Riešenia úloh 1. série korešpondenčnej súťaže

1. V triede je 30 detí. 15 detí vie francúzsky, 15 detí taliansky, 15 detí anglicky. 10 detí vie francúzsky aj anglicky, 10 detí francúzsky aj taliansky a 10 detí taliansky aj anglicky. 5 detí vie francúzsky, taliansky aj anglicky. Koľko detí neovláda žiadny z týchto troch jazykov?

Riešenie: Keďže 5 detí ovláda všetky tri jazyky (FTA) a po 10 detí ovláda 2 jazyky (AF, FT, TA), tak po 5 detí ovláda práve dva jazyky. Takže máme 5 detí, ktoré ovládajú všetky 3 jazyky, 5 detí, ktoré ovládajú len angličtinu a francúzštinu, 5 detí, ktoré ovládajú len angličtinu a taliančinu a 5 detí, ktoré ovládajú len francúzštinu a taliančinu. Keďže každý jazyk ovláda 15 detí a už máme 15 detí, ktoré ho ovládajú, tak neexistuje dieťa, ktoré by ovládalo práve jeden jazyk. Ostali už len deti, ktoré neovládajú ani jeden z týchto troch jazykov. Je ich $30-5-5-5-5=10$. Preto 10 detí neovláda ani jeden z uvedených jazykov.

Komentár a bodovanie: Úloha sa dala riešiť viacerými spôsobmi – napríklad pomocou Vennových diagramov alebo sústav rovníc. Pri Vennových diagramoch však nestačí len znázorniť situáciu, je potrebné zdôvodniť, že to nemôže byť inak.

2. V obchode majú tri druhy malých nanukov po 10 Sk, 2 druhy stredne veľkých nanukov po 15 Sk a 5 druhov veľkých nanukov po 20 Sk. Koľkými spôsobmi môžeme nakúpiť nanuky, ak chceme z každej veľkosti jeden? Koľkými spôsobmi môžeme nakúpiť nanuky, ak za ne minieme 45 Sk?

Riešenie: Ak máme kúpiť z každého druhu jeden kus, tak pre výber malých nanukov máme 3 možnosti, pre stredné 2 možnosti a pre veľké nanuky máme 5 možností. Keďže tieto nanuky môžeme ľubovoľne kombinovať, tak máme na základe pravidla súčinu spolu $3\cdot 2\cdot 5=30$ možností.

V prípade, že za nanuky minieme presne 45 Sk, nám pribudnú ešte možnosti, v ktorých vyberieme viac nanukov rovnakej veľkosti. Ak by sme kúpili dva nanuky za 20 Sk, tak by nám ostalo 5 Sk a za tie už nemôžeme kúpiť žiaden nanuk. Preto veľký nanuk môžeme kúpiť maximálne jeden. Ak ho kúpime, tak nám ostalo 25 Sk. Za ne môžeme kúpiť maximálne jeden nanuk za 15 Sk. Ak ho kúpime, tak potom musíme kúpiť 1 malý nanuk. To je práve možnosť, ktorú sme už vypočítali. Ak by sme nekúpili žiaden stredne veľký nanuk, ostalo by nám 25 Sk a za tie môžeme kúpiť len 2 malé nanuky a ostane nám 5 Sk, čo nevyhovuje. Ak nekúpime žiaden veľký nanuk, tak môžeme kúpiť maximálne 3 stredne veľké nanuky. To je jedna z možností. Ak ich kúpime 3, tak máme 4 možnosti – z prvého druhu môžeme kúpiť 0 až 3 kusy a z druhého druhu potom zvyšné. Musíme ich taktiež kúpiť nepárne veľa, pretože

inak by nám ostalo aspoň 5 Sk. Preto máme už len jednu možnosť – 1 stredne veľký a 3 malé nanuky. Ak kúpime 1 stredne veľký a 3 malé nanuky, tak pre výber stredne veľkého nanuku máme 2 možnosti. Pre výber 3 malých nanukov máme podľa priehradkového princípu $\binom{3+2}{2}=10$ možností. (Môžeme to zistiť napríklad aj vypísaním všetkých možností.

Celkovo máme teda $30+4+20=54$ možností.

