Riešené úlohy regionálneho kola súťaže
Praktická matematika

Kategórie K, L

1. Nájdite štvorciferné číslo deliteľné 7, pre ktoré platí: Súčet prvých dvoch cifier je 10, súčet prostredných dvoch cifier je 10 a súčet posledných dvoch cifier je 9.

Riešenie: Dané štvorciferné číslo označme $\overline{abcd}$. Potom $a+b=10$, $b+c=10$, $c+d=9$. Riešením týchto rovníc dostávame, že $a=c$, $b=d+1$. Zostavíme tabuľku:

a	b	c	d
9	1	9	0
8	2	8	1
7	3	7	2
6	4	6	3
5	5	5	4

a	b	c	d
4	6	4	5
3	7	3	6
2	8	2	7
1	9	1	8

Z tabuľky zistíme, že čísla 8 281 a 1 918 sú deliteľné siedmimi a vyhovujú podmienkam úlohy.

2. Štyria priatelia podali Športku. Mali šťastie. Výhru, ktorá bola vyjadrená päťciferným číslom, si rozdelili rovnakým dielom. Milan po rozdelení peňazí prišiel na zaujímavú vec. Dostal sumu, ktorá sa dala zapísať rovnakými číslicami, ako bola výhra, lenže v opačnom poradí. Koľko peňazí dostal Milan z výhry?

Riešenie: Nech má suma výhry desiatkový zápis $\overline{abcde}$, kde *a, b, c, d, e* sú cifry. Milanova časť sa dá potom zapísať ako $\overline{edcba}$ a platí

$$\overline{abcde} = 4 \cdot \overline{edcba}. \qquad (1)$$

Rozpísaním dostávame, že má platiť

$$10\,000a + 1\,000b + 100c + 10d + e = 40\,000e + 4\,000d + 400c + 40b + 4a,$$

čo môžeme zoskupením rovnakých neznámych a predelením tromi upraviť na tvar

$$3\,332a + 320b = 100c + 1\,330d + 13\,333e$$

Cifra *e* musí byť párna a podľa (1) menšia ako 3. Potom $e=2$. Cifra na mieste jednotiek čísla na pravej strane je 6. Potom cifra *a* môže byť len 3 alebo 8. Ak $a=3$, nevyhovuje to vzťahu (1), pretože

$$4 \cdot \overline{edcba} \geq 40\,000.$$

Teda $a=8$. Po dosadení a úpravách dostaneme

$$32b = 10c + 133d + 1$$

Cifra *d* musí byť nepárna a nie väčšia ako 2, aby vyhovovala poslednej rovnosti. Teda $d=1$. Odtiaľ dosadením dostávame, že $b=7$, $c=9$. Milan preto dostal z výhry 21 978 Sk.

3. V obdĺžniku *ABCD* platí $|AB| = 20\,\text{cm}$, $|AD| = 10\,\text{cm}$. Nad stranami *AB*, *AD* ako priemermi sú zostrojené kružnice, ktoré okrem bodu *A* majú spoločný bod *K*. Vypočítajte vzdialenosti bodu *K* od vrcholov *A*, *B*, *D*.

Riešenie: Označme $|AK| = x$, $|BK| = y$. V pravouhlom trojuholníku *ABD* pomocou Pytagorovej vety vypočítame, že

$$|BD| = \sqrt{20^2 + 10^2} = 10\sqrt{5}\,.$$

V pravouhlom trojuholníku *ABK* použijeme opäť Pytagorovu vetu a dostávame, že

$$x^2 + y^2 = 20^2\,.$$

V pravouhlom trojuholníku *ADK* použijeme opäť Pytagorovu vetu a dostávame, že

$$x^2 + \left(10\sqrt{5} - y\right)^2 = 10^2\,,$$

pretože body *B*, *K*, *D* ležia na jednej priamke ($|\angle BKD| = 90° = |\angle AKD|$). Upravením dostávame, že platí

$$x^2 + y^2 - 20\sqrt{5}y + 400 = 0\,.$$

Dosadíme $x^2 + y^2 = 20^2$ a po úprave dostávame, že platí $20\sqrt{5}y = 800$,
odkiaľ dostávame

$$y = \frac{40}{\sqrt{5}} = 8\sqrt{5}\,.$$

Dopočítaním *x* dostávame

$$x = \frac{20}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}\,.$$

Hľadané vzdialenosti sú:

$$|BK| = x = 8\sqrt{5}\ \text{cm},$$
$$|AK| = y = 4\sqrt{5}\ \text{cm},$$
$$|DK| = 10\sqrt{5} - y = 2\sqrt{5}\ \text{cm}.$$

