Celoštátne kolo súťaže SOŠ a SOU Praktická matematika
školský rok 2005/06

Kategórie K, L

1. V zápise delenia dvoch prirodzených čísel chýbajú niektoré cifry. Chýbajúce cifry nahraďte tak, aby bol zápis správny. Zápis je

$$12a76:23b=c2$$

Riešenie: V súčine $23b\cdot c2=12a76$ môže byť b 3 alebo 8. Delenie dvoch čísel prepíšeme na súčin:

a) Ak $b=3$, potom

$$c2\cdot 233=12a76$$
$$(10c+2)\cdot 233=12076+100a$$
$$2330c+466=12076+100a$$
$$233c=1161+10a$$

Potom $c=7$, lebo inak by $233c$ nekončilo na 1. Dosadením do poslednej rovnice dostávame, že platí

$$1631=1161+10a.$$

Potom by však malo platiť $a=47$, čo nie je možné, pretože a je cifra.

b) Ak $b=8$, potom

$$c2\cdot 238=12a76$$
$$(10c+2)\cdot 238=12076+100a$$
$$2380c+476=12076+100a$$
$$238c=1160+10a$$

Aby sa $238c$ končilo na 0, musí platiť $c=0$ alebo $c=5$. Avšak c ako prvá cifra čísla $c2$ musí byť nenulová. Preto $c=5$ a dopočítaním zistíme, že $a=3$.

Skúškou ľahko overíme, že platí $12376:238=52$.

2. Po celkovom výpadku elektrickej energie v danom regióne muselo 35 firiem znížiť jej spotrebu. Celkom boli tri skupiny firiem. V prvej skupine každá firma znížila spotrebu o 50 %, v druhej znížila každá firma spotrebu o $1/3$, v tretej o $1/4$ pravidelného odberu. Tým sa dosiahla úspora 40 % z celkovej pravidelnej spotreby. Pritom v prvej skupine bol počet firiem dvojnásobný ako v druhej, pričom pôvodne mala každá z 35 firiem rovnakú spotrebu. Koľko firiem bolo v jednotlivých skupinách?

Riešenie: Označme počet firiem v druhej skupine x a v tretej y. Potom bolo v prvej skupine $2x$ firiem. Potom musí platiť $2x+x+y=35$, teda $3x+y=35$. Ďalej

označme m spotrebu elektrickej energie, ktorú pôvodne odoberala každá z 35 firiem. Celková pôvodná spotreba v riadnej prevádzke bola $35m$. Údaje zapíšeme do tabuľky:

	1.skupina	2. skupina	3. skupina	Celkom
Pôvodná spotreba	$2xm$	xm	ym	$35m$
Znížená spotreba	$\frac{50}{100}\cdot 2xm$	$\frac{2}{3}\cdot xm$	$\frac{3}{4}\cdot xm$	$\frac{60}{100}\cdot 35m$

Preto musí platiť

$$xm + \frac{2}{3}\cdot xm + \frac{3}{4}\cdot ym = \frac{3}{5}\cdot 35m\ .$$

Keďže predpokladáme, že spotreba firiem je nenulová, musí platiť

$$20x + 9y = 252.$$

Dostávame tak sústavu dvoch rovníc s dvomi neznámymi x a y:

$$3x + y = 35,$$

$$20x + 9y = 252,$$

ktorú vyriešime. Jej riešením je $x = 9$ a $y = 8$. Potom dostávame, že v 1. skupine je 18, v druhej 9 a v tretej 8 firiem.

3. Adam a Boris išli trať dlhú 24 km „indiánskym behom“. Striedali chôdzu (stálou rýchlosťou 6 km/h) s behom (stálou rýchlosťou 18 km/h). Pritom Adam striedavo 1 km bežal a 1 km kráčal, kým Boris striedavo 5 minút bežal a 5 minút kráčal.

a) Ktorý z nich bol v cieli skôr? O koľko minút?
b) Aký náskok (v km) mal v cieli rýchlejší z nich?
c) Na stanici občerstvenia bol rýchlejší z nich o 20 minút skôr než druhý. Na ktorom kilometri bola stanica občerstvenia?

Riešenie:

a) Adam prešiel 1 km behom za 3'20" a 1 km chôdzou za 10'. Tri takéto cykly, t. j. 6 km, prejde za 40'. Preto celú trať prejde za 4-krát 40', t. j. za 2 hodiny a 40 minút. Boris za 5' prebehne 1,5 km a za 5' chôdze 0,5 km. Teda za 10' prejde 2 km a celú trať prejde za 12-krát 10', t. j. za 2 hodiny.

b) Keď je Boris v cieli, Adam bude potrebovať ešte 40' na to, aby došiel do cieľa. Za ten čas prejde práve 6 km. Teda Boris prišiel do cieľa s náskokom 6 km.

c) Zostrojíme graf. Stanica občerstvenia mohla byť kdekoľvek medzi kilometrami 11,5 a 13.

