Riešenia úloh 3. série korešpondenčnej súťaže

1. Nájdite najmenšie prirodzené číslo n také, že $\sqrt{4n-2}$ je prirodzené číslo.

Riešenie: Keďže číslo $4n-2$ je párne, tak ak je $\sqrt{4n-2}$ prirodzené číslo, potom je párne, teda existuje také prirodzené číslo k, že platí $\sqrt{4n-2}=2k$, odkiaľ dostávame, že $4n-2=4k^2$, čo však pre prirodzené čísla k a n nemôže platiť, pretože číslo 2 nie je deliteľné číslom 4. Preto hľadané prirodzené číslo neexistuje.

2. Každé z čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sa rovná 0, 1 alebo -2. Navyše platí

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -5,$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 19.$$

Určte hodnotu $x_1^5 + x_2^5 + \ldots + x_n^5$.

Riešenie: Najprv si uvedomme, že ak sa niektoré z čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rovná 0, tak to nemá vplyv na hodnotu súčtu $x_1^5 + x_2^5 + \ldots + x_n^5$. Zaoberajme sa preto len nenulovými číslami. Ak sa nejaké číslo rovná 1 alebo -2, potom sa jeho druhá mocnina rovná 1 alebo 4. Označme a počet výskytov 1 a b počet výskytov -2 medzi číslami $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Potom z prvej a druhej rovnice zo zadania dostávame, že platí

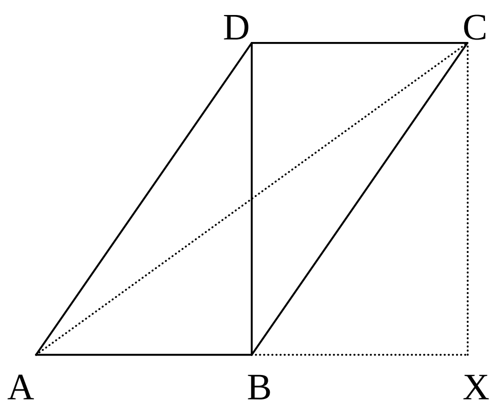
$$a - 2b = -5,$$
$$a + 4b = 19.$$

Vyriešením tejto sústavy dostaneme, že $a = 3$, $b = 4$. Potom

$$x_1^5 + x_2^5 + \ldots + x_n^5 = 3 \cdot 1^5 + 4 \cdot (-2)^5 = -125.$$

3. V štvoruholníku *ABCD*, ktorého obsah je 2, platí $|AB| + |BD| + |CD| = 4$. Určte dĺžku úsečky AC.

Riešenie: Pre obsah trojuholníka *ABC* platí, že



$$S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2}|AB||BD|\sin|\angle ABD| \le \frac{1}{2}|AB||BD|.$$

Podobne platí pre trojuholník *BCD*

$$S_{\Delta CBD} = \frac{1}{2}|CD||DB|\sin|\angle CDB| \le \frac{1}{2}|CD||DB|.$$

Súčet obsahov trojuholníkov *ABC* a *BCD* sa rovná

$$S_{\Delta ABD} + S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2}|BD|\left(|AB| + |CD|\right).$$

Potom na základe AG nerovnosti platí

$$S_{\Delta ABD} + S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2}|BD|\left(|AB| + |CD|\right) \le \frac{1}{2}\left(\frac{|AB| + |BD| + |CD|}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2.$$

Keďže platí

$$2 = S_{ABCD} \le S_{\Delta ABD} + S_{\Delta BCD} \le 2,$$

musí v každej z vyššie uvedených nerovností nastať rovnosť. Znamená to, že trojuholníky *ABD* a *BCD* sú pravouhlé s pravým uhlom pri vrchole *B*, resp. *D*, a platí

$$|BD| = |AB| + |CD|.$$

Potom

$$|BD| = |AB| + |CD| = 2.$$

Ak spustíme z bodu *C* výšku na priamku *AB* a jej pätu označíme *X*, tak z Pytagorovej vety v trojuholníku *ACX* dostávame, že platí

$$|AC| = \sqrt{|AX|^2 + |CX|^2} = \sqrt{\left(|AB| + |CD|\right)^2 + |BD|^2} = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}.$$

Hľadaná dĺžka úsečky *AC* je preto $2\sqrt{2}$.

4. Čísla strán knihy sú 1, 2, ... Ak sčítame všetky tieto čísla strán, ale jedno z nich započítame dvakrát, dostaneme 2006. Ktoré číslo sme započítali dvakrát a koľko strán má kniha?

