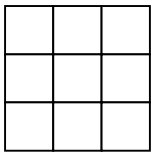
Riešenia úloh 2. série korešpondenčnej súťaže

1. Doplňte do tabuľky 3×3 navzájom rôzne prirodzené čísla tak, aby sa súčet čísel v každom riadku, stĺpci aj uhlopriečke rovnal 47.



Riešenie: Označme si čísla v tabuľke tak ako na obrázku. Pomocou neznámych a,b,c si vyjadríme ostatné premenné. Potom $x_1 = 47 - b - c$, lebo x_1, b, c sú v jednom riadku a súčet čísel v jednom riadku sa má rovnať 47. Odtiaľ potom ľahko dopočítame

$$x_5 = 47 - x_1 - a = 47 - (47 - b - c) - a = b + c - a .$$

b	x_1	c
x_2	a	x_3
x_4	x_5	x_6

Podobne vypočítame x_4 a x_6:

$$x_4 = 47 - a - c ,$$
$$x_6 = 47 - b - a .$$

Platí však aj to, že $x_4 + x_5 + x_6 = 47$. Dosadením za x_4, x_5 a x_6 dostávame, že platí

$$(47 - a - c) + (47 - b - a) + (b + c - a) = 47 ,$$

odkiaľ dostávame, že

$$3a = 47.$$

Avšak číslo 47 nie je deliteľné tromi, preto neexistuje také prirodzené číslo a, aby rovnosť platila. Úloha teda nemá riešenie.

2. Dvaja zo šiestich chlapcov ukradli jablká. Na otázku, kto to bol, dali takéto odpovede:

Harry: „Boli to Charlie a Georgie.“
James: „Boli to Donald a Tom.“
Donald: „Boli to Tom a Charlie.“
Charlie: „Boli to Donald a James.“
George: „Boli to Harry a Charlie.“

Tom odmietol vypovedať. Štyria uviedli jedného páchateľa správne, druhého zle, piaty udal oboch zle. Kto kradol?

Riešenie: Vieme, že jeden z chlapcov uviedol oboch páchateľov zle. Ak by bol týmto chlapcom Harry, znamenalo by to, že Charlie a Georgie to neboli. Ostatní chlapci uviedli jedného páchateľa dobre a jedného zle. Donald uviedol Toma a Charlieho. Keďže Charlieho uviedol Harry zle, musí byť Tom ten, ktorého uviedol dobre. Podobne z Georgeovej výpovede zistime, že v tomto prípade by bol druhým páchateľom Harry. Teda Donald a James sú už určite nevinní. Charlie však obvinil Donalda a Jamesa, ale on mal obviniť jedného správne, čo je spor s tým, že sú obaja nevinní. Preto táto možnosť nie je správna.

Ak by uviedol oboch páchateľov zle James, znamenalo by to, že Donald a Tom to neboli. Z Donaldovej výpovede potom vieme, že to bol Charlie a z Charlieho vý-

povede zase zistime, že druhým páchateľom bol James. Harry a George sú preto určite nevinní. Keď si pozrieme výpovede ostatných chlapcov, vidíme, že táto možnosť vyhovuje. Páchateľmi teda mohli byť Charlie a James.

Ak by uviedol oboch páchateľov zle Donald, znamenalo by to, že Charlie a Tom to neboli. Lenže vo výpovediach ostatných chlapcov boli s Charliem uvedení George aj Harry a s Tomom bol uvedený Donald. Aby platilo, že všetci okrem Donalda uviedli jedného zle a jedného dobre, museli by to byť George, Harry aj Donald a to už sú traja. Preto ani táto možnosť nevyhovuje.

Ak by uviedol oboch páchateľov zle Charlie, znamenalo by to, že Donald a James to neboli. Podľa Jamesovej výpovede to potom musel byť Tom. Donald uviedol Toma a Charlieho, takže Charlie musí byť nevinný, ale potom to podľa Harryho výpovede musí byť aj George a podľa Georgovej výpovede zase Harry. To je zase priveľa páchateľov.

