Zadania úloh 1. série korešpondenčnej súťaže v školskom roku 2005/2006

1. V triede je 30 detí. 15 detí vie francúzsky, 15 detí taliansky, 15 detí anglicky. 10 detí vie francúzsky aj anglicky, 10 detí francúzsky aj taliansky a 10 detí taliansky aj anglicky. 5 detí vie francúzsky, taliansky aj anglicky. Koľko detí neovláda žiadny z týchto troch jazykov?

2. V obchode majú tri druhy malých nanukov po 10 Sk, 2 druhy stredne veľkých nanukov po 15 Sk a 5 druhov veľkých nanukov po 20 Sk. Koľkými spôsobmi môžeme nakúpiť nanuky, ak chceme z každej veľkosti jeden? Koľkými spôsobmi môžeme nakúpiť nanuky, ak za ne minieme 45 Sk?

3. Nájdite štyri čísla, ktorých súčet aj súčin sú nepárne čísla.

4. Janko a Marienka spoločne raňajkujú. Majú na stole jednu bábovku, jeden puding a jeden kompót. Marienka by sama zjedla puding za 15 minút, kompót za 13 minút a bábovku za osem minút. Janko by sám zjedol puding za štyri minúty, kompót za tri minúty a bábovku za dve minúty. Nájdite postup, akým spoločne zjedia všetky tri jedlá za najkratší čas.

5. Umiestnite na šachovnicu 3 dámy a 4 veže tak, aby ohrozovali všetky políčka šachovnice, aj seba navzájom. Dáma ohrozuje všetky políčka v riadku, v stĺpci aj v oboch uhlopriečnych smeroch, veža ohrozuje všetky políčka v riadku aj v stĺpci v ktorom sama stojí.

6. Nájdite číslo, stojace na 2005. mieste v postupnosti: 1, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 16, 17, 19, 21, 23, 25, 26, 28, 30, 32, 34, 36, ... (Za jednotkou sú dve párne čísla, potom tri nepárne, štyri párne...)
7. Rovnoramenný lichobežník, ktorý Veronika nakreslila, má tú zvláštnosť, že má tri strany rovnako dlhé a jeho uhlopriečka je rovnako dlhá ako štvrtá strana. Vypočítaj vnútorné uhly Veronikinho lichobežníka.

8. Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré je číslo $n^3 + 3$ deliteľné číslom $n + 3$ bezo zvyšku.

9. Znamienko $\oplus$ znamená operáciu $a \oplus b = ab - 4a - 4b + 16$. Určte číslo x tak, aby $(3 \oplus x) \oplus (3 \oplus x) = 0$.

10. Do kružnice je vpísaný štvorec ABCD. Ľubovoľným bodom M uhlopriečky AC je vedená tetiva KL rovnobežná so stranou AB. Dokážte, že $|KM|^2 + |ML|^2 = |AB|^2$.

11. Zistite, koľko najviac šachových kráľov sa dá umiestniť na šachovnicu 8×8 tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali.

.

12. V parku rastie 10 000 stromov, ktoré sú usporiadané v mriežke 100×100. Koľko z nich môžeme maximálne vyrúbať, aby platilo, že keď sa posadím na ľubovoľný peň, žiadny iný peň zo svojho miesta neuvidím?

13. Dokážte, že rovnica $x^3 - 1996x^2 + rx + 1995 = 0$ má pre každý reálny koeficient r nanajvýš jeden celočíselný koreň.

14. Daný je trojuholník s dĺžkami strán a, b, c a obsahom S. Dokážte, že platí nerovnosť

$$9a^2 + 4b^2 \geq 24S\,.$$

Termín odoslania riešení úloh 1. série: do 21. 11. 2005



Hranie Mod-Domina na sústredení