorých 5 čísel sčitoval?

(M. Raabová)

5. Určte polomer väčšej kružnice na obrázku 2, ak každá malá kružnica má polomer 1 cm.

(P. Tlustý)



Obr. 2

6. Jakub má tento školský rok priemer všetkých svojich známok 1,85. Za celý školský rok dostal iba štyri pätorky a práve tretina jeho známok boli jednotky. Najmenej koľko známok musel tento školský rok dostať?

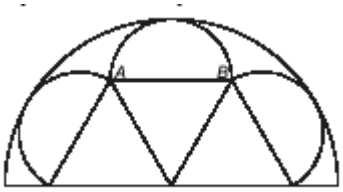
(L. Šimůnek)

Kategória Z9

1. Určte počet trojciferných prirodzených čísel, ktoré majú práve dve rovnaké cifry.

(P. Tlustý)

2. Na obrázku 1 sú tri rovnostranné trojuholníky, jedna veľká polkružnica



Obr. 1

s polomerom 1 dm a tri malé polkružnice. Určte dĺžku úsečky AB.

(P. Tlustý)

3. V súradnicovej sústave sme znázornili body $A[3,2]$, $B[-1,1]$, $C[-2,4]$ a ich obrazy A', B', C' v stredovej súmernosti so stredom v začiatku súradnicovej sústavy. Vypočítajte obsah šesťuholníka $ABCA'B'C'$.

(S. Bednářová)

4. Starý podnikateľ zomrel a zanechal po sebe dva účty, jeden dlh a testament. V testamente sa písalo, že peniaze z prvého účtu si majú rozdeliť 1. a 2. syn v pomere 1:2, peniaze z druhého účtu 1. a 3. syn v pomere 1:3 a dlh majú zaplatiť 2. a 3. syn v pomere 2:3. Zistite, koľko Sk bolo na jednotlivých účtoch a aký dlh museli synovia splatiť, ak viete, že v konečnom dôsledku každý z nich získal 123 456 Sk.

(S. Bednářová)

5. Dva rovnostranné papierové trojuholníky, z ktorých menší má obsah 60 cm^2, sme položili cez seba tak, že ich prienikom bol pravouhlý trojuholník s obsahom 30 cm^2. Aký najmenší obsah mohol mať väčší z rovnostranných trojuholníkov?

(S. Bednářová)

6. Zadanie písomnej práce obsahovalo 26 otázok, ktoré boli rozdelené podľa obťažnosti do troch skupín. V prvej skupine bola správna odpoveď hodnotená tromi bodmi, v druhej piatimi bodmi a v tretej ôsmimi bodmi. Maximálny možný počet získaných bodov bol 111. Koľko otázok mohlo byť v každej skupine?

(L. Šimůnek)

Kategória C

C – I – 1

a) Dokážte, že pre každé prirodzené číslo m je rozdiel $m^6 - m^2$ deliteľný číslom 60.

b) Určte všetky prirodzené čísla m, pre ktoré je rozdiel $m^6 - m^2$ deliteľný číslom 120.

(L. Moravčík)

C – I – 2

Každé dve z kružníc k, l, m majú vonkajší dotyk a všetky tri majú spoločnú dotyčnicu. Polomery kružníc k, l sú 3 cm a 12 cm. Vypočítajte polomer kružnice m. Nájdite všetky riešenia.

(L. Boček)

C – I – 3

Určte počet všetkých trojíc navzájom rôznych trojmiestnych prirodzených čísel, ktorých súčet je deliteľný každým z troch sčitovaných čísel.

(J. Šimša)

C – I – 4

Je dané prirodzené číslo n ($n \geq 2$) a reálne čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pre ktoré platí

$$x_1x_2 = x_2x_3 = \ldots = x_{n-1}x_n = x_nx_1 = 1.$$

Dokážte, že $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geq n$.

(J. Švrček)

C – I – 5

V ostrouhlom trojuholníku ABC označme D pätu výšky z vrcholu C a P, Q päty kolmíc vedených bodom D na strany AC a BC. Obsahy trojuholníkov ADP, DCP, DBQ, CDQ označme postupne S_1, S_2, S_3, S_4. Vypočítajte $S_1 : S_3$, ak $S_1 : S_2 = 2 : 3$, $S_3 : S_4 = 3 : 8$.

(P. Novotný)

C – I – 6

Rozhodnite, ktoré z čísel $\sqrt{p+\sqrt{q}} + \sqrt{q+\sqrt{p}}$, $\sqrt{p+\sqrt{p}} + \sqrt{q+\sqrt{q}}$ je väčšie, ak p a q sú rôzne kladné čísla.