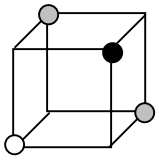
Posledná možnosť je možnosť, že uviedol oboch páchateľov zle George. To by znamenalo, že Harry a Charlie to neboli. Z výpovedí ostatných chlapcov podobne zistíme, že to musia byť Tom a George. Potom to Donald a James určite neboli. Ale Charlie uviedol práve ich dvoch. Takže ani táto možnosť nevyhovuje.

Z vyššie uvedeného vidíme, že jablká museli ukradnúť Charlie a James.

Komentár a bodovanie: Nájsť riešenie vám nerobilo problém. Problémom však bolo dokázať, že inak to byť nemôže. Nestačí len vypísať nejaké tabuľky bez komentára, ale je potrebné podrobne zdôvodniť vaše myšlienky.

3. Každý z bodov kocky s hranou dĺžky a zafarbíme práve jednou z troch farieb. Dokážte, že potom medzi týmito bodmi existujú dva rovnakej farby, ktorých vzdialenosť je väčšia ako $\frac{7}{5}a$.

Riešenie: Uvažujme štyri vyznačené vrcholy kocky. Tieto vrcholy nám vytvárajú pravidelný štvorsten, pretože každá jeho hrana je stenová uhlopriečka kocky. Jej dĺžka je $\sqrt{2}a$. Z Dirichletovho princípu vyplýva, že aspoň dva z nich sú zafarbené tou istou farbou. Keďže ľahko nahliadneme, že platí nerovnosť



$$\sqrt{2}a > \frac{7a}{5},$$

dostávame, že vzdialenosť týchto dvoch bodov rovnakej farby je väčšia ako $\frac{7}{5}a$.

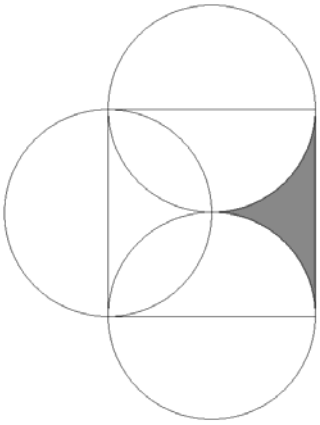
Komentár a bodovanie: Na správne riešenie ste prišli všetci. Najčastejšou chybou bolo, že ste upravovali nerovnosti bez toho, aby ste sa zmienili o tom, či robíte ekvivalentné úpravy.

4. Koľkými spôsobmi možno z úplného súboru domina (28 hracích kameňov) vybrať dva tak, aby sme ich mohli priložiť k sebe?

Riešenie: Vyberme prvý hrací kameň. V 7 prípadoch je typu XX a v 21 prípadoch typu XY, kde X a Y sú rôzne čísla od 0 po 6. V prvom prípade môžeme pridať už len 6 kociek zo siedmich, ktoré obsahujú X – X0, X1, X2, X3, X4, X5, X6 okrem XX. V druhom prípade je možností 12 – X0, X1, X2, X3, X4, X5, X6, Y0, Y1, Y2, Y3, Y4, Y5, Y6 okrem XY a YX. Avšak pri takomto rozdelení jednotlivých možností sme každú možnosť započítali práve dvakrát. Preto je počet všetkých možných výberov $(7 \cdot 6 + 21 \cdot 12) : 2 = 147$.

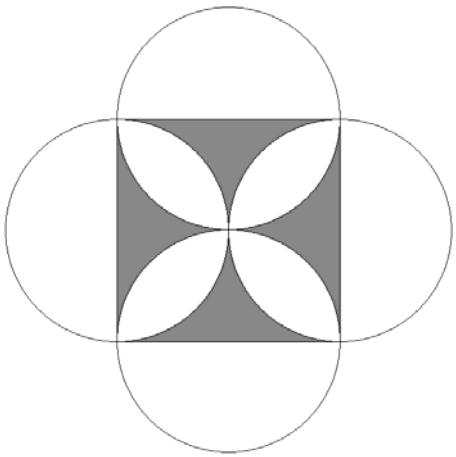
Komentár a bodovanie: Úloha sa dala riešiť viacerými spôsobmi – našlo sa aj niekoľko „drevorubačských" riešení, ktoré spočívali vo vypísaní všetkých možností. Avšak len jedno z nich bolo správne, keďže ostatní riešitelia zabudli na nejaké možnosti, resp. niektoré započítali viackrát.