Komentár a bodovanie: Najčastejšou chybou pri vypisovaní možností bolo to, že ste zabudli na niektoré možnosti. Nezamýšľali ste sa nad situáciou, čo by sa stalo, ak by v obchode nemali dostatok nanukov... Ak by mali napríklad z každej veľkosti len jeden kus, tak počet možností by bol nižší.

3. Nájdite štyri čísla, ktorých súčet aj súčin sú nepárne čísla.

Riešenie: Riešením sú napríklad čísla 2, 2, $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{2}$. Ich súčet sa rovná 5 a súčin 1.

Komentár a bodovanie: Častou chybou bolo dokazovanie, že také prirodzené čísla neexistujú. Keďže sa v zadaní nepíše, že by to mali byť prirodzené čísla, tak samozrejme tieto riešenia neboli správne.

4. Janko a Marienka spoločne raňajkujú. Majú na stole jednu bábovku, jeden puding a jeden kompót. Marienka by sama zjedla puding za 15 minút, kompót za 13 minút a bábovku za 8 minút. Janko by sám zjedol puding za 4 minúty, kompót za 3 minúty a bábovku za 2 minúty. Nájdite postup, akým spoločne zjedia všetky tri jedlá za najkratší čas.

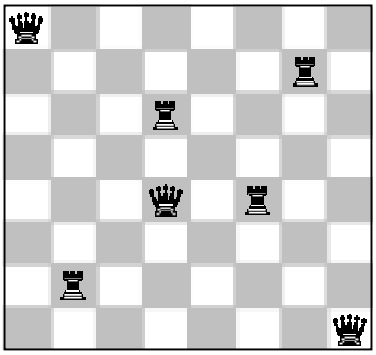
Riešenie: Ak chceme nájsť najkratší čas, za ktorý zjedia obaja všetky jedlá, tak každý by mal jesť to, čo mu ide najrýchlejšie v porovnaní s druhým. Janko zje kompót $\frac{13}{3}$-krát rýchlejšie, bábovku 4-krát a puding 3,75-krát rýchlejšie ako Marienka. Preto začne jesť kompót. Keď ho zje, tak Marienka bude stále jesť puding. Preto Janko bude pokračovať bábovkou, lebo aj tú zje rýchlejšie v porovnaní s pudingom ako Marienka. Takto za 5 minút zjedia bábovku, kompót a $\frac{5}{15}$ pudingu. Odteraz budú jesť puding spoločne. Za minútu spoločne zjedia $\frac{1}{15}+\frac{1}{4}=\frac{19}{60}$ z bábovky. Ostáva im zjesť

ešte dve tretiny pudingu. Bude im to preto trvať $\frac{2}{3}:\frac{19}{60}=\frac{40}{19}$ minút, teda 2 a $\frac{2}{19}$ minúty. Spolu všetko zjedia za 7 a $\frac{2}{19}$ minúty.

Komentár a bodovanie: V riešeniach ste najčastejšie strácali body za nedostatočné zdôvodnenie toho, prečo sa bude jesť v uvedenom poradí. Nie je možné riešiť túto úlohu tak, že si vypočítate priemernú rýchlosť jedenia oboch osôb a na jej základe vypočítate čas zjedenia všetkých jedál. Nastáva tu problém s tým, že ak jedna osoba zje konkrétne jedlo, tak druhá osoba ho už jesť nemôže.

5. Umiestnite na šachovnicu 3 dámy a 4 veže tak, aby ohrozovali všetky políčka šachovnice, aj seba navzájom. Dáma ohrozuje všetky políčka v riadku, v stĺpci aj v oboch uhlopriečnych smeroch, veža ohrozuje všetky políčka v riadku aj v stĺpci, v ktorom sama stojí.

Riešenie: Táto úloha má viacero riešení, jedno z nich je napríklad:



Komentár a bodovanie: Nesprávne riešenia spočívali v tom, že buď niektoré figúrky neboli ohrozené, alebo sa vyskytlo políčko, ktoré nebolo ohrozené. Body ste taktiež strácali za to, ak ste nedokázali, že vaše riešenie spĺňa požiadavky zo zadania (maximálne 2 body).

