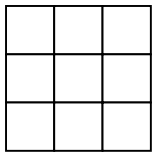
Zadania úloh 2. série korešpondenčnej súťaže v školskom roku 2005/2006

1. Doplňte do tabuľky 3×3 navzájom rôzne prirodzené čísla tak, aby sa súčet čísel v každom riadku, stĺpci aj uhlopriečke rovnal 47.



2. Dvaja zo šiestich chlapcov ukradli jablká. Na otázku, kto to bol, dali takéto odpovede:

Harry: „Boli to Charlie a Georgie.“
James: „Boli to Donald a Tom.“
Donald: „Boli to Tom a Charlie.“
Charlie: „Boli to Donald a James.“
George: „Boli to Harry a Charlie.“

Tom odmietol vypovedať. Štyria uviedli jedného páchateľa správne, druhého zle, piaty udal oboch zle. Kto kradol?

3. Každý z bodov kocky s hranou dĺžky a ofarbíme práve jednou z troch farieb. Dokážte, že potom medzi týmito bodmi existujú dva rovnakej farby, ktorých vzdialenosť je väčšia ako $\frac{7}{5}a$.

4. Koľkými spôsobmi možno z úplného súboru domina (28 hracích kameňov) vybrať dva tak, aby sme ich mohli priložiť k sebe?

5. Nájdite geometrické miesto všetkých bodov vnútri štvorca, z ktorých vidno tri jeho strany pod ostrým zorným uhlom. Aký je obsah útvaru, ktorý vytvárajú?

6. Zistite, pre ktoré prirodzené čísla n možno rozdeliť množinu $\{1, 2, ..., n\}$ na dve skupiny tak, aby v prvej skupine bolo trikrát viac čísel ako v druhej, a aby súčty čísel v oboch skupinách boli rovnaké.

7. Číslo tvaru $\frac{k(k+1)}{2}$, kde $k \in \mathbf{N}$, nazývame trojuholníkovým číslom. Nech $n \in \mathbf{N}$. Dokážte, že číslo $n!+1$ je druhou mocninou prirodzeného čísla práve vtedy, keď $\frac{n!}{8}$ je trojuholníkovým číslom.

8. Daný je konvexný štvoruholník *ABCD* s obsahom 100 cm^2. Označme stredy strán *AB*, *BC*, *CD*, *DA* po rade *E*, *F*, *G*, *H*. Vypočítajte súčet obsahov trojuholníkov *ABF*, *BCG*, *CDH* a *ADE*.

9. Aký najväčší počet bodov možno umiestniť na úsečke jednotkovej dĺžky tak, aby ľubovoľná úsečka dĺžky *d* obsahovala najviac $1+10d^2$ zo zvolených bodov?

10. Rozhodnite, či existujú funkcie *f* a *g* definované na celej množine reálnych čísel **R** tak, aby platilo $f(x)\cdot g(y)=2x+3y+1$ pre každé $x,y\in\mathbf{R}$.

11. Dokážte, že platí: $323 \mid \left(20^{2004}+16^{2004}-3^{2004}-1\right)$.

12. Označme *R* najväčšie také číslo, že do každého konvexného mnohouholníka s obsahom *S* a obvodom *o* možno vpísať kruh s polomerom *R*. Nájdite hodnotu *R* alebo dokážte, že také číslo neexistuje.

13. Nech $f(x)=ax^2+bx+c$, $x\in\mathbf{R}$, pričom koeficienty $a,b,c\in\mathbf{R}$ sú také, že rovnica $f(x)=x$ nemá reálne korene. Dokážte, že potom ani rovnica $f(f(x))=x$ nemá reálne korene.

14. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú postupnosti prirodzených čísel. Dokážte, že existujú navzájom rôzne indexy *p* a *q*, pre ktoré súčasne platia nasledujúce nerovnosti:

$$a_p \geq a_q,\quad b_p \geq b_q,\quad c_p \geq c_q.$$

Termín odoslania riešení úloh 2. série: do 20. 2. 2006