5. Nájdite geometrické miesto všetkých bodov vnútri štvorca, z ktorých vidno jeho tri strany pod ostrým zorným uhlom. Aký je obsah útvaru, ktorý vytvárajú?



Riešenie: Na základe Talesovej vety vieme, že množina všetkých bodov, z ktorých vidno danú úsečku pod pravým uhlom, je kružnica zostrojená nad touto úsečkou bez krajných bodov úsečky. Pod ostrým uhlom budeme vidieť túto úsečku z vonkajšej oblasti tejto kružnice. Zvoľme si tri ľubovoľné strany štvorca. Potom množina všetkých bodov, z ktorých vidno tieto tri úsečky pod ostrým uhlom, je znázornená na obrázku. Zjednotením takýchto štyroch plôch dostávame situáciu na druhom obrázku (pretože sú štyri možnosti, ako vybrať 3 strany štvorca).

Obsah dvoch oproti stojacich vyznačených častí vypočítame napríklad tak, že od obsahu štvorca odčítame obsah kruhu s priemerom rovným dĺžke strany štvorca (dĺžku strany štvorca si označíme a):



$$S_1 = a^2 - \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \cdot \frac{4-\pi}{4}.$$

Celkový obsah vyznačenej plochy bude preto dvojnásobkom S_1:

$$S = 2S_1 = a^2 \cdot \frac{4-\pi}{2} = a^2 \cdot \left(2 - \frac{\pi}{2}\right).$$

Komentár a bodovanie: V svojich riešeniach ste skoro všetci našli útvar vyhovujúcich bodov. Problémy však nastali pri počítaní jeho obsahu – častokrát ste sa mýlili pri počítaní obsahu kruhu zostrojeného nad stranou štvorca.

6. Zistite, pre ktoré prirodzené čísla n možno rozdeliť množinu $\{1, 2, ..., n\}$ na dve skupiny tak, aby v prvej skupine bolo trikrát viac čísel ako v druhej, a aby súčty čísel v oboch skupinách boli rovnaké.

Riešenie: Aby sme mohli rozdeliť týchto n čísel na dve skupiny tak, aby v prvej skupine bolo trikrát viac čísel ako v druhej, musí byť n v tvare $4k$, kde k je prirodzené číslo. k-ticu čísel s najväčším súčtom tvorí k najväčších čísel. Ich súčet sa rovná

$$3k+1+3k+2+\ldots+4k=\frac{1}{2}k\cdot(7k+1)=3k^2+\frac{k(k+1)}{2}.$$

$3k$ čísel s minimálnym súčtom tvorí $3k$ najmenších čísel – $1, 2, \ldots, 3k$. Ich súčet sa rovná

$$1+2+\ldots+k+k+1+\ldots+2k+2k+1+\ldots+3k=\frac{1}{2}3k\cdot(3k+1),$$

čo je viac než $3k^2+\frac{k(k+1)}{2}$ pre každé prirodzené číslo k, pretože platí nerovnosť

$$\frac{1}{2}3k\cdot(3k+1)=3k^2+\frac{k(k+1)}{2}+k\cdot(k+1)>3k^2+\frac{k(k+1)}{2}.$$

Zistili sme teda, že $3k$-členná skupina s najmenším súčtom má vždy väčší súčet ako k-členná skupina s najväčším súčtom. Preto sa súčty prvkov v množinách zo zadania určite nikdy nebudú rovnať. Teda neexistuje také n, aby bolo možné rozdeliť množinu $\{1, 2, ..., n\}$ na dve skupiny tak, aby v prvej skupine bolo trikrát viac čísel ako v druhej, a aby súčty čísel v oboch skupinách boli rovnaké.