Riešenie: Označme si počet strán knihy *n*. Potom sa súčet čísel strán rovná

$$1+2+\ldots+n+k\,,$$

kde k označuje číslo strany, ktorá bola započítaná dvakrát. Vieme, že platí $1 \le k \le n$. Potom musí platiť

$$1+2+\ldots+n+k=2006\,.$$

Upravením dostaneme, že platí

$$\frac{n\cdot(n+1)}{2}+k=2006\,.$$

Pre ľavú stranu tejto rovnice máme horné aj dolné ohraničenie z ohraničenia pre *k*:

$$\frac{n^2}{2}<\frac{n\cdot(n+1)}{2}+1\le\frac{n\cdot(n+1)}{2}+k\le\frac{n\cdot(n+3)}{2}<\frac{(n+2)^2}{2}\,.$$

Dostávame, že má platiť

$$\frac{n^2}{2}<2006<\frac{(n+2)^2}{2}\,.$$

Z týchto dvoch nerovností dostávame, že musí platiť

$$n<63{,}34<n+2\,.$$

Dve možné hodnoty *n* sú preto 62 a 63. Dosadením týchto hodnôt do rovnice

$$\frac{n\cdot(n+1)}{2}+k=2006$$

dostávame pre k hodnoty 53 a -10. Zrejme hodnota -10 nevyhovuje, a preto riešením úlohy je, že kniha má 62 strán a dvakrát sme započítali číslo 53.

5. Nájdite všetky riešenia rovnice

$$x+\frac{96}{x}=\lceil x\rceil+\frac{96}{\lceil x\rceil}\,,$$

kde $\lceil x\rceil$ označuje hornú celú časť *x*, teda také celé číslo, pre ktoré platí $x\le\lceil x\rceil<x+1$.

Riešenie: Prenásobením rovnice zo zadania výrazom $x\cdot\lceil x\rceil$ dostávame, že platí

$$x^2\cdot\lceil x\rceil+96\cdot\lceil x\rceil=x\cdot\lceil x\rceil^2+96\cdot x\,.$$

Upravením tejto rovnice dostávame, že platí

$$\left(x\cdot\lceil x\rceil-96\right)\cdot\left(x-\lceil x\rceil\right)=0\,.$$

Prvá možnosť je, že $x=\lceil x\rceil$. Táto možnosť nastane len vtedy, keď je *x* celé číslo. Vzhľadom na to, že *x* sa vyskytuje v zadaní v menovateli zlomku, nesmie sa rovnať 0. Ak nie je *x* celé číslo, musí platiť

$$x\cdot\lceil x\rceil=96\,.$$

Keďže $x \le \lceil x \rceil$, tak $x^2 \le 96$ a $\lceil x \rceil^2 \ge 96$. Z poslednej nerovnosti dostávame, že $\lceil x \rceil \ge 10$, čo vzhľadom na podmienku $x^2 \le 96$ vedie k tomu, že $\lceil x \rceil = 10$. Keďže $x \cdot \lceil x \rceil = 96$, dosadením $\lceil x \rceil = 10$ dostávame, že $x = 9{,}6$. Riešením úlohy je teda každé nenulové celé číslo a číslo $9{,}6$.

Komentár a bodovanie: V tomto príklade sa ukázalo, že je dôležité prečítať si zadanie príkladu, pretože viacerí z vás riešili úlohu pre dolnú celú časť. Častou chybou bolo taktiež to, že ste zabudli na to, že *x* sa nemôže rovnať 0.

6. Nech *O* je taký bod vnútri rovnobežníka *ABCD*, pre ktorý platí

$$|\angle AOB| + |\angle COD| = 180^\circ .$$

Dokážte, že $|\angle OBC| = |\angle ODC|$.

Riešenie: Posuňme rovnobežník *ABCD* o vektor $\overrightarrow{AD}$. Bod *A* sa zobrazí do bodu *D*, bod *B* do bodu *C* a bod *O* do bodu O'. Keďže platí

$$|\angle COD| + |\angle CO'D| = |\angle COD| + |\angle BOD| = 180^\circ ,$$

štvoruholník $CO'DO$ je tetivový, a teda je mu možné opísať kružnicu. Potom platí

$$|\angle ODC| = |\angle OO'C| .$$

Platí taktiež, že $|BC| = |OO'|$ a $BC \parallel OO'$. Preto je $BCO'O$ rovnobežník. Jeho protiľahlé uhly sú zhodné, preto platí

$$|\angle OO'C| = |\angle OBC| .$$

Spolu s vyššie uvedeným výsledkom tak dostávame, že platí

$$|\angle ODC| = |\angle OO'C| = |\angle OBC| ,$$

čo sme mali dokázať.