4. Je daný pravidelný šesťuholník *ABCDEF* s dĺžkou strany 2. Zostrojíme tri kružnice so stredmi v bodoch *A*, *B*, *C* tak, aby sa navzájom zvonku dotýkali. Vypočítajte polomer najmenšej kružnice.

Riešenie: Označme si kružnicu so stredom v bode *B* k_1 a kružnice so stredmi v bodoch *A* a *C* k_2 a k_3. Kružnice k_2 a k_3 majú rovnaký polomer, preto ich dotykový bod leží na priamke *BE* – je to priesečník úsečiek *AC* a *BE*. Označme tento bod *Z*. Spoločný dotykový bod k_1 a k_2 označme *X*. Stred šesťuholníka označme *S*. Keďže *AZ* je výška rovnostranného trojuholníka *BSA*, platí $|AZ| = \frac{\sqrt{3}}{2}.\,2 = \sqrt{3}$. Taktiež vieme, že platí $|AZ| = |AX|$. Preto pre polomer kružnice k_1 dostávame, že platí $|BX| = 2 - \sqrt{3}$.

Kategórie M, N

1. Nájdite všetky riešenia sústavy rovníc v obore celých čísel

$$x + y + z = 2$$

$$2xy - z^2 = 4$$

Riešenie: Vyjadrením neznámej *z* z prvej rovnice a jej dosadením do druhej dostaneme, že platí

$$2xy - (2 - x - y)^2 = 4,$$

čo môžeme upraviť na tvar

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 0.$$

Z toho dostávame, že $x = y = 2$ a dopočítaním *z* dostávame $z = -2$.

2. Dve autá vyšli súčasne rovnakým smerom z miesta *A* o 13.00. Prvé išlo rýchlosťou 50 km/h, druhé rýchlosťou 40 km/h. O 13.30 vyšlo z miesta *A* tretie auto, ktoré predbehlo prvé auto o jeden a pol hodiny neskôr ako druhé auto. Určte rýchlosť tretieho auta.

Riešenie: Označme *v* rýchlosť tretieho auta. Prvé auto prešlo za pol hodiny 25 km, druhé 20 km. Označme t_1, t_2 čas pohybu prvého a druhého auta a *x*, resp. *y* vzdialenosť od miesta *A*, kde predbehlo tretie auto prvé, resp. druhé auto.

Potom môžeme pre tretie a prvé auto zostaviť dve rovnice:

$$25 + x = v(t_1 - 0{,}5),$$

$$25 + x = 50t_1,$$

odkiaľ dostaneme

$$50t_1 = v(t_1 - 0{,}5). \qquad (1)$$

Pre tretie a druhé auto môžeme tiež zostaviť rovnicu:

$$20 + y = v(t_2 - 0{,}5),$$
$$20 + y = 40t_2,$$

odkiaľ dostaneme

$$40t_2 = v(t_2 - 0{,}5). \qquad (2)$$

Zároveň platí

$$t_1 = t_2 + 1{,}5. \qquad (3)$$

Po dosadení (3) do (1) dostávame

$$50(t_2 + 1{,}5) = v(t_2 + 1) \qquad (4)$$

Po úpravách (4) a (2) dostaneme

$$\frac{50}{v} = \frac{t_2 + 1}{t_2 + 1{,}5}, \qquad \frac{40}{v} = \frac{t_2 - 0{,}5}{t_2}.$$

Po vydelení rovníc máme

$$\frac{5}{4} = \frac{t_2(t_2 + 1)}{(t_2 + 1{,}5)(t_2 - 0{,}5)},$$

odkiaľ t_2 = 1,5 h, t_1 = 3 h. Potom rýchlosť v tretieho auta je 60 km/h.

3. Ak súčet dĺžok dvoch strán trojuholníka vynásobíme dĺžkou tretej strany, dostaneme výsledok 96. Ak túto operáciu urobíme aj pri ostatných dvoch spôsoboch výberu prvej a druhej strany, dostaneme výsledky 91 a 75. Určte obvod trojuholníka.

Riešenie: Ak si označíme strany trojuholníka štandardne, dostávame, že platí

$$ca + bc = 96,$$
$$bc + ba = 91,$$
$$ac + ba = 75.$$

Ak od prvej rovnice odpočítame druhú aj tretiu rovnicu, dostaneme, že $2ab = 70$, čiže $ab = 35$. Podobne $ac = 40$, $bc = 56$. Vynásobením rovníc dostaneme

$$a^2b^2c^2 = 784000,$$

teda $abc = 280$. Keďže $ab = 35$, tak $c = 280/35 = 8$. Podobne dostaneme, že $a = 5$ a $b = 7$. Obvod trojuholníka je potom $5 + 7 + 8 = 20$.

4. Body N a M ležia na polkružnici zostrojenej nad priemerom AB dĺžky 1 tak, že body $ABNM$ tvoria lichobežník, do ktorého sa dá vpísať kružnica. Určte dĺžky ramien lichobežníka.