6. Nájdite číslo, stojace na 2005. mieste v postupnosti: 1, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 16, 17, 19, 21, 23, 25, 26, 28, 30, 32, 34, 36, ... (Za jednotkou sú dve párne čísla, potom tri nepárne, štyri párne, ...)

Riešenie: Čísla v tejto postupnosti si rozdelíme do skupín nasledovne: 1. skupinu bude tvoriť číslo 1, druhú čísla 2 a 4, tretiu 5, 7, 9, atď. až *n*-tá skupina bude obsahovať *n* čísel, ktorých parita bude rovnaká ako parita čísla *n*. Najväčšie číslo v *n*-tej skupine sa bude rovnať n^2. Môžeme to dokázať jednoducho matematickou indukciou – pre $n=1$ vidíme, že tvrdenie platí. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre nejaké *n*.

V $(n+1)$-vej skupine bude nasledujúcich $n+1$ čísel rovnakej parity ako $n+1$, ktoré sú väčšie ako n^2. Medzi nimi však bude *n* čísel, ktoré sú vynechané. Preto najväčšie číslo v $(n+1)$-vej skupine bude

$$n^2+2n+1=(n+1)^2,$$

čo sme chceli dokázať. Preto sa najväčšie číslo v *n*-tej skupine rovná n^2. Na základe vyššie uvedeného dostávame taktiež to, že sa *k*-te číslo v *n*-tej skupine rovná

$$(n-1)^2+2k-1,$$

pričom $k \le n$. Preto sú všetky čísla v *n*-tej skupine z množiny

$$\{(n-1)^2+1,(n-1)^2+3,\ldots,n^2\}.$$

Keďže sa v *k*-tej skupine nachádza *k* čísel, tak posledné číslo (n^2) v *n*-tej skupine je na $1+2+3+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$-tom mieste. Keďže platí

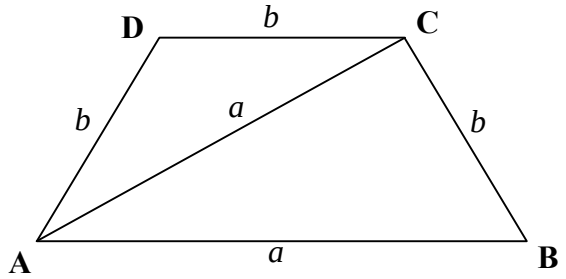
$$\frac{1}{2}\cdot 62\cdot 63=1953<2005<2016=\frac{1}{2}\cdot 63\cdot 64,$$

bude číslo na mieste 2005 v 63. skupine. Bude v nej na mieste $2005-1953=52$. Preto sa bude rovnať $(63-1)^2+2\cdot 52-1=3947$, čo sme chceli nájsť.

Komentár a bodovanie: Body ste strácali za to, že ste buď vôbec nedokázali, alebo dokázali nedostatočne vaše tvrdenia. Ak ste len uviedli vyššie uvedené tvrdenia bez dôkazu, mohli ste získať maximálne 3 body.

7. Rovnoramenný lichobežník, ktorý Veronika nakreslila, má tú zvláštnosť, že má tri strany rovnako dlhé a jeho uhlopriečka je rovnako dlhá ako štvrtá strana. Vypočítaj vnútorné uhly Veronikinho lichobežníka.

Riešenie: Uvažujme označenie ako na obrázku. Označme si uhol pri vrchole *B* ako β. Keďže *ABCD* je rovnoramenný lichobežník, tak platí aj



$$|\angle BAD|=\beta,$$

$$|\angle ADC|=|\angle BCD|=180°-\beta°.$$

Trojuholník *ABC* je rovnoramenný so základňou *BC*, preto $|\angle ACB|=|\angle ABC|=\beta$. Potom

$$|\angle ACD|=|\angle BCD|-|\angle BCA|=180°-\beta-\beta=180°-2\beta.$$

Trojuholník *ACD* je rovnoramenný so základňou *AC*, preto

$$|\angle DAC|=|\angle DCA|=180°-2\beta.$$

Súčet vnútorných uhlov v trojuholníku *ACD* sa rovná $180°$, preto platí:

$$180° = |\angle DAC| + |\angle DCA| + |\angle ADC| = 180° - 2\beta + 180° - 2\beta + 180° - \beta,$$

odkiaľ po úprave dostávame, že platí

$$\beta = 72°.$$

Dopočítaním zvyšných uhlov dostávame, že platí:

$$|\angle DAB| = |\angle ABC| = 72°, \quad |\angle BCD| = |\angle CDA| = 108°.$$

Komentár a bodovanie: Úloha bola jednoduchá a nerobila väčšie problémy.