7. Uvažujme abecedu, ktorá obsahuje len tri rôzne písmená *a*, *b*, *c*. Nájdite počet takých slov obsahujúcich práve *n* písmen, ktoré obsahujú párny počet písmen *a*.

Riešenie: Predpokladajme, že sa v slove nachádza $2k$ písmen *a*, kde *k* je nezáporné celé číslo. Tieto písmená môžeme umiestniť na $\binom{n}{2k}$ miest a ostatné miesta môžeme zaplniť 2^{n-2k} možnosťami (na každé z $n-2k$ zvyšných miest môžeme umiestniť buď písmeno *b* alebo písmeno *c*, teda máme dve možnosti pre každú pozíciu). Preto sa hľadaný počet slov rovná

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} \cdot 2^{n-2k} ,$$

kde $\lfloor x \rfloor$ označuje dolnú celú časť čísla *x*. Tento vzorec ešte upravíme. Využijeme pritom fakt, že platí

$$(1+x)^n + (1-x)^n = 2 \cdot \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} \cdot x^{2k}.$$

Ak zvolíme $x = \frac{1}{2}$, dostaneme, že platí

$$2^n \cdot \left(\left(1+\frac{1}{2}\right)^n + \left(1-\frac{1}{2}\right)^n \right) = 2 \cdot \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} \cdot 2^{n-2k},$$

odkiaľ dostávame, že platí

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} \cdot 2^{n-2k} = \frac{1}{2} \cdot \left(3^n + 1\right).$$

Komentár: K vyjadreniu počtu možností pomocou sumy došla väčšina z vás. Avšak ďalej ste sa už neunúvali počítať. Problém pri uvedení výsledku pomocou sumy je v tom, že pre veľmi veľké *n* by bolo potrebné spočítavať veľké množstvo výrazov. Preto sa snažte výsledky vždy udávať v takom tvare, v ktorom vystupujú len premenné zo zadania úlohy.

8. Nájdite najmenšie prirodzené číslo *K* také, že každá *K*-prvková podmnožina množiny $\{1, 2, \ldots, 50\}$ obsahuje dva rôzne prvky *a*, *b* také, že $a+b$ delí ab.

Riešenie: Nech *K* je hľadané najmenšie prirodzené číslo s vlastnosťou zo zadania. Označme *S* ľubovoľnú *K*-prvkovú podmnožinu množiny $\{1, 2, \ldots, 50\}$. Predpokladajme, že $a, b \in S$ sú také, že $a+b$ delí ab. Označme *c* najväčší spoločný deliteľ čísel *a*, *b*. Položme $a = ca_1$, $b = cb_1$. Potom a_1, b_1 sú nesúdeliteľné čísla. Potom $c \cdot (a_1 + b_1)$ delí $c^2 a_1 b_1$, teda $a_1 + b_1$ delí $ca_1 b_1$. Keďže a_1, b_1 sú nesúdeliteľné čísla, tak sú aj čísla a_1 a $a_1 + b_1$, b_1 a $a_1 + b_1$ nesúdeliteľné. Preto $a_1 + b_1$ delí *c*. Keďže $S \subseteq \{1, 2, \ldots, 50\}$, tak $a + b \le 99$. Preto $c \cdot (a_1 + b_1) \le 99$ a keďže $a_1 + b_1$ delí *c*, tak platí, že $a_1 + b_1 \le 9$. Na druhej strane však určite platí $a_1 + b_1 \ge 3$. Rozobraním všetkých možností nájdeme 23 dvojíc *a* a *b* s požadovanou vlastnosťou:

$a_1 + b_1 = 3$: $(6,3)$, $(12,6)$, $(18,9)$, $(24,12)$, $(30,15)$, $(36,18)$, $(42,21)$, $(48,24)$

$a_1 + b_1 = 4$: $(12,4)$, $(24,8)$, $(36,12)$, $(48,16)$

$a_1 + b_1 = 5$: $(20,5)$, $(40,10)$, $(15,10)$, $(30,20)$, $(45,30)$

$a_1 + b_1 = 6$: $(30,6)$

$a_1 + b_1 = 7$: $(42,7)$, $(35,14)$, $(28,21)$

$a_1 + b_1 = 8$: $(40,24)$

$a_1 + b_1 = 9$: $(45,36)$

Označme $M = \{6,12,15,18,20,21,24,35,40,42,45,48\}$ a $T = \{1,2,\dots,50\} - M$. Keďže každá dvojica z vyššie uvedených obsahuje aspoň jeden prvok M, množina T nemá požadovanú vlastnosť. Preto musí platiť $K \geq |T| + 1 = 39$. Na druhej strane z vyššie uvedených 23 dvojíc vieme vybrať 12, ktoré sú navzájom disjunktné: $(6,3)$, $(12,4)$, $(20,5)$, $(42,7)$, $(24,8)$, $(18,9)$, $(40,10)$, $(35,14)$, $(30,15)$, $(48,16)$, $(28,21)$, $(45,36)$. Každá 39-prvková podmnožina množiny $\{1,2,\dots,50\}$ musí obsahovať oba prvky aspoň jednej dvojice. Preto je najmenšie hľadané číslo $K = 39$.

Komentár a bodovanie: Vo svojich riešeniach ste často zabúdali na niektoré dvojice alebo ste mali niektoré navyše, a tak ste dostávali iné hodnoty čísla *K*.

9. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $n \geq 3$ existujú také nepárne prirodzené čísla x_n, y_n, že platí $7x_n^2 + y_n^2 = 2^n$.

Riešenie: Pre $n = 3$ máme $x_3 = y_3 = 1$. Ďalej predpokladajme, že pre dané prirodzené číslo *n* máme nájdené nepárne prirodzené čísla x_n, y_n také, že $7x_n^2 + y_n^2 = 2^n$. Potom platí

$$7 \cdot \left(\frac{x_n \pm y_n}{2} \right)^2 + \left(\frac{7x_n \mp y_n}{2} \right)^2 = 2 \cdot \left(7x_n^2 + y_n^2 \right) = 2^{n+1}.$$

Jedno z čísel $\frac{x_n + y_n}{2}$, $\frac{|x_n - y_n|}{2}$ je určite nepárne. Potom bude nepárne aj $\frac{|7x_n - y_n|}{2}$, resp. $\frac{7x_n + y_n}{2}$. Tým sme našli vyhovujúce x_{n+1} a y_{n+1}, čím sme tvrdenie úlohy dokázali.

Komentár a bodovanie: Úlohu nevyriešil nikto z vás, aj keď zadanie úlohy poskytovalo veľa možností riešenia.

10. Nech $x > 1$ je reálne číslo, ktoré nie je prirodzeným číslom. Pre $n \in \mathbf{N}$ definujeme $a_n = \lfloor x^{n+1} \rfloor - x \lfloor x^n \rfloor$. Dokážte, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nie je periodická.

Riešenie: Dôkaz urobíme sporom. Predpokladajme, že existuje $p > 0$ také, že $a_{n+p} = a_n$ pre každé *n*. Keďže $\lfloor x^n \rfloor \to \infty$ pre $n \to \infty$, musí pre nejaké *n* platiť $\lfloor x^{n+p} \rfloor - \lfloor x^n \rfloor > 0$. Riešením rovnice $a_{n+p} = a_n$ dostaneme, že

$$x = \frac{\lfloor x^{n+p+1} \rfloor - \lfloor x^{n+1} \rfloor}{\lfloor x^{n+p} \rfloor - \lfloor x^{n} \rfloor},$$

teda *x* je racionálne číslo. Položme $y = x^p$ a

$$b_m = \sum_{k=0}^{p-1} x^{p-k-1} a_{mp+k} = \lfloor x^{mp+p} \rfloor - x^p \lfloor x^{mp} \rfloor = \lfloor y^{m+1} \rfloor - y \lfloor y^m \rfloor.$$

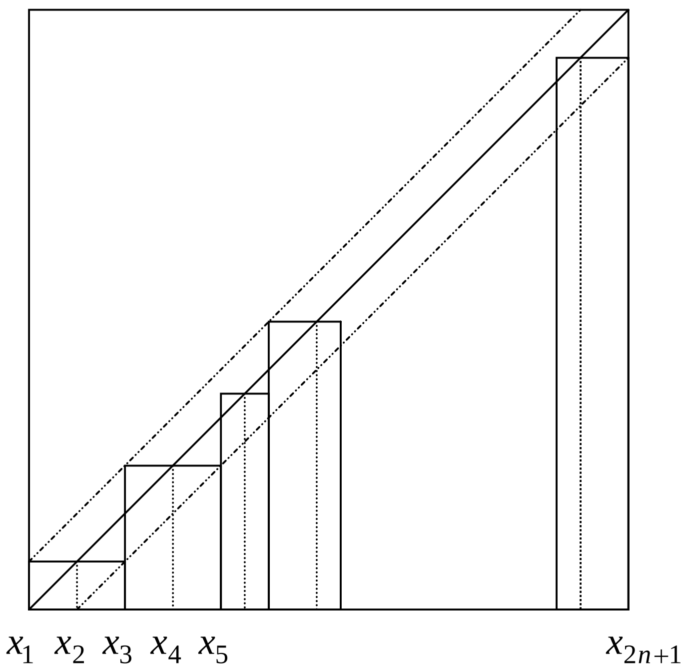
Keďže $a_{n+p} = a_n$, musí platiť aj $b_{m+1} = b_m$, a tak je aj *y* racionálne číslo, ktoré nie je prirodzené. Položme $c_m = \lfloor y^{m+1} - y^m \rfloor$. Potom $c_{m+1} = yc_m = y^m c_1$. Potom ale c_m nemôže byť prirodzené číslo pre dostatočne veľké *m*, čo je spor s predpokladom. Preto postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nie je periodická.

Komentár a bodovanie: Úlohu taktiež nikto z vás nevyriešil úplne. To, že *x* je racionálne číslo, sa vám zvyčajne podarilo dokázať, problémy však vznikali pri dokazovaní nenulovosti menovateľa príslušného zlomku.

11. Sú dané reálne čísla $0 = x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n} < x_{2n+1} = 1$, pričom platí $|x_{i+1} - x_i| \le h$ pre $1 \le i \le 2n$. Dokážte, že potom platí nerovnosť

$$\frac{1-h}{2} < \sum_{i=1}^{n} x_{2i} \cdot (x_{2i+1} - x_{2i-1}) < \frac{1+h}{2}.$$

Riešenie: Pri riešení tohto príkladu veľmi pomôže nakresliť si správny obrázok. Člen $x_{2i} \cdot (x_{2i+1} - x_{2i-1})$ môžeme reprezentovať ako obsah obdĺžnika so stranami dĺžky x_{2i} a $x_{2i+1} - x_{2i-1}$. Vidíme, že celkový obsah týchto obdĺžnikov bude blízky polovici obsahu štvorca so stranou 1. Celkový obsah však bude ležať medzi zvýraznenými čiarkovanými čiarami. Obsah trojuholníkov nad (a samozrejme aj pod) uhlopriečkou štvorca je menej než (ostrá nerovnosť nastáva kvôli ostrej nerovnosti medzi x_i v zadaní)



$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \cdot (x_{2i} - x_{2i-1}) \cdot (x_{2i} - x_{2i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \cdot h \cdot (x_{2i} - x_{2i-1}) < \frac{h}{2}.$$

To sme ale práve chceli dokázať, pretože z tohto dostávame, že platí

$$\frac{1}{2}-\frac{h}{2}<\sum_{i=1}^{n} x_{2i}\cdot\left(x_{2i+1}-x_{2i-1}\right)<\frac{1}{2}+\frac{h}{2}.$$

12. Dokážte, že pre každú dvojicu m, k prirodzených čísel existuje jednoznačné vyjadrenie m v tvare

$$m=\binom{a_k}{k}+\binom{a_{k-1}}{k-1}+\cdots+\binom{a_t}{t},$$

pričom $a_k > a_{k-1} > \ldots > a_t \geq t \geq 1$.

Riešenie: Najprv ukážeme jednoznačnosť. Predpokladajme, že m sa dá vyjadriť pomocou dvoch postupností $a_k, a_{k-1}, \ldots, a_t$ a $b_k, b_{k-1}, \ldots, b_u$. Nájdime prvú pozíciu, v ktorej sa tieto dve postupnosti líšia. Bez ujmy na všeobecnosti nech je táto pozícia k a nech platí $a_k > b_k$. Potom platí

$$m\leq\binom{b_k}{k}+\binom{b_k-1}{k-1}+\cdots+\binom{k_k-k+1}{1}<\binom{b_k+1}{k}\leq m,$$

čo je spor.

Existenciu dokážeme pomocou „pažravého“ algoritmu: Nájdime najväčšie číslo a_k také, že $\binom{a_k}{k}\leq m$ a aplikujme tento istý algoritmus, pričom m a k nahradíme číslami $m-\binom{a_k}{k}$ a $k-1$. Vzhľadom na to, že $m<\binom{a_k+1}{k}$, platí $m-\binom{a_k}{k}<\binom{a_k}{k-1}$. Preto je takto získaná postupnosť klesajúca, a teda algoritmus skončí po konečnom počte krokov. Tým sme dokázali aj existenciu hľadaného vyjadrenia.

13. Nech $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ je taká funkcia, že pre všetky $x, y\in\mathbf{R}$ platí

$$f\left(x^3+y^3\right)=(x+y)\left(f(x)^2-f(x)f(y)+f(y)^2\right).$$

Dokážte, že potom pre všetky $x\in\mathbf{R}$ platí $f(2006x)=2006f(x)$.

Riešenie: Položením $x=y=0$ v rovnici zo zadania dostávame, že $f(0)=0$. Ak položíme $y=0$, dostávame, že $f\left(x^3\right)=xf(x)^2$. Tento vzťah je ekvivalentný so vzťahom

$$f(x)=x^{1/3}f\left(x^{1/3}\right)^2.$$

Z tohto vyjadrenia vidíme, že ak $x\leq 0$, tak $f(x)\leq 0$, resp. ak $x\geq 0$, tak aj $f(x)\geq 0$. Definujme množinu S:

$$S=\{a>0: f(ax)=af(x) \text{ pre všetky } x\in\mathbf{R}\}.$$

Zrejme $1 \in S$. Teraz ukážeme, že ak $a \in S$, potom aj $a^{1/3} \in S$. Nech x je ľubovoľné reálne číslo. Potom

$$axf(x)^2 = af(x^3) = f(ax^3) = f\left(\left(a^{1/3}x\right)^3\right) = a^{1/3}xf\left(a^{1/3}x\right)^2,$$

teda platí

$$axf(x)^2 = a^{1/3}xf\left(a^{1/3}x\right)^2,$$

odkiaľ po úprave dostávame, že platí

$$\left[a^{1/3}f(x)\right]^2 = f\left(a^{1/3}x\right)^2.$$

Keďže x a $f(x)$ majú rovnaké znamienko, dostávame, že platí

$$a^{1/3}f(x) = f\left(a^{1/3}x\right),$$

teda $a^{1/3} \in S$.

Teraz ukážeme, že ak $a, b \in S$, potom aj $a + b \in S$:

$$f((a+b)x) = f\left(\left(a^{1/3}x^{1/3}\right)^3 + \left(b^{1/3}x^{1/3}\right)^3\right) = \left(a^{1/3} + b^{1/3}\right)\left[f\left(a^{1/3}x^{1/3}\right)^2 - \right.$$

$$\left. - f\left(a^{1/3}x^{1/3}\right)f\left(b^{1/3}x^{1/3}\right) + f\left(b^{1/3}x^{1/3}\right)^2\right] = \left(a^{1/3} + b^{1/3}\right)\left(a^{2/3} - a^{1/3}b^{1/3} + b^{2/3}\right)x^{1/3}f\left(x^{1/3}\right)^2 =$$

$$= (a+b)f(x).$$

Teraz už ľahko indukciou nahliadneme, že pre každé prirodzené číslo n platí $n \in S$, a teda pre všetky $x \in \mathbf{R}$ platí $f(2006x) = 2006f(x)$.

14. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $k > 1$ existuje jeho násobok menší než k^4, ktorého dekadický zápis obsahuje maximálne štyri rôzne cifry.

Riešenie: Nech n je také prirodzené číslo, pre ktoré platí $2^{n-1} \le k < 2^n$. Pre $n \le 6$ je tvrdenie úlohy triviálne, preto ďalej uvažujeme len $n > 6$. Označme S množinu tých nezáporných celých čísel menších než 10^n, ktorých dekadický zápis obsahuje len cifry 0 a 1. Keďže $|S| = 2^n > k$, existujú dva prvky a, b, $a > b$, množiny S také, že dávajú rovnaký zvyšok po delení číslom k. Zároveň dekadický zápis rozdielu $a - b$ obsahuje len cifry 0, 1, 8 a 9 a číslo $a - b$ je deliteľné číslom k. Ďalej platí

$$a - b \le a \le 1 + 10 + \cdots + 10^{n-1} < 10^n < 16^{n-1} \le k^4,$$

teda $a - b$ je hľadaný násobok čísla k.

Komentár a bodovanie: Vo vašich riešeniach sa našli dobré myšlienky, avšak neboli úplne dopracované do konca. Body ste získavali za každý dobrý nápad smerujúci k riešeniu.