4. V hrnci s priemerom 24 cm sú tri marhuľové zaváraniny tvaru valca. Každá z nich má priemer 9,2 cm a výšku 15 cm. V hrnci je jeden liter vody teploty 74°C. Koľko litrov vody s teplotou 20°C musíme pridať, aby sme ju schladili na 36°C? Do akej výšky bude siahať voda v hrnci?

Riešenie: Z rovnice

$$1 \cdot 78° + \mathrm{x} \cdot 20° = (1 + \mathrm{x}) \cdot 36°$$

zistíme, že $x = 2{,}625$. Do hrnca musíme pridať 2,625 litra vody. Potom bude v hrnci $1 + 2{,}625 = 3{,}625$ litra vody. Vypočítame obsah dna hrnca a od neho odpočítame obsahy, ktoré tvoria tri dná marhuľových zaváranín:

$$S = \pi \cdot 12^2 - 3 \cdot \pi \cdot 4{,}6^2 \doteq 2{,}5283\ \text{dm}^2$$

Výška vody v hrnci je potom $3{,}625 : 2{,}5283 \doteq 1{,}434$ dm, čo je menej než 15 cm, a teda táto výška je aj riešením zadanej úlohy.

Kategórie M, N

1. Sú dané reálne čísla x, y a celé číslo z tak, že platia rovnosti

$$x + y = z + 1,$$

$$xy = z^2 - 7z + 14.$$

Určte celé číslo z tak, aby bola hodnota výrazu $x^2 + y^2$ najväčšia!

Riešenie: Ak výraz $x^2 + y^2$ postupne upravujeme, dostaneme, že platí

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = (z + 1)^2 - 2\left(z^2 - 7z + 14\right) = -z^2 + 16z - 17 = -(z - 8)^2 + 37.$$

Výraz $x^2 + y^2 = -(z - 8)^2 + 37$ nadobúda maximálnu hodnotu pre $z = 8$. Ak však túto hodnotu dosadíme do pôvodných rovníc, dostaneme sústavu

$$x + y = 9,$$

$$xy = 22,$$

ktorá nemá riešenie v obore reálnych čísel, pretože diskriminant kvadratickej rovnice

$$x \cdot (9 - x) = 22$$

je záporný.

Správne riešenie musíme hľadať medzi celými číslami $z = 7$ alebo $z = 9$, ktoré nám dávajú druhé najvyššie hodnoty výrazu $x^2 + y^2 = -(z - 8)^2 + 37$.

Vyskúšaním obidvoch hodnôt zistíme, že maximálna hodnota výrazu $x^2 + y^2$ bude 36 pre $z = 7$.

2. V matematickej súťaži riešil každý žiak 30 úloh. Za správne vyriešenú úlohu dostal 4 body, nesprávne riešená úloha znamenala stratu jedného bodu a 0 bodov bolo za úlohu, ktorú neriešil. Koľko muselo byť účastníkov, aby sme mohli s istotou tvrdiť, že aspoň dvaja žiaci skončili v súťaži s rovnakým počtom bodov?

Riešenie: Každý žiak mohol v súťaži dosiahnuť celkový bodový súčet od – 30 bodov (ak riešil všetkých 30 úloh nesprávne) až do 120 bodov (pri správnom vyriešení všetkých 30 úloh) s výnimkou súčtov 119, 118, 117, 114, 113, 109 bodov, ktoré sa pri danom bodovacom systéme nedajú žiadnym spôsobom dosiahnuť. Možných výsledkov v súťaži je teda 151– 6 = 145. To znamená, že ak sa súťaže zúčastní aspoň 146 žiakov, môžeme s istotou tvrdiť, že aspoň dvaja žiaci skončili súťaž s rovnakým počtom bodov.