8. Nájdite všetky prirodzené čísla *n*, pre ktoré je číslo $n^3 + 3$ deliteľné číslom $n + 3$ bezo zvyšku.

Riešenie: Vydelením polynómov v zadaní dostávame, že platí

$$\frac{n^3 + 3}{n + 3} = n^2 - 3n + 9 - \frac{24}{n + 3}.$$

Aby bolo číslo na pravej strane celé (teda aby sme delili bezo zvyšku), musí platiť, že $\frac{24}{n+3}$ je celé číslo. Keďže *n* je prirodzené číslo, tak aj $\frac{24}{n+3}$ bude prirodzené číslo, dokonca vieme povedať, že bude mať hodnotu maximálne 6, pretože $\frac{24}{n+3} \leq \frac{24}{4} = 6$. Zároveň vieme aj to, že číslo $\frac{24}{n+3}$ musí byť deliteľom čísla 24. Preto máme pre hodnoty $\frac{24}{n+3}$ len 5 možností: 1, 2, 3, 4, 6. Riešením jednoduchej rovnice nakoniec dostávame 5 možností pre *n*: 21, 9, 5, 3, 1.

Komentár a bodovanie: 1 bod ste strácali vtedy, keď ste prehlásili, že číslo $\frac{24}{n+3}$ je celé len pre kladné delitele čísla 24. 1 bod ste taktiež mohli stratiť vtedy, keď ste „overovali“ veľké množstvo možností pre *n* bez toho, aby ste ich vypísali.

9. Znamienko $\oplus$ znamená operáciu $a \oplus b = ab - 4a - 4b + 16$. Určte číslo *x* tak, aby

$$(3 \oplus x) \oplus (3 \oplus x) = 0.$$

Riešenie: Dosadením $a = 3$, $b = x$ do definičného vzťahu dostávame, že platí

$$3 \oplus x = 3x - 12 - 4x + 16 = 4 - x.$$

Keďže platí

$$a \oplus b = (a - 4)(b - 4),$$

tak pre $a = b = 4 - x$ dostávame, že platí

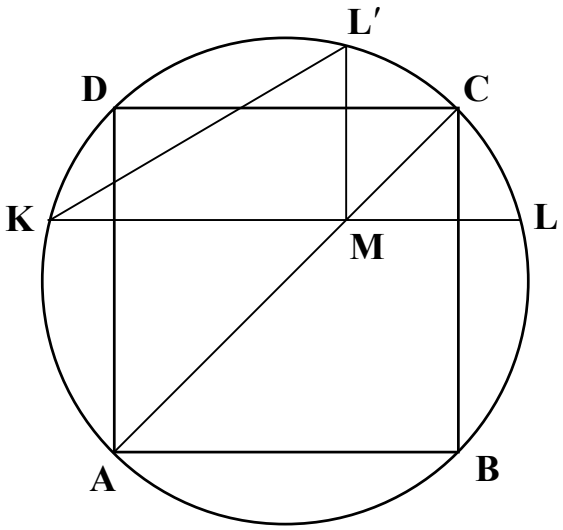
$$0 = (3 \oplus x) \oplus (3 \oplus x) = (4 - x) \oplus (4 - x) = x^2 .$$

Táto rovnica má jediné reálne riešenie $x = 0$, ktorého správnosť môžeme ľahko overiť skúškou.

Komentár a bodovanie: Úlohu vyriešili všetci riešitelia správne, riešenia sa líšili len svojou dĺžkou.