(J. Moravčík)

Kategória B

B – I – 1

Určte všetky hodnoty celočíselného parametra a, pre ktoré má rovnica

$$(x + a)(x + 2a) = 3a$$

aspoň jeden celočíselný koreň.

(J. Zhouf)

B – I – 2

V danom trojuholníku ABC označme D ten bod polpriamky CA, pre ktorý platí $|CD| = |CB|$. Ďalej označme postupne E, F stredy úsečiek AD a BC. Dokážte, že $|\angle BAC| = 2|\angle CEF|$ práve vtedy, keď $|AB| = |BC|$.

(P. Leischner)

B – I – 3

Rozhodnite, či nerovnosť

$$a(b+1)+b(c+1)+c(d+1)+d(a+1)\geq \frac{1}{2}(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)$$

platí pre ľubovoľné kladné čísla a, b, c, d, ktoré vyhovujú podmienke

a) $ab = cd = 1$,

b) $ac = bd = 1$.

(J. Šimša)

B – I – 4

Každú z hviezdičiek v zápisoch dvanásťmiestnych čísel A = *88 888 888 888, B = *11 111 111 111 nahraďte nejakou číslicou tak, aby výraz $|14A - 13B|$ mal čo najmenšiu hodnotu.

(J. Šimša)

B – I – 5

Kruh so stredom S a polomerom r je rozdelený na štyri časti dvoma tetivami, z ktorých jedna má dĺžku r a druhá má od stredu S vzdialenosť $\frac{r}{2}$. Dokážte, že absolútna hodnota rozdielu obsahov tých dvoch častí, ktoré majú spoločný práve jeden bod a pritom žiadna neobsahuje stred S, sa rovná jednej šestine obsahu kruhu.

(P. Leischner)

B – I – 6

Určte najmenšie prirodzené číslo n s nasledovnou vlastnosťou: Ak zvolíme ľubovoľne n rôznych prirodzených čísel menších ako 2005, sú medzi nimi dve také, že podiel súčtu a rozdielu ich druhých mocnín je väčší než 3.

(J. Zhouf)

Kategória A

A – I – 1

V obore reálnych čísel vyriešte rovnicu

$$\sqrt{2}\left(\sin t + \cos t\right) = \operatorname{tg}^3 t + \operatorname{cotg}^3 t\,.$$

(J. Švrček)

A – I – 2

Nech *ABCD* je tetivový štvoruholník s navzájom kolmými uhlopriečkami. Označme postupne *p, q* kolmice z bodov *D, C* na priamku *AB* a ďalej *X* priesečník priamok *AC* a *p* a *Y* priesečník priamok *BD* a *q*. Dokážte, že *XYCD* je kosoštvorec alebo štvorec.

(E. Kováč)

A – I – 3

Postupnosť $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *nenulových* celých čísel má tú vlastnosť, že pre každé $n \geq 0$ platí $a_{n+1} = a_n - b_n$, kde b_n je číslo, ktoré má rovnaké znamienko ako číslo a_n, ale opačné poradie číslic (zápis čísla b_n môže na rozdiel od zápisu čísla a_n začínať jednou alebo viacerými nulami). Napríklad pre $a_0 = 1\,210$ je $a_1 = 1\,089$, $a_2 = -8712$, $a_3 = -6534$.

a) Dokážte, že postupnosť (a_n) je periodická.
b) Zistite, aké najmenšie prirodzené číslo môže byť a_0.

(T. Jurík)

A – I – 4

Nájdite všetky kubické rovnice $P(x) = 0$, ktoré majú aspoň dva rôzne reálne korene, z ktorých jeden je číslo 7, a ktoré pre každé reálne číslo *t* vyhovujú podmienke: Ak $P(t) = 0$, potom $P(t+1) = 1$.

(P. Novotný)

A – I – 5

Sú dané úsečky dĺžok *a, b, c, d*. Dokážte, že konvexné štvoruholníky *ABCD* so stranami dĺžok *a, b, c, d* (pri zvyčajnom označení) existujú a pritom uhlopriečky každého z nich zvierajú ten istý uhol práve vtedy, keď platí rovnosť $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.

(J. Šimša)

A – I – 6

Nájdite všetky usporiadané dvojice (x, y) prirodzených čísel, pre ktoré platí $x^2 + y^2 = 2005 \cdot (x - y)$.

(J. Moravčík)