3. Stredy strán ostrouhlého trojuholníka ABC označíme postupne A_1, B_1, C_1. Z každého stredu spustíme dve kolmice na protiľahlé strany trojuholníka. Takto zostrojených šesť kolmíc ohraničuje šesťuholník. Určte, koľkokrát je obsah trojuholníka ABC väčší ako obsah takto vytvoreného šesťuholníka.

Riešenie: Body A_1, B_1, C_1 sú stredmi strán BC, AC, AB. Z bodov A_1, B_1, C_1 spustíme na protiľahlé strany trojuholníka kolmice. Tieto ohraničia šesťuholník $C_1DA_1EB_1F$.

Obsah trojuholníka $A_1B_1C_1$ sa rovná $\frac{1}{4}$ obsahu trojuholníka *ABC*. Ešte treba zistiť obsahy trojuholníkov B_1C_1F, A_1C_1D, A_1B_1E. Dvojice trojuholníkov B_1C_1F a CA_1E, resp. A_1C_1D a CB_1E sú zhodné na základe vetu *usu*. Ak trojuholníky B_1C_1F a A_1C_1D „premiestnime“ do trojuholníkov CA_1E a CB_1E, pričom trojuholník A_1B_1E zostáva bez zmeny, súčet obsahov týchto troch trojuholníkov je tiež $\frac{1}{4}$ obsahu trojuholníka *ABC*. Obsah šesťuholníka $C_1DA_1EB_1F$ je potom polovica obsahu trojuholníka *ABC*, čo znamená, že obsah trojuholníka *ABC* je dvakrát taký veľký ako obsah šesťuholníka.

4. Je daná kocka $ABCDA'B'C'D'$ s hranou dĺžky 3. Bod E leží na hrane DD', pričom platí $4|ED'| = |DD'|$ a bod *F* je priesečník uhlopriečok štvorca $DCC'D'$. Vypočítajte obsah lichobežníka, ktorý je prienikom roviny *AEF* a kocky.

Riešenie: Máme určiť obsah lichobežníka *AEGH*. Úsečky *HG* a AE sú priesečnice roviny *AEF* s rovnobežnými stenami kocky, teda sú rovnobežné. Platí, že

$$|ED'| = |CG|.$$

Trojuholníky *ADE* a *HCG* sú podobné, preto platí

$$|HC| : 3 = \frac{3}{4} : \frac{9}{4},$$

$$|HC| = 1.$$

Využitím Pytagorovej vety môžeme vypočítať všetky strany lichobežníka:

$$|AH| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13},$$

$$|EG| = \sqrt{3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{5},$$

$$|EA| = \frac{15}{4},$$

$$|HG| = \frac{5}{4}.$$

Veďme bodmi *H*, *G* výšky lichobežníka. Tieto pretínajú jeho základňu *AE* v bodoch *M*, *N*. Označme $x = |EM|$, $y = |AN|$ a výšku lichobežníka *v*.

Platí

$$x + y + |MN| = x + y + |HG| = |AE|,$$

odkiaľ máme, že platí

$$x + y = \frac{5}{2}.$$

Ďalej platí

$$x^2 + v^2 = |EG|^2, \qquad y^2 + v^2 = |AH|^2.$$

Po odčítaní týchto dvoch rovníc dostávame , že platí

$$y^2 - x^2 = |AH|^2 - |EG|^2 = \frac{7}{4}.$$

Úpravou dostávame, že platí

$$(y - x)(y + x) = \frac{7}{4}.$$

Dosadením $x + y = \frac{5}{2}$ a upravením dostávame, že

$$y - x = \frac{7}{10}.$$

Pomocou tejto rovnice vypočítame, že

$$x = \frac{9}{10}, \quad y = \frac{8}{5}, \quad v = \frac{3}{5}\sqrt{29}.$$

Aritmetický priemer dĺžok oboch základní lichobežníka sa rovná $\frac{5}{2}$, takže obsah lichobežníka je

$$S = \frac{3}{2}\sqrt{29} \doteq 8{,}078.$$