Komentár a bodovanie: Veľa z vás prišlo na myšlienku uvedenú v tomto riešení. Čo ste však neurobili dostatočne korektne, bola časť, v ktorej ste prehlásili, že z toho, že úloha v tomto špeciálnom prípade rozdelenia čísel nemá riešenie, vyplýva, že nebude mať riešenie ani pre iné rozdelenia čísel. Problém je v tom, že ste toto rozdelenie prehlásili za „optimálne“ bez zdôvodnenia.

7. Číslo tvaru $\frac{k(k+1)}{2}$, kde $k\in\mathbf{N}$, nazývame trojuholníkovým číslom. Nech $n\in\mathbf{N}$. Dokážte, že číslo $n!+1$ je druhou mocninou prirodzeného čísla práve vtedy, keď $\frac{n!}{8}$ je trojuholníkovým číslom.

Riešenie: Predpokladajme, že číslo $n!+1$ je druhou mocninou prirodzeného čísla. Potom $n>1$ (pretože pre $n=1$ číslo $1!+1=2$ nie je druhou mocninou prirodzeného čísla). Preto je $n!$ párne číslo a $n!+1$ nepárne prirodzené číslo. Potom z predpokladu dostávame, že existuje také prirodzené číslo *m*, že platí

$$n!+1=(2m+1)^2=4m^2+4m+1.$$

Z tohto vyjadrenia dostávame, že

$$\frac{n!}{8}=\frac{m(m+1)}{2},$$

teda $\frac{n!}{8}$ je trojuholníkovým číslom. Predpokladajme, že existuje $k\in\mathbf{N}$ také, že platí

$$\frac{k(k+1)}{2}=\frac{n!}{8}.$$

Upravením tejto rovnice dostaneme, že platí

$$n!+1=4k^2+4k+1=(2k+1)^2,$$

teda $n!+1$ je druhou mocninou prirodzeného čísla. Dokázali sme obe implikácie, preto tvrdenie zo zadania platí.

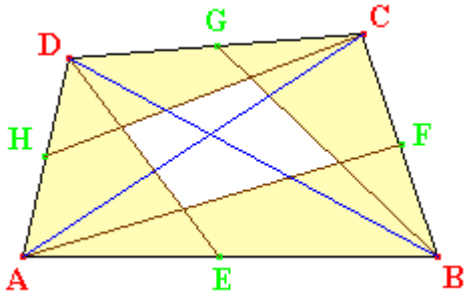
8. Daný je konvexný štvoruholník *ABCD* s obsahom 100 cm^2. Označme stredy strán *AB*, *BC*, *CD*, *DA* po rade *E*, *F*, *G*, *H*. Vypočítajte súčet obsahov trojuholníkov *ABF*, *BCG*, *CDH* a *ADE*.

Riešenie: Rozdeľme štvoruholník *ABCD* uhlopriečkou *AC* na dva trojuholníky. Vieme, že platí

$$S_{\Delta ABC}+S_{\Delta ADC}=S_{ABCD}.$$

Keďže *F* je stred *BC*, tak *AF* je ťažnica trojuholníka *ABC*, a teda

$$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ABF}+S_{\Delta AFC}=2S_{\Delta ABF}.$$



Podobne aj *HC* je ťažnicou trojuholníka *ACD*, a teda

$$S_{\Delta ADC}=S_{\Delta CDH}+S_{\Delta AHC}=2S_{\Delta CDH}.$$

Potom

$$S_{ABCD}=S_{\Delta ABC}+S_{\Delta ADC}=2S_{\Delta ABF}+2S_{\Delta CDH}$$

odkiaľ dostávame, že platí

$$S_{\Delta ABF}+S_{\Delta HDC}=\frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

Analogicky dokážeme, že platí

$$S_{\Delta GBC}+S_{\Delta EDA}=\frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

Potom platí

$$S_{\Delta ABF} + S_{\Delta HDC} + S_{\Delta GBC} + S_{\Delta EAD} = S_{ABCD},$$

čo sme chceli dokázať.

9. Aký najväčší počet bodov možno umiestniť na úsečke jednotkovej dĺžky tak, aby ľubovoľná úsečka dĺžky *d* obsahovala najviac $1+10d^2$ zo zvolených bodov?

Riešenie: Najdlhšia úsečka, na ktorej môžu byť dva body, má dĺžku $d = \sqrt{\frac{2-1}{10}} = \sqrt{\frac{1}{10}}$. Potom naozaj $1+10d^2 = 1+10\cdot\frac{1}{10} = 2$. Ak teda máme úsečku takejto dĺžky, môžu na nej byť až dva body, musia byť však v koncových bodoch tejto úsečky, inak by sa dala nájsť aj kratšia úsečka, ktorá by obsahovala tieto dva body, čo nie je možné. Takýchto úsečiek sa na úsečku jednotkovej dĺžky zmestí $\sqrt{\frac{1}{1/10}} = \sqrt{10} > 3$. Úsečky majú body vo svojich koncových bodoch, preto sa musia napájať tesne na seba. Inak by vzdialenosť medzi posledným bodom prvej a prvým bodom druhej bola menšia ako $\sqrt{\frac{1}{10}}$, alebo by sa nám tam nezmestili všetky 3 úsečky.

Keďže 3 úsečky majú 6 koncových bodov a dva začiatočné z nich musia byť totožné s dvoma koncovými z nich, máme umiestnené 4 body. Viac sa už určite nedá.

Ľahko overíme, že takto rozmiestnené body spĺňajú podmienku zo zadania. Najkratšia úsečka obsahujúca tri body má dĺžku $2\sqrt{0{,}1}$ a keď to dosadíme za *d*, dostaneme

$$1+10\cdot\left(2\sqrt{0{,}1}\right)^2 = 1+10\cdot 0{,}1\cdot 4 = 1+4 = 5 \geq 3,$$

a teda môže obsahovať 3 body. Podobne najkratšia úsečka obsahujúca 4 body má dĺžku $3\sqrt{0{,}1}$. Keď to dosadíme za *d*, zistíme, že môže obsahovať 4 body. Na úsečku teda môžeme za daných podmienok umiestniť najviac 4 body.

Komentár a bodovanie: Úloha patrila medzi náročnejšie, kládla nárok najmä na dôslednú argumentáciu. Často ste len prehlásili o nejakom rozdelení bodov, že je optimálne, a dokázali ste tvrdenie len pre také rozdelenie. Tým ste však zabudli na mnoho ďalších rozdelení, a teda nemohli ste získať veľa bodov.

10. Rozhodnite, či existujú funkcie *f* a *g* definované na celej množine reálnych čísel **R** tak, aby platilo $f(x)\cdot g(y)=2x+3y+1$ pre každé $x,y\in\mathbf{R}$.

Riešenie: Funkcia *g* je definovaná na celej množine reálnych čísel, teda aj v nule. Nech je hodnota $g(0)=a$. Potom ak

$$f(x)\cdot g(y)=2x+3y+1,$$

tak

$$f(x)\cdot a=2x+1,$$

teda funkcia je na celom jej definičnom obore v tvare

$$f(x)=\frac{2x+1}{a}=\frac{2}{a}x+\frac{1}{a}.$$

Preto je to lineárna funkcia *x*. Podobne ukážeme, že aj *g* je lineárna.

Nech $f(0)=b$ (vieme, že *f* je definovaná aj v nule). Potom

$$g(y)=\frac{3y+1}{b}=\frac{2}{b}y+\frac{1}{b}$$

je lineárna funkcia *y*. Nech teda

$$f(x)=cx+d,$$
$$g(y)=ey+f,$$

sú nejaké lineárne funkcie, pričom vieme, že $c\neq 0$, $e\neq 0$. Potom

$$2x+3y+1=f(x)\cdot g(y)=(cx+d)\cdot(ey+f)=cexy+fcx+dey+df.$$

Na ľavej strane sa vyskytuje člen obsahujúci *x* aj člen obsahujúci *y*. Preto *c* ani *d* nemôžu byť nulové. Taktiež vieme, že *ce* je tiež nenulové. Pravá strana potom nie je lineárnou funkciou *x* a *y*, pretože obsahuje aj zložku obsahujúcu *xy*. To ale neplatí pre $2x+3y+1$. Preto neexistujú funkcie *f* a *g* definované na celej množine reálnych čísel **R** tak, aby platilo, že $f(x)\cdot g(y)=2x+3y+1$ pre každé $x,y\in\mathbf{R}$.

Komentár a bodovanie: Úlohu ste vyriešili bez väčších problémov. Tie sa vyskytli len pri zdôvodňovaní toho, že lineárna funkcia nemôže obsahovať zmiešaný člen obsahujúci obe premenné.

11. Dokážte, že platí: $323\,\big|\,\left(20^{2004}+16^{2004}-3^{2004}-1\right)$.

Riešenie: Vieme, že $323=17\cdot 19$, preto treba dokázať, že 19 a súčasne 17 delí

$$20^{2004}+16^{2004}-3^{2004}-1.$$

Vieme, že platí

$$a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right).$$

Využitím tohto vzťahu dostávame, že platí

$$20^{2004}+16^{2004}-3^{2004}-1=20^{2004}-1^{2004}+16^{2004}-3^{2004}=$$
$$=(20-1)\cdot\left(20^{2003}+20^{2002}+\ldots+20+1\right)+$$
$$+(16-3)\cdot\left(16^{2003}+16^{2002}\cdot 3+\ldots+16\cdot 3^{2002}+3^{2003}\right)=$$
$$=19\cdot\left(20^{2003}+20^{2002}+\ldots+20+1\right)+$$
$$+13\cdot\left[16^{2002}\cdot(16+3)+16^{2000}\cdot(16+3)\ldots+3^{2002}\cdot(16+3)\right]=$$
$$=19\cdot\left(20^{2003}+20^{2002}+\ldots+20+1\right)+13\cdot 19\cdot\left(16^{2002}+16^{2000}+\ldots+3^{2002}\right)=$$
$$=19\cdot\left[\left(20^{2003}+20^{2002}+\ldots+20+1\right)+13\cdot\left(16^{2002}+16^{2000}+\ldots+3^{2002}\right)\right].$$

Podobne dostávame, že platí

$$20^{2004}+16^{2004}-3^{2004}-1=20^{2004}-3^{2004}+16^{2004}-1^{2004}=$$
$$=(20-3)\cdot\left(20^{2003}+20^{2002}\cdot 3+\ldots+20\cdot 3^{2002}+3^{2003}\right)+$$
$$+(16-1)\cdot\left(16^{2003}+16^{2002}+\ldots+16+1\right)=$$
$$=17\cdot\left(20^{2003}+20^{2002}\cdot 3+\ldots+20\cdot 3^{2002}+3^{2003}\right)+$$
$$+15\cdot\left[16^{2002}\cdot(16+1)+16^{2000}\cdot(16+1)+\ldots+16+1\right]=$$
$$=17\cdot\left(20^{2003}+20^{2002}\cdot 3+\ldots+20+3\right)+15\cdot 17\cdot\left(16^{2002}+16^{2000}+\ldots+1\right)=$$
$$=17\cdot\left[\left(20^{2003}+20^{2002}\cdot 3+\ldots+20+3\right)+15\cdot\left(16^{2002}+16^{2000}+\ldots+1\right)\right],$$

Preto je číslo $20^{2004}+16^{2004}-3^{2004}-1$ deliteľné 19 aj 17, teda je deliteľné aj 323.

Komentár a bodovanie: Opäť sa vyskytlo viacero rôznych riešení, najčastejšie z nich bolo práve uvedené.

12. Označme *R* najväčšie také číslo, že do každého konvexného mnohouholníka s obsahom *S* a obvodom *o* možno vpísať kruh s polomerom *R*. Nájdite hodnotu *R* alebo dokážte, že také číslo neexistuje.

Komentár: Túto úlohu nikto z vás nevyriešil úplne správne, preto ju ponechávame na riešenie do ďalšej série. Pre upresnenie zadania uvedieme, že vpísať kruh chápeme v takom zmysle, že existuje také umiestnenie kruhu a mnohouholníka v rovine, že vnútro kruhu je podmnožinou vnútra mnohouholníka.

13. Nech $f(x)=ax^2+bx+c$, $x\in\mathbf{R}$, pričom koeficienty $a,b,c\in\mathbf{R}$ sú také, že rovnica $f(x)=x$ nemá reálne korene. Dokážte, že ani rovnica $f(f(x))=x$ nemá reálne korene.

Riešenie: Keďže funkcia f je spojitá a rovnica $f(x)=x$ nemá riešenie, tak musí pre všetky x reálne platiť buď $f(x)<x$ alebo $f(x)>x$. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že platí $f(x)<x$. Potom platí aj

$$f(f(x))<f(x)<x,$$

a teda rovnica $f(f(x))=x$ nemá reálne korene.

Komentár a bodovanie: Úloha sa dala riešiť vo všeobecnosti pre spojité funkcie. Našli sa však aj také riešenia, ktoré sa úzko viazali na fakt, že ide o kvadratickú funkciu. Tie však boli oveľa dlhšie a neprehľadnejšie.

14. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú postupnosti prirodzených čísel. Dokážte, že existujú navzájom rôzne indexy p a q, pre ktoré súčasne platia nasledujúce nerovnosti:

$$a_p \geq a_q, \quad b_p \geq b_q, \quad c_p \geq c_q.$$

Riešenie: Uvažujme postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ prirodzených čísel. Táto určite obsahuje neklesajúcu podpostupnosť, pretože množina prirodzených čísel je ohraničená zdola. (Dôkaz využíva ten fakt, že ak by bola táto postupnosť ohraničená zhora, potom by mohla nadobúdať len konečne veľa hodnôt, a teda niektorá by sa vyskytovala nekonečne veľakrát. Tým pádom by sme mali určenú konštantnú podpostupnosť, a teda aj neklesajúcu.) Nech je tou neklesajúcou podpostupnosťou postupnosť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Uvažujme postupnosť $\{b_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Táto je podpostupnosťou postupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ a je taktiež postupnosťou prirodzených čísel. Z nej opäť vieme vybrať neklesajúcu podpostupnosť, ktorú si označíme $\{b_{n_{k_l}}\}_{l=1}^{\infty}$. Nakoniec uvažujme postupnosť $\{c_{n_{k_l}}\}_{l=1}^{\infty}$. Táto je podpostupnosťou postupnosti $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ a je taktiež postupnosťou prirodzených čísel. Z nej opäť vieme vybrať neklesajúcu podpostupnosť, ktorú si označíme $\{c_{n_{k_{l_m}}}\}_{m=1}^{\infty}$. Teraz už len stačí zvoliť $q=n_{1_{1_1}}$ a $p=n_{1_{1_2}}$. Na základe uvedenej konštrukcie platí

$$a_p \geq a_q, \quad b_p \geq b_q, \quad c_p \geq c_q.$$

Komentár a bodovanie: Úloha mala viacero možných riešení. Vyskytlo sa aj riešenie využívajúce preusporiadavanie nekonečných postupností, čo je úloha vcelku netriviálna a dokonca často aj nerealizovateľná... Ako problematickú si môžete predstaviť napr. postupnosť 1, 2, 1, 2, ... Ak by ste ju chceli usporiadať, tak na začiatku by bolo nekonečne veľa jednotiek a dvojky by začínali až niekde v „nekonečne“.