10. Do kružnice je vpísaný štvorec ABCD. Ľubovoľným bodom M uhlopriečky AC je vedená tetiva KL rovnobežná so stranou AB. Dokážte, že

$$|KM|^2 + |ML|^2 = |AB|^2 .$$



Riešenie: Uvažujme bod L', ktorý vznikne ako obraz bodu L v osovej súmernosti podľa osi AC. Keďže priamka AC je zároveň aj osou súmernosti zadanej kružnice, platí

$$|ML| = |ML'| .$$

Priamka ML zviera s uhlopriečkou AC uhol 45° (pretože KL je rovnobežná s AB), preto sa aj uhol priamky ML' s priamkou AC rovná 45°. Na základe toho máme, že priamka ML' je kolmá na priamku ML, a teda trojuholník KML' je pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole M. V tomto pravouhlom trojuholníku platí Pytagorova veta:

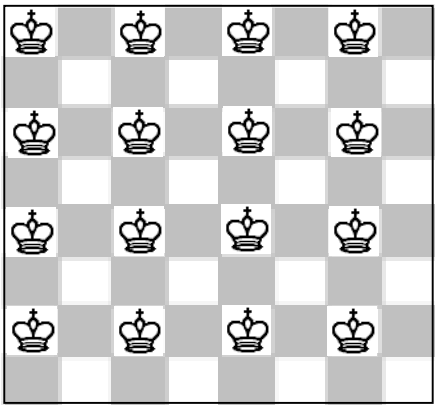
$$|KM|^2 + |ML'|^2 = |KL'|^2 .$$

Vzhľadom na to, že $|ML| = |ML'|$, stačí nám dokázať, že $|KL'| = |AB|$. Trojuholník LML' je pravouhlý (ukázali sme už vyššie) a zároveň je aj rovnoramenný, pretože $|ML| = |ML'|$. Preto majú jeho vnútorné uhly pri vrcholoch L a L' veľkosť 45°. Preto aj v trojuholníku KLL' má uhol pri vrchole L veľkosť 45°. Znamená to, že obvodový uhol prislúchajúci úsečke KL' má veľkosť 45°. Avšak aj obvodový uhol prislúchajúci úsečke AB má veľkosť 45° – je to napríklad uhol ACB. Keďže tieto dve úsečky majú rovnaké obvodové uhly, majú aj rovnakú veľkosť, čo sme chceli dokázať. Ostáva nám už len konštatovať, že v prípade, že bod M je totožný s niektorým z vrcholov A alebo C, je dôkaz tvrdenia triviálny.

Komentár a bodovanie: Všetci riešitelia našli správne riešenie. Niektorí z vás riešili túto úlohu aj analyticky – vzhľadom na to, že v zadaní boli útvary v dobrých vzájomných polohách, neboli takéto riešenia príliš dlhé.

11. Zistite, koľko najviac šachových kráľov sa dá umiestniť na šachovnicu 8×8 tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali.

Riešenie: Ak uvažujeme malú šachovnicu rozmerov 2×2, tak na ňu môžeme umiestniť maximálne jedného kráľa, pretože bude ohrozovať všetky ostatné políčka bez ohľadu na to, kam ho umiestnime. Keďže šachovnicu 8×8 vieme rozdeliť na 16 disjunktných šachovníc 2×2, počet kráľov, ktorých na ňu vieme umiestniť tak, aby sa navzájom neohrozovali, je maximálne 16. Také rozostavenie však ľahko nájdeme, a preto sa hľadaný počet kráľov rovná 16.



Komentár a bodovanie: Úloha bola jednoduchá a nerobila problémy. Body ste mohli stratiť za nedostatočné zdôvodnenie toho, že kráľov viac byť nemôže.

12. V parku rastie 10 000 stromov, ktoré sú usporiadané v mriežke 100×100. Koľko z nich môžeme maximálne vyrúbať, aby platilo, že keď sa posadím na ľubovoľný peň, žiadny iný peň zo svojho miesta neuvidím?

Riešenie: Analogicky ako v úlohe 12 vidíme, že v prípade vyrúbania dvoch stromov v mriežke 2×2 sa dva pne budú vidieť. Takže maximálny počet vyrúbaných stromov je 2500. Ak stromy vyrúbeme podobne, ako sme rozostavili kráľov v predchádzajúcom prípade, dostaneme 2500 vyrúbaných stromov. Ešte potrebujeme dokázať, že toto rúbanie spĺňa podmienku zo zadania. Zaveďme si preto súradnicovú sústavu do našej mriežky – bod vľavo dole nech má súradnice (0,0), vzdialenosť susedných stromov v mriežke nech je 1 a vyrúbme stromy, ktoré majú párne súradnice. Teraz potrebujeme len dokázať, že na spojnici týchto bodov leží aspoň jeden strom. Uvažujme stred tejto spojnice. Ak je jedna z jeho súradníc nepárna, je to strom a skončili sme. V prípade, že sú obe jeho súradnice párne, máme rovnakú situáciu ako predtým, avšak zmenšila sa nám vodorovná vzdialenosť týchto bodov na polovicu. Keďže táto vzdialenosť je menej ako 10 000, tak po maximálne 14 krokoch dôjdeme k vzdialenosti, ktorá je menšia ako 1, čo je však v spore s tým, že stromy tvoria body s celočíselnými súradnicami. Preto musíme v niektorom kroku dostať bod

s aspoň jednou súradnicou nepárnou, a to bude miesto stromu, ktorý nám zacloní výhľad na iný peň (možno takých stromov bude viac, nám stačí nájsť jeden ľubovoľný).

Komentár a bodovanie: Na rozmiestnenie stromov prišiel takmer každý. Problémy však boli s korektným odôvodnením toho, že naozaj sa žiadne dva pne nevidia. Často ste zabúdali na to, že stred úsečky môže byť zase pňom. Za túto chybu ste mohli stratiť 1 až 2 body.

13. Dokážte, že rovnica $x^3 - 1996x^2 + rx + 1995 = 0$ má pre každý reálny koeficient r nanajvýš jeden celočíselný koreň.

Riešenie: Označme si korene tejto rovnice k, l, m (tieto korene sú vo všeobecnosti komplexné, pričom uvažujeme každý koreň toľkokrát, aká je jeho násobnosť). Potom na základe Viètovych vzťahov platí

$$k + l + m = 1996,$$
$$k \cdot l \cdot m = -1995.$$

Tvrdenie dokážeme sporom. Predpokladajme, že táto rovnica má aspoň dva celočíselné korene. Potom na základe Viètovych vzťahov máme, že aj tretí koreň musí byť celočíselný, pretože sa súčet všetkých troch koreňov rovná 1996. Keďže súčin všetkých troch koreňov je nepárny, musia byť všetky tri korene nepárne. Potom je ale ich súčet taktiež nepárny. To je ale spor s tým, že sa ich súčet rovná 1996. Preto platí dokazované tvrdenie.

Komentár a bodovanie: Väčšina riešení bola zložitejšia a zdĺhavejšia, vyskytli sa aj chyby v znamienkach vo Viètovych vzťahoch.

14. Daný je trojuholník s dĺžkami strán a, b, c a obsahom S. Dokážte, že platí nerovnosť

$$9a^2 + 4b^2 \geq 24S.$$

Riešenie: Použitím AG nerovnosti pre kladné čísla $9a^2$ a $4b^2$ dostávame, že platí

$$\frac{9a^2 + 4b^2}{2} \geq \sqrt{9a^2 \cdot 4b^2} = 6ab.$$

Po úprave dostaneme, že platí

$$9a^2 + 4b^2 \geq 12ab.$$

Obsah trojuholníka si môžeme vypočítať na základe vzorca

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma,$$

kde γ je uhol zovretý stranami a a b.

Keďže $0 < \sin\gamma < 1$ pre $0 < \gamma < \pi$, dostávame, že platí

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma \leq \frac{1}{2}ab,$$

odkiaľ po prenásobení 2 dostávame tvrdenie

$$ab \geq 2S.$$

Využitím vyššie dokázanej nerovnosti dostávame, že platí

$$9a^2 + 4b^2 \geq 12ab \geq 24S,$$

čo sme chceli dokázať. Rovnosť nastáva práve vtedy, keď $\sin\gamma = 1$, teda keď je trojuholník pravouhlý s preponou *c*.

Komentár a bodovanie: Úloha nerobila väčšie problémy. Vyskytlo sa aj jedno netradičné a zaujímavé riešenie, ktoré však nebolo dobre zdôvodnené.