Riešenie: Ak je lichobežník $ABNM$ (pozri obrázok) tetivový, je symetrický podľa osi úsečky AB. Potom je aj rovnoramenný: $|AM| = |BN|$. Pre dĺžky úsečiek LN, KQ a NR

platí: $|LN| = |KQ| = |NR| = x$, pretože strany *LN* a *NR* obdĺžnika *KQNL* sú dve dotykové úsečky z bodu *N* ku kružnici *k*. Ak využijeme Pytagorovu vetu pre trojuholníky *KQN* a *BQN*, dostaneme:

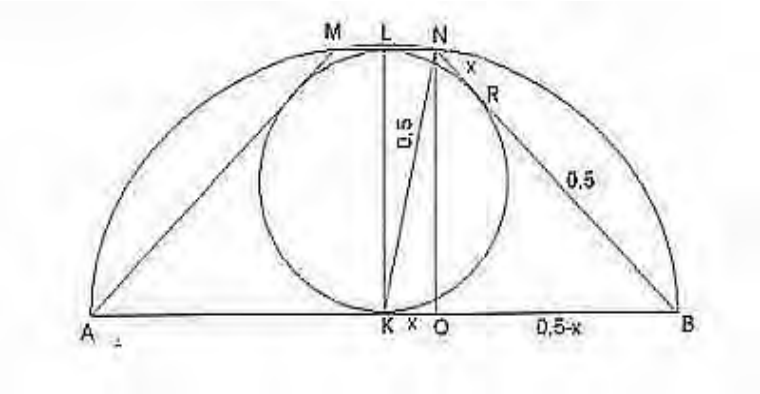
$$\Delta KQN: \quad |NQ|^2 = 0{,}5^2 - x^2,$$

$$\Delta BQN: \quad |NQ|^2 = (0{,}5 + x)^2 - (0{,}5 - x)^2.$$

Z rovnosti ľavých strán dostaneme kvadratickú rovnicu pre x, ktorej jediný kladný koreň je $x = \frac{\sqrt{5} - 2}{2}$.

Ramená *BN* a *AM* majú potom dĺžku

$$|BN| = |AM| = 0{,}5 + x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$



Výsledkové listiny celoštátneho kola súťaže Praktická matematika

Kategória K

Por.	Meno	Škola	1	2	3	4	Súčet
1.	Jakub Kucharovič	ZSŠ elektrotechnická, Stará Turá	5	5	5	5	20
2.	Stanislav Pivko	SOU Komárno	5	5	3	5	18
3.	Martin Hatňančík	SOU Považská Bystrica	5	5	2	0	12

Kategória L

Por.	Meno	Škola	1	2	3	4	Súčet
1.	Jakub Juhas	SPŠE Bratislava, K. Adlera 5	5	5	5	5	20
	Jaroslav Slovák	SPŠ Myjava	5	5	5	5	20
	Jakub Štetina	SPŠ Myjava	5	5	5	5	20
	Ľuboš Vančo	SPŠ dopravná Trnava	5	5	5	5	20
5.	Lukáš antala	Spojená škola Bánovce n/Bebravou	5	4	5	5	19
	Július Bílik	SPŠ Myjava	5	5	4	5	19
	Ondrej Izák	SPŠ stroj. Bratislava, Fajn.nábr.	5	5	5	4	19
	Marek Janok	Obchodná akadémia Štúrovo	5	4	5	5	19
9.	Enikö Eššeková	SPŠ stavebná Hurbanovo	5	5	5	3	18
	Peter Maliarik	SPŠ stavebná Trnava	5	5	3	5	18
	Matúš Nerad	SPŠE Bratislava, K. Adlera 5	3	5	5	5	18
12.	Róbert Fekete	SPŠ stavebná Hurbanovo	5	2	5	5	17
	Peter Mikolai	Obchodná akadémia Veľký Meder	5	4	3	5	17
14.	Marián Tibenský	ZSPŠ Trnava	0	5	5	5	15

Kategória M

Por.	Meno	Škola	1	2	3	4	Súčet
1.	Marián Kulla	SOU strojárske Považská Bystrica	5	5	5	3	18
2.	Milan Lašák	ZSPŠ Stará Turá	5	5	5	1	16
3.	Tomáš Foltinovič	SOU chemické Šaľa	5	5	5	0	15
4.	Jaroslav Hanko	SOU chemické Šaľa	0	5	0	1	6

Kategória N

Por.	Meno	Škola	1	2	3	4	Súčet
1.	Lucie Mandíková	Obchodná akadémia Senica	5	5	5	3	18
2.	Andrej Jursa	SPŠ stroj. Bratislava, Fajn.nábr.	5	5	5	1	16
3.	Peter Cséri	Spojená škola Nové Zámky	5	5	5	0	15
	Soňa Madarászová	OA Bratislava, Račianska ul.	5	5	5	0	15
	Tomáš Pavlíček	SPŠE Piešťany	5	5	5	0	15
	Martin Neštický	ZSPŠ Trnava	5	5	5	0	15
7.	Ľudmila Pašková	SSOŠ Humanus Via Holíč	3	3	5	2	13
8.	Dávid Benčík	SPŠ Komárno	5	2	5	0	12
9.	Ján Motko	Obchodná akadémia Levice	3	0	0	0	3