Metodicko-pedagogické centrum, Tomášikova 4, Bratislava

Európsky **sociálny** fond

Projekt je spolufinancovaný Európskou úniou.

Ročník: 11
Číslo: 4
Šk. rok: 2005/2006

Matematický časopis pre žiakov základných a stredných škôl

MATMIX

Jednou z pozoruhodných vecí na javoch nášho sveta je to, s akou neobyčajnou presnosťou mu vládnu matematické zákony.

Roger Penrose

Redakčná pošta

Končíme ďalší, už 11. ročník, časopisu MATMIX. Aj v tomto školskom roku sa mnohí z Vás zúčastnili matematickej olympiády, rôznych korešpondenčných matematických súťaží atď. Preto sa vám chceme touto cestou poďakovať za výsledky, ktoré ste dosiahli v riešeniach korešpondenčnej súťaže časopisu MATMIX. Najlepší z vás budú odmenení kalkulačkami, ktoré venovala firma CASIO a ktorej touto cestou ďakujeme, a budú pozvaní na sústredenie najlepších riešiteľov, ktoré sa uskutoční na konci augusta v chate Bystrička na Orave. Ak sa sústredenia nechcete zúčastniť, oznámte nám to, prosím, čím skôr na priloženej návratke alebo telefonicky či e-mailom, aby sme mohli pozvať ďalších riešiteľov v poradí.

Mnohí rodičia a učitelia najmä humanitných predmetov nám dávajú otázky, prečo má matematika v počte vyučovacích hodín také veľké zastúpenie. Naša odpoveď je, že matematika je zastúpená v takom počte vyučovacích hodín preto, že škola má žiaka naučiť nielen sčitovať, odčitovať, násobiť, či deliť, ale podstatnou úlohou je rozvíjať jeho myslenie v riešení matematických problémov. Tento spôsob myslenia sa následne neprejavuje iba v matematike, ale prenáša sa aj do iných predmetov. Sú tu aj ďalšie aspekty, ktoré treba zobrať do úvahy, ako je presnosť, trpezlivosť, túžba objavovať a vyriešiť problém atď. Každý z vás, ktorý samostatne rieši najmä neštandardné úlohy, si takéto javy neuvedomuje. Sú to len isté záblesky, ktoré počas štúdia získavate, aby ste ich v budúcnosti, keď už budete v praxi, naplno využívali.

Ako sme už v minulom čísle spomínali, časopis MATMIX bude do konca budúceho roka fungovať s finančným prispením Európskeho sociálneho fondu. Vďaka tomu budete budúci školský rok dostávať časopisy zadarmo a taktiež nebudete musieť zasielať známky, ak budete chcieť dostávať späť svoje opravené riešenia. Máme pre vás pripravené aj ďalšie atraktívne ceny. Preto ak máte záujem dostávať časopis aj budúci rok, napíšte nám svoju adresu, na ktorú vám máme časopis zasielať (najlepšie na e-mail hrinak@mctba.sk). Upozornenie: Príspevok ESF sa však netýka MINIMIXu, takže MINIMIX bude prebiehať rovnakým spôsobom ako tento rok. Čakajú vás aj ďalšie prekvapenia, ale o nich až v ďalšom čísle.

Na konci prázdnin, v dňoch 29. – 31. 8. 2006 sa v chate Bystrička na Orave, po sústredení najlepších riešiteľov, uskutoční sústredenie pre učiteľov, na ktorom budú prezentované inovačné metódy, ktoré je možné použiť vo vyučovaní matematiky. Informácie o tomto sústredení nájdete vo vnútri časopisu. Vzhľadom na finančné prispenie Európskeho sociálneho fondu bude toto školenie bezplatné. Srdečne vás naň pozývame a radi sa s vami na ňom stretneme.

Vaša redakcia

Karl Weierstrass – neobyčajne svedomitý matematik

Študent i učiteľ

Ak sa zahĺbite do riešenia zaujímavého problému, zabudnete aj na čas. Stalo sa to i mladému učiteľovi matematiky. Jedného dňa neprišiel do svojej triedy. Keď ho riaditeľ školy vyhľadal, našiel ho doma zahĺbeného v matematických úvahách. Budúci významný nemecký matematik **Karl Weierstrass** (1815 – 1897) pracoval v izbe, v ktorej boli zatiahnuté záclony, a nezbadal, že už je deň a treba ísť opäť do školy.

Úradníci v štátnej službe boli často prekladaní z miesta na miesto. Tak aj malý Karl, narodený 31. 10. 1815 v Ostenfelde, úradníkov syn, navštevoval postupne rôzne základné školy. V roku 1829 prišiel na gymnázium v Paderborne. Bol veľmi úspešným študentom v rôznych oblastiach. Bol viackrát najlepším žiakom v mnohých predmetoch, napr. v nemčine, latinčine, gréčtine i matematike. V roku 1834, po päť a polročnom štúdiu, namiesto osemročného, zmaturoval s ocenením „prvý zo všetkých“. I keď mladého Weierstrassa zaujímala matematika, otec z neho chcel mať štátneho úradníka a dal ho študovať právo do Bonnu. Syn nezanedbával štúdium, ale povrávalo sa, že nejeden večer patril v krčmičkách k najveselším. Nechýbal ani na šermiarskom kolbišti. Túžba po matematických vedomostiach nakoniec predsa prevládla. Štúdium práva zanechal nedokončené a odišiel na akadémiu do Münsteru urobiť učiteľské skúšky z filozofie, pedagogiky a matematiky. Tu ho pre hlbšie štúdium matematiky nadchol a získal dobrý učiteľ K. Gundermann. Ten spoznal, že Weierstrass si samoštúdiom doplnil základné vedomosti a je schopný ďalej rozvíjať teóriu eliptických funkcií.

Prvé gymnaziálne miesto získal Weierstrass v Deutsch-Krone v západnom Prusku. Vyučoval týždenne 30 hodín, učil okrem matematiky a fyziky aj botaniku, zemepis, dejepis, nemecký jazyk, krasopis i telocvik. Pritom študoval diela Abela, rozvíjal nové matematické myšlienky. Od roku 1848 až do roku 1855 vyučoval na strednej škole v Braunsbergu. Publikovaním niektorých výsledkov svojich prác vzbudil pozornosť matematikov v samotnom Berlíne. Od roku 1856 začal prednášať matematiku na polytechnike v Berlíne. Neskôr sa stal profesorom na univerzite a členom berlínskej akadémie (1864). Veľa prednášal, vedecky pracoval od skorého rána do neskorej noci. Bol dekanom filozofickej fakulty (1873/74) i rektorom

univerzity. Posledné prednášky odprednášal Weierstrass ako 75-ročný v školskom roku 1889/90. Zomrel v Berlíne 19. 2. 1897.

Matematické výsledky

Dôslednými prednáškami Weierstrass prehlboval svoje matematické myšlienky. Dobudoval základy matematickej analýzy, presne objasnil pojmy infimum a minimum, funkcia, spojitosť, derivácia. Popularizoval $\varepsilon - \delta$ symboliku. Zaviedol absolútnu hodnotu, totálny diferenciál, rovnomernú konvergenciu. Zdôvodnil teóriu komplexných funkcií pomocou mocninových radov. Ukázal príklad funkcie, ktorá je spojitá a nemá v žiadnom bode deriváciu. Z izolovaných výsledkov vybudoval modernú a presne zdôvodnenú teóriu eliptických funkcií na základe teórie funkcií komplexnej premennej. Princípy matematickej analýzy sa snažil transformovať na najjednoduchšie aritmetické pojmy. Výsledkami svojej práce sa natrvalo zapísal do teórie analytických funkcií a variačného počtu. Ovplyvnil teóriu reálnych čísel, lineárnu algebru i diferenciálnu geometriu.

Profesor Weierstrass založil na univerzite v Berlíne prvý čisto matematický seminár. Jeho ozdobou boli aj úspešní žiaci: G. Frobenius, H. A. Schwarz, S. Kovalevská, Mittag-Leffler, G. Cantor, I. Fuchs a ďalší. I keď boli Weierstrassove prednášky niekedy dosť neurovnané, originálne matematické myšlienky produkoval sústavne. Mnohí sa zúčastňovali jeho prednášok a seminárov aj preto, že pre mnohých z nich bol priateľom a spolupracovníkom. Veľmi málo však sám publikoval. Mnohé diela vyšli až posmrtne ako zápisy prednášok, ktoré urobili jeho najlepší žiaci. Zobraté spisy vyšli až v rokoch 1894 – 1927. Weierstrassove výsledky sa často dostali z prednášok či nepublikovaných spisov na verejnosť, a tak sa stalo, že si niektorí matematici privlastnili jeho nápady.

Vedieť študovať

Z vidieckeho učiteľa sa postupne stal významný vysokoškolský profesor a slávny matematik. Jeho matematická tvorivosť pôsobila v hlavných smeroch vtedajšej matematiky. Skromný a usilovný Weierstrass bol zaslúžene ocenený členstvom v akadémiách vied v Miláne (1863), Paríži (1868). Vedel ukazovať cesty k účinným výsledkom, naznačoval body, z ktorých sa možno dostať k novým objavom. Bol presvedčený, že dôležité je naučiť sa učiť sa.

Dušan Jedinák

Pozvánka na školenie učiteľov zamerané na inovačné metódy vo vyučovaní matematiky

Termín: 29. – 31. 8. 2006
Miesto: chata Bystrička na Orave, Dierová na Orave, Žaškov

Cieľ: Prehĺbenie a rozšírenie vedomostí a zručností o inovačných metódach, ktoré sa dajú využiť pri plánovaní a príprave vyučovacej hodiny.

Školitelia: RNDr. Ľudovít Hrdina, CSc., *MPC Tomášikova 4, Bratislava*
Ing. Mgr. Martin Hriňák, *Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave; MPC Tomášikova 4, Bratislava*
RNDr. Viera Kolbaská, *MPC Tomášikova 4, Bratislava*
Mgr. Dagmar Ševerová, *ŠPMNDaG, Teplická 7, Bratislava*

Program:

29. 8. 12.00 Prezentácia a ubytovanie účastníkov
13.30 Úvodné slovo, predstavenie projektu Korešpondenčný seminár MATMIX (Hriňák)
14.15 Zoznamovacie hry (Hriňák, Ševerová)
15.30 Systém kľúčových kompetencií žiakov (Hriňák)
16.30 7 – typov inteligencií (Kolbaská)
19.00 Učenie matematiky ako výzva (Ševerová)
20.30 Hry, diskusie (Hriňák)

30. 8. 9.00 Projektové vyučovanie, ukážky, nápady (Hriňák)
10.15 Matboj (Hrdina)
14.00 Azimuty (Hriňák)
16.30 Vyhodnotenie matboja (Hrdina)
19.00 Hry matematické i nematematické (Hriňák)
21.00 Posedenie pri táboráku

31. 8. 9.00 Využívanie tvorivosti v riešení matematických úloh (Hrdina)
11.00 Matboje a náboje (Hriňák)
13.00 Ukončenie školenia

Europsky sociálny fond

Projekt je spolufinancovaný Európskou úniou.

Európsky sociálny fond pomáha rozvíjať zamestnateľnosť podporovaním zamestnateľnosti, obchodného ducha, rovnakých príležitostí a investovaním do ľudských zdrojov.

Organizačné pokyny

Organizované školenie je vďaka podpore z Európskeho sociálneho fondu pre všetkých účastníkov **bezplatné** a jeho účastníkom **hradená aj doprava z miesta trvalého bydliska do miesta konania školenia** verejnými dopravnými prostriedkami (autobus, vlak 2. trieda). Pri použití osobného automobilu budú náklady hradené do výšky cestovného lístka verejnou dopravou. Účastníci školenia taktiež **dostanú zdarma školiace materiály**. **Toto školenie je určené len pre učiteľov z mimobratislavského regiónu.**

Školenie bude prebiehať formou dvoch trojdňových stretnutí – **prvé sa uskutoční 29. – 31. augusta 2006 v chate Bystrička na Orave**, **druhé 6. – 8. októbra 2006 na tom istom mieste**. Obsahom druhého školenia bude prezentácia ďalších metód použiteľných na vyučovaní, ale hlavne prezentácia vlastných skúseností s uvedenými metódami.

Záväznú prihlášku pošlite V. Kolbaskej obratom poštou na adresu MPC, e-mailom alebo faxom najneskôr **do 25. júla 2006**. Počet účastníkov z jednej školy nie je obmedzený a ak počet záujemcov neprekročí kapacitu ubytovacieho zariadenia, budú sa ho môcť zúčastniť všetci prihlásení.

Informácie o ubytovacom zariadení je na stránke: www.rekreabystricka.szm.sk.
Www stránka korešpondenčného seminára MATMIX: www.matmix.sk.

Vybavuje: RNDr. V. Kolbaská
tel.: 02/4820 9435, fax 02/4333 5946
e-mail: kolbaska@mctba.sk

Záväzná prihláška na školenie učiteľov zamerané na inovačné metódy vo vyučovaní matematiky 29. – 31. 8. 2006 Chata Bystrička na Orave

Meno, priezvisko, titl.: .....

Adresa: .....

Škola: .....

E- mail: .....

Telefón: .....

....

podpis účastníka súhlas vedenia školy

Celoštátne kolo súťaže SOŠ a SOU Praktická matematika
školský rok 2005/06

Kategórie K, L

1. V zápise delenia dvoch prirodzených čísel chýbajú niektoré cifry. Chýbajúce cifry nahraďte tak, aby bol zápis správny. Zápis je

$$12a76:23b=c2$$

Riešenie: V súčine $23b\cdot c2=12a76$ môže byť b 3 alebo 8. Delenie dvoch čísel prepíšeme na súčin:

a) Ak $b=3$, potom

$$c2\cdot 233=12a76$$
$$(10c+2)\cdot 233=12076+100a$$
$$2330c+466=12076+100a$$
$$233c=1161+10a$$

Potom $c=7$, lebo inak by $233c$ nekončilo na 1. Dosadením do poslednej rovnice dostávame, že platí

$$1631=1161+10a.$$

Potom by však malo platiť $a=47$, čo nie je možné, pretože a je cifra.

b) Ak $b=8$, potom

$$c2\cdot 238=12a76$$
$$(10c+2)\cdot 238=12076+100a$$
$$2380c+476=12076+100a$$
$$238c=1160+10a$$

Aby sa $238c$ končilo na 0, musí platiť $c=0$ alebo $c=5$. Avšak c ako prvá cifra čísla $c2$ musí byť nenulová. Preto $c=5$ a dopočítaním zistíme, že $a=3$.

Skúškou ľahko overíme, že platí $12376:238=52$.

2. Po celkovom výpadku elektrickej energie v danom regióne muselo 35 firiem znížiť jej spotrebu. Celkom boli tri skupiny firiem. V prvej skupine každá firma znížila spotrebu o 50 %, v druhej znížila každá firma spotrebu o $1/3$, v tretej o $1/4$ pravidelného odberu. Tým sa dosiahla úspora 40 % z celkovej pravidelnej spotreby. Pritom v prvej skupine bol počet firiem dvojnásobný ako v druhej, pričom pôvodne mala každá z 35 firiem rovnakú spotrebu. Koľko firiem bolo v jednotlivých skupinách?

Riešenie: Označme počet firiem v druhej skupine x a v tretej y. Potom bolo v prvej skupine $2x$ firiem. Potom musí platiť $2x+x+y=35$, teda $3x+y=35$. Ďalej

označme m spotrebu elektrickej energie, ktorú pôvodne odoberala každá z 35 firiem. Celková pôvodná spotreba v riadnej prevádzke bola $35m$. Údaje zapíšeme do tabuľky:

	1.skupina	2. skupina	3. skupina	Celkom
Pôvodná spotreba	$2xm$	xm	ym	$35m$
Znížená spotreba	$\frac{50}{100} \cdot 2xm$	$\frac{2}{3} \cdot xm$	$\frac{3}{4} \cdot xm$	$\frac{60}{100} \cdot 35m$

Preto musí platiť

$$xm + \frac{2}{3} \cdot xm + \frac{3}{4} \cdot ym = \frac{3}{5} \cdot 35m \ .$$

Keďže predpokladáme, že spotreba firiem je nenulová, musí platiť

$$20x + 9y = 252 .$$

Dostávame tak sústavu dvoch rovníc s dvomi neznámymi x a y:

$$3x + y = 35 ,$$

$$20x + 9y = 252 ,$$

ktorú vyriešime. Jej riešením je $x = 9$ a $y = 8$. Potom dostávame, že v 1. skupine je 18, v druhej 9 a v tretej 8 firiem.

3. Adam a Boris išli trať dlhú 24 km „indiánskym behom“. Striedali chôdzu (stálou rýchlosťou 6 km/h) s behom (stálou rýchlosťou 18 km/h). Pritom Adam striedavo 1 km bežal a 1 km kráčal, kým Boris striedavo 5 minút bežal a 5 minút kráčal.

a) Ktorý z nich bol v cieli skôr? O koľko minút?
b) Aký náskok (v km) mal v cieli rýchlejší z nich?
c) Na stanici občerstvenia bol rýchlejší z nich o 20 minút skôr než druhý. Na ktorom kilometri bola stanica občerstvenia?

Riešenie:

a) Adam prešiel 1 km behom za 3'20" a 1 km chôdzou za 10'. Tri takéto cykly, t. j. 6 km, prejde za 40'. Preto celú trať prejde za 4-krát 40', t. j. za 2 hodiny a 40 minút. Boris za 5' prebehne 1,5 km a za 5' chôdze 0,5 km. Teda za 10' prejde 2 km a celú trať prejde za 12-krát 10', t. j. za 2 hodiny.

b) Keď je Boris v cieli, Adam bude potrebovať ešte 40' na to, aby došiel do cieľa. Za ten čas prejde práve 6 km. Teda Boris prišiel do cieľa s náskokom 6 km.

c) Zostrojíme graf. Stanica občerstvenia mohla byť kdekoľvek medzi kilometrami 11,5 a 13.

4. Je daný pravidelný šesťuholník *ABCDEF* s dĺžkou strany 2. Zostrojíme tri kružnice so stredmi v bodoch *A*, *B*, *C* tak, aby sa navzájom zvonku dotýkali. Vypočítajte polomer najmenšej kružnice.

Riešenie: Označme si kružnicu so stredom v bode *B* k_1 a kružnice so stredmi v bodoch *A* a *C* k_2 a k_3. Kružnice k_2 a k_3 majú rovnaký polomer, preto ich dotykový bod leží na priamke *BE* – je to priesečník úsečiek *AC* a *BE*. Označme tento bod *Z*. Spoločný dotykový bod k_1 a k_2 označme *X*. Stred šesťuholníka označme *S*. Keďže *AZ* je výška rovnostranného trojuholníka *BSA*, platí $|AZ| = \frac{\sqrt{3}}{2}.\,2 = \sqrt{3}$. Taktiež vieme, že platí $|AZ| = |AX|$. Preto pre polomer kružnice k_1 dostávame, že platí $|BX| = 2 - \sqrt{3}$.

Kategórie M, N

1. Nájdite všetky riešenia sústavy rovníc v obore celých čísel

$$x + y + z = 2$$
$$2xy - z^2 = 4$$

Riešenie: Vyjadrením neznámej *z* z prvej rovnice a jej dosadením do druhej dostaneme, že platí

$$2xy - (2 - x - y)^2 = 4,$$

čo môžeme upraviť na tvar

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 0.$$

Z toho dostávame, že $x = y = 2$ a dopočítaním *z* dostávame $z = -2$.

2. Dve autá vyšli súčasne rovnakým smerom z miesta *A* o 13.00. Prvé išlo rýchlosťou 50 km/h, druhé rýchlosťou 40 km/h. O 13.30 vyšlo z miesta *A* tretie auto, ktoré predbehlo prvé auto o jeden a pol hodiny neskôr ako druhé auto. Určte rýchlosť tretieho auta.

Riešenie: Označme *v* rýchlosť tretieho auta. Prvé auto prešlo za pol hodiny 25 km, druhé 20 km. Označme t_1, t_2 čas pohybu prvého a druhého auta a *x*, resp. *y* vzdialenosť od miesta *A*, kde predbehlo tretie auto prvé, resp. druhé auto.

Potom môžeme pre tretie a prvé auto zostaviť dve rovnice:

$$25 + x = v(t_1 - 0{,}5),$$
$$25 + x = 50t_1,$$

odkiaľ dostaneme

$$50t_1 = v(t_1 - 0{,}5). \qquad (1)$$

Pre tretie a druhé auto môžeme tiež zostaviť rovnicu:

$$20 + y = v(t_2 - 0{,}5),$$
$$20 + y = 40t_2,$$

odkiaľ dostaneme

$$40t_2 = v(t_2 - 0{,}5). \qquad (2)$$

Zároveň platí

$$t_1 = t_2 + 1{,}5. \qquad (3)$$

Po dosadení (3) do (1) dostávame

$$50(t_2 + 1{,}5) = v(t_2 + 1) \qquad (4)$$

Po úpravách (4) a (2) dostaneme

$$\frac{50}{v} = \frac{t_2 + 1}{t_2 + 1{,}5}, \qquad \frac{40}{v} = \frac{t_2 - 0{,}5}{t_2}.$$

Po vydelení rovníc máme

$$\frac{5}{4} = \frac{t_2(t_2 + 1)}{(t_2 + 1{,}5)(t_2 - 0{,}5)},$$

odkiaľ $t_2 = 1{,}5$ h, $t_1 = 3$ h. Potom rýchlosť v tretieho auta je 60 km/h.

3. Ak súčet dĺžok dvoch strán trojuholníka vynásobíme dĺžkou tretej strany, dostaneme výsledok 96. Ak túto operáciu urobíme aj pri ostatných dvoch spôsoboch výberu prvej a druhej strany, dostaneme výsledky 91 a 75. Určte obvod trojuholníka.

Riešenie: Ak si označíme strany trojuholníka štandardne, dostávame, že platí

$$ca + bc = 96,$$
$$bc + ba = 91,$$
$$ac + ba = 75.$$

Ak od prvej rovnice odpočítame druhú aj tretiu rovnicu, dostaneme, že $2ab = 70$, čiže $ab = 35$. Podobne $ac = 40$, $bc = 56$. Vynásobením rovníc dostaneme

$$a^2b^2c^2 = 784000,$$

teda $abc = 280$. Keďže $ab = 35$, tak $c = 280/35 = 8$. Podobne dostaneme, že $a = 5$ a $b = 7$. Obvod trojuholníka je potom $5 + 7 + 8 = 20$.

4. Body N a M ležia na polkružnici zostrojenej nad priemerom AB dĺžky 1 tak, že body $ABNM$ tvoria lichobežník, do ktorého sa dá vpísať kružnica. Určte dĺžky ramien lichobežníka.

Riešenie: Ak je lichobežník $ABNM$ (pozri obrázok) tetivový, je symetrický podľa osi úsečky AB. Potom je aj rovnoramenný: $|AM| = |BN|$. Pre dĺžky úsečiek LN, KQ a NR

platí: $|LN| = |KQ| = |NR| = x$, pretože strany LN a NR obdĺžnika $KQNL$ sú dve dotykové úsečky z bodu N ku kružnici k. Ak využijeme Pytagorovu vetu pre trojuholníky KQN a BQN, dostaneme:

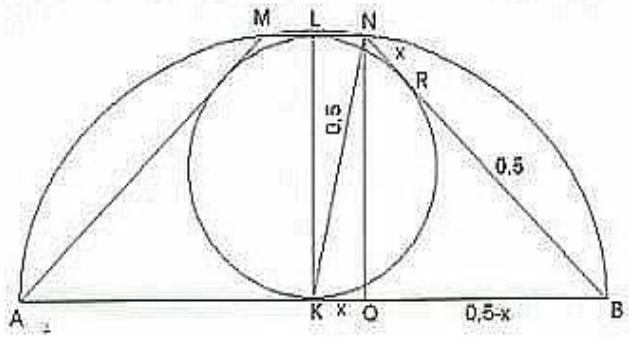
$$\Delta KQN: \quad |NQ|^2 = 0{,}5^2 - x^2,$$

$$\Delta BQN: \quad |NQ|^2 = (0{,}5 + x)^2 - (0{,}5 - x)^2.$$

Z rovnosti ľavých strán dostaneme kvadratickú rovnicu pre x, ktorej jediný kladný koreň je $x = \dfrac{\sqrt{5} - 2}{2}$.

Ramená BN a AM majú potom dĺžku

$$|BN| = |AM| = 0{,}5 + x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$



Výsledkové listiny celoštátneho kola súťaže
Praktická matematika

Kategória K

Por.	Meno	Škola	1	2	3	4	Súčet
1.	Jakub Kucharovič	ZSŠ elektrotechnická, Stará Turá	5	5	5	5	20
2.	Stanislav Pivko	SOU Komárno	5	5	3	5	18
3.	Martin Hatňančík	SOU Považská Bystrica	5	5	2	0	12

Kategória L

Por.	Meno	Škola	1	2	3	4	Súčet
1.	Jakub Juhas	SPŠE Bratislava, K. Adlera 5	5	5	5	5	20
	Jaroslav Slovák	SPŠ Myjava	5	5	5	5	20
	Jakub Štetina	SPŠ Myjava	5	5	5	5	20
	Ľuboš Vančo	SPŠ dopravná Trnava	5	5	5	5	20
5.	Lukáš antala	Spojená škola Bánovce n/Bebravou	5	4	5	5	19
	Július Bílik	SPŠ Myjava	5	5	4	5	19
	Ondrej Izák	SPŠ stroj. Bratislava, Fajn.nábr.	5	5	5	4	19
	Marek Janok	Obchodná akadémia Štúrovo	5	4	5	5	19
9.	Enikö Eššeková	SPŠ stavebná Hurbanovo	5	5	5	3	18
	Peter Maliarik	SPŠ stavebná Trnava	5	5	3	5	18
	Matúš Nerad	SPŠE Bratislava, K. Adlera 5	3	5	5	5	18
12.	Róbert Fekete	SPŠ stavebná Hurbanovo	5	2	5	5	17
	Peter Mikolai	Obchodná akadémia Veľký Meder	5	4	3	5	17
14.	Marián Tibenský	ZSPŠ Trnava	0	5	5	5	15

Kategória M

Por.	Meno	Škola	1	2	3	4	Súčet
1.	Marián Kulla	SOU strojárske Považská Bystrica	5	5	5	3	18
2.	Milan Lašák	ZSPŠ Stará Turá	5	5	5	1	16
3.	Tomáš Foltinovič	SOU chemické Šaľa	5	5	5	0	15
4.	Jaroslav Hanko	SOU chemické Šaľa	0	5	0	1	6

Kategória N

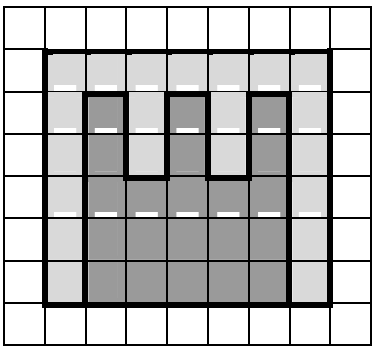
Por.	Meno	Škola	1	2	3	4	Súčet
1.	Lucie Mandíková	Obchodná akadémia Senica	5	5	5	3	18
2.	Andrej Jursa	SPŠ stroj. Bratislava, Fajn.nábr.	5	5	5	1	16
3.	Peter Cséri	Spojená škola Nové Zámky	5	5	5	0	15
	Soňa Madarászová	OA Bratislava, Račianska ul.	5	5	5	0	15
	Tomáš Pavlíček	SPŠE Piešťany	5	5	5	0	15
	Martin Neštický	ZSPŠ Trnava	5	5	5	0	15
7.	Ľudmila Pašková	SSOŠ Humanus Via Holíč	3	3	5	2	13
8.	Dávid Benčík	SPŠ Komárno	5	2	5	0	12
9.	Ján Motko	Obchodná akadémia Levice	3	0	0	0	3

Zadania úloh 56. ročníka Matematickej olympiády v šk. roku 2006/2007

Kategória Z4

1. Na obrázku sú v štvorčekovej sieti znázornené dva ZUBOUHOLNÍKY (svetlosivý a tmavosivý), ktoré sa zahryzli do seba. (ZUBOUHOLNÍK je špeciálny druh mnohouholníka.) Zistite, ktorý z nich má väčší obsah a ktorý väčší obvod.

(Bednářová S.)



2. Miss STRANGELANDIA dostala tak veľa rôznych ponúk od rôznych modelingových agentúr, že si z nich nevedela vybrať. Napokon sa rozhodla, že prijme ponuku tej z nich, ktorá ako prvá uhádne číslo jej topánok. Prezradila im, že je to dvojciferné číslo s ciferným súčtom 12 a ak by sa v tomto čísle zmenilo poradie číslic, vzniklo by číslo o 54 väčšie. Aké číslo topánok nosí Miss STRANGELANDIA?

(Bednářová S.)

3. Jurko včera na magnetickej tabuli vytvoril vzorový príklad. Dnes, keď prišiel do školy, zistil, že pani upratovačka ho „upratala“ a všetky použité číslice a znaky zoradila na dolnom okraji tabule takto:

3 4 5 6 8 9 + =

Aký príklad vytvoril včera Jurko? Nájdi všetky možnosti.

(Dillingerová M.)

4. Rodičia prvej slovenskej superstar K. K. sa starajú o jaskyňu „Zlá diera“. V jaskyni je tma, návštevníci si svietia karbidovými lampášikmi. Pre seba a pre pani učiteľku má pán K. väčšiu lampičku. Lampášikov však mali len 9, preto sprievodca ujo K. zoradil našu skupinu ako husi tak, že tesne pred tým, ktorý nemal lampášik, išiel niekto s lampášikom alebo lampičkou. Prvý v zástupe bol on, posledná pani učiteľka s lampičkou. Lampášik niesli 4 chlapci, 4 dievčatá lampášik nedostali. Koľko dievčat bolo v našej skupine? Koľko tam bolo chlapcov? Poznámka: Nik neniesol dva lampášiky a žiadni dvaja s lampášikmi nešli tesne za sebou.

(Bednářová S.)

5. Sedem Snehulienkiných trpaslíkov bolo na hríboch. Prišli s košíčkami, v ktorých mali 34, 19, 50, 44, 31, 28 a 37 hríbov. Snehulienka im povedala, aby niektoré košíčky uložili do špajze, niektoré dali k sporáku a ostatné položili na stôl tak, že všade mal byť rovnaký počet hríbov. Trpaslíci sa rozhodli, že hríby z košíčkov nebudú vyberať. Podarí sa im uložiť košíčky tak, ako to chcela Snehulienka? Nájdi aspoň jeden spôsob.

(Ptáčková Š.)

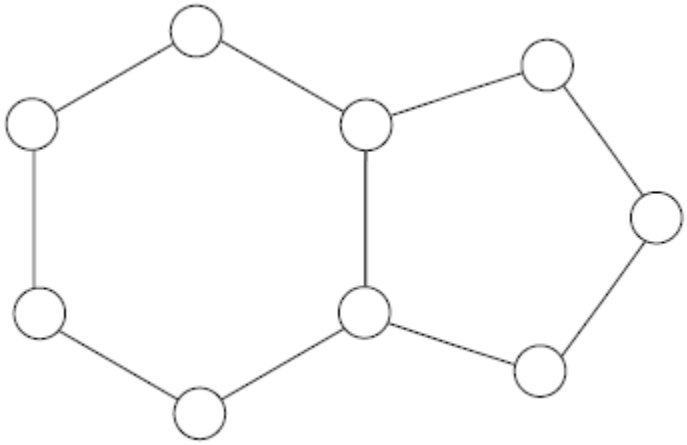
6. Z čísla 1583719 vyškrtni tri číslice tak, aby vzniklo čo najväčšie číslo, ktorého každá číslica je nepárna.

(Dillingerová M.)

Kategória Z5

1. Na obrázku vidíš päťuholník a šesťuholník so spoločnou stranou. Doplň do krúžkov na tomto obrázku číslice 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9 tak, aby súčet čísel v šesťuholníku aj súčet čísel v päťuholníku bol 24. Každé číslo smieš použiť len raz. Stačí, keď nájdeš jedno riešenie.

(Hozová L.)



2. Cyklistického preteku *Krížom - krážom* sa zúčastnili šesťčlenné družstvá z celej Európy. Prvých desať etáp ešte zvládli všetci, ale v jedenástej etape po hromadnom páde odstúpilo 17 cyklistov. V každej ďalšej etape ich potom odstúpilo o troch menej ako v predošlej. Do cieľa poslednej 15. etapy došlo 53 cyklistov. Koľko družstiev sa zúčastnilo preteku?

(Ptáčková Š.)

3. Tomáškova cvičená blcha Skákalka stála na ciferníku hodín na bodke pri čísle 12. Hrala sa s ním takúto hru: Tomáško hodil kockou a blcha skočila o toľko bodiek ďalej, koľko mu padlo na kocke. Po prvom hode skákala v smere pohybu hodinových ručičiek, po druhom proti smeru a po treťom opäť v smere pohybu hodinových ručičiek. Vieme, že Tomáško hodil dvojku, päťku a šestku, ale nevieme v akom poradí mu padli.

a) Na bodke pri ktorom čísle mohla skončiť Skákalka po treťom skoku?
b) Na ktoré číslo sa blcha počas hry vôbec nemohla dostať?

(Hozová L.)

4. Pomocou číslic 0 až 9 a dvoch desatinných čiarok utvor dve desatinné čísla tak, aby ich súčet bol čo najmenší. Nájdi všetky možnosti! (Každú číslicu treba použiť práve raz!)

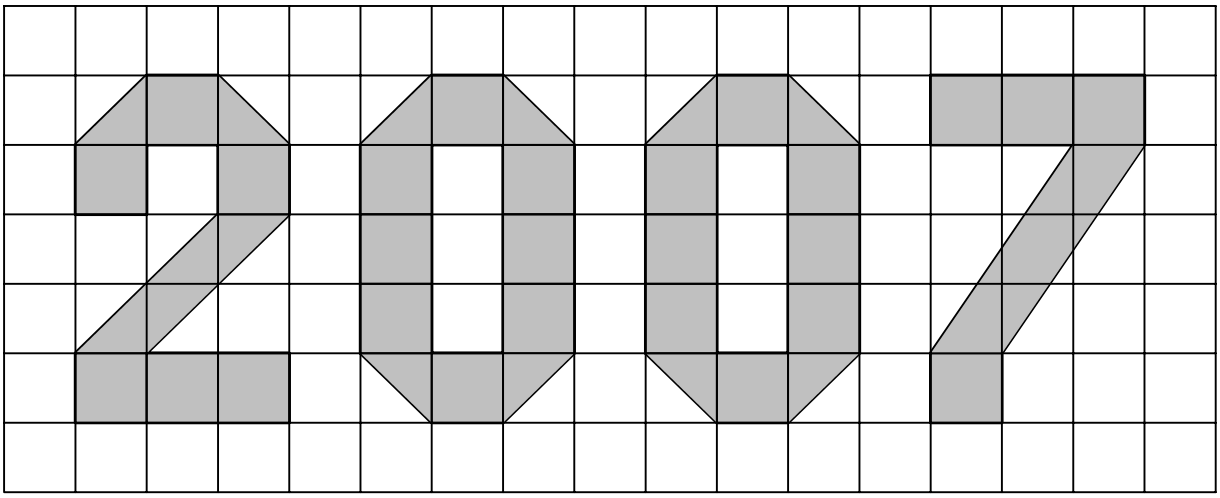
(Bednářová S.)

5. Sedem Snehulienkiných trpaslíkov bolo na hríboch. Prišli s košíčkami, v ktorých mali 34, 19, 50, 44, 31, 28 a 37 hríbov. Snehulienka im povedala, aby niektoré košíčky uložili do špajze, niektoré dali ku sporáku a ostatné položili na stôl tak, že všade malo byť rovnako veľa hríbov. Trpaslíci sa rozhodli, že hríby z košíčkov nebudú vyberať. Podarí sa im uložiť košíčky tak, ako to chcela Snehulienka? Nájdi aspoň jeden spôsob!

(Ptáčková Š.)

6. Na obrázku je v štvorčekovej sieti znázornené číslo 2007. Zisti obsah sivej časti obrázka, ak vieš, že strana každého malého štvorčeka meria 4 cm.

(Raabová M.)



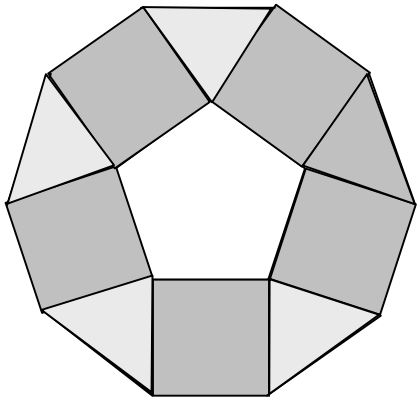
Kategória Z6

1. Lukáš natieral latkový plot. Každých 10 minút natrel 8 latiek. Jeho mladší brat Kubko mu chvíľku pomáhal. Za 7 minút natrel vždy 4 latky, takže Lukáš skončil o štvrť hodiny skôr, ako predpokladal. Ako dlho mu Kubko pomáhal?

(Raabová M.)

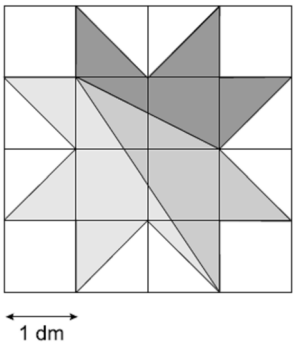
2. Zo zhodných rovnoramenných trojuholníkov a štvorcov sme zložili (bez prekrývania) útvar znázornený na obrázku. Zisti veľkosti vnútorných uhlov týchto rovnoramenných trojuholníkov.

(Bednářová S.)

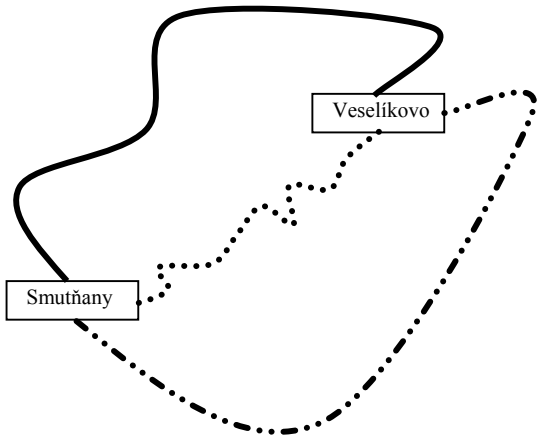


3. Hviezda na obrázku je rozdelená dvomi úsečkami na tri časti. Zisti obsahy jednotlivých častí.

(Šimůnek L.)



4. Zo Smutňan do Veselíkova vedú tri cesty. Tá, ktorá je na mape vyznačená ako plná, meria 40 km, najvyššia povolená rýchlosť na nej je 80 km/h a vyberá sa na nej mýto 50 korún. „Bodkovaná“ cesta je dlhá 35 km, najvyššia povolená rýchlosť je na nej 60 km/h a mýtne je 150 korún. Na „čiarkovanej“ ceste, ktorá je dlhá 45 km, sa vyberá mýto 100 korún a najvyššia povolená rýchlosť je 100 km/h. Ujo Ponáhľavý a teta Šporovlivá sa chcú dostať zo Smutňan do Veselíkova, ujo čo najskôr a teta čo najlacnejšie. Obaja si zavolali taxík. Šoféri taxíkov celú cestu idú maximálnou povolenou rýchlosťou a účtujú si 15 korún za jeden km cesty a zaplatené mýtne.



1. Ktorou cestou sa má vybrať taxikár uja Ponáhľavého?
2. Ktorou cestou sa má vybrať taxikár tety Šporovlivej?
3. O koľko minút menej bude trvať ujova cesta v porovnaní s tetinou?
4. O koľko korún viac zaplatí ujo ako teta?

(Bednářová S.)

5. Viacciferné číslo sa nazýva optimistické, ak jeho číslice zľava doprava rastú. Ak číslice čísla zľava doprava klesajú, hovoríme, že je to číslo pesimistické. Súčet sedemciferného pesimistického a sedemciferného optimistického čísla zloženého z tých istých číslic je 11001000. Ktoré číslice sme použili na zápis týchto dvoch čísel?

(Bednářová S.)

6. Naša trieda plánovala turistický výlet. Niektorí žiaci sa dohadovali o dĺžke jeho trasy a tvrdili, že je to 28, 16, 32, 37 a 15 km. Mýlili sa však o 5, 7, 8, 9 a 14 km. Aký dlhý bol výlet v skutočnosti?

(Volfová M.)

Kategória Z7

1. Janka narysovala 6-uholník, ktorého dĺžky strán vyjadrené v cm sú celé čísla. Potom si uvedomila, že každé dve jeho susedné strany sú na seba kolmé. Zisti, ako mohol vyzerať Jankin 6-uholník, ak má byť jeho obvod 16 cm a jeho obsah 12 cm^2. Narysuj obe možnosti.

(Dillingerová M.)

2. Rozdeľ obdĺžnik na obrázku, ktorý sa skladá z rovnakých štvorcov, na čo najmenší počet zhodných častí tak, aby každá z nich obsahovala len také čísla, ktoré dávajú po delení tromi navzájom rôzne zvyšky. Pozor, rezať sa smie len po čiarach siete!

(Bednářová S.)

		14	32		
43	102	11			90
22	18		301		7
	35		99	29	
12				62	

3. Urč počet zlomkov, ktorých hodnota je násobkom troch a čitateľ aj menovateľ sú trojciferné prirodzené čísla.

(Šimůnek L.)

4. Rozprávkový deduško niesol vrece zrna do mlyna. Po ceste mu zrno začalo z vreca vypadávať. Tri vtáčiky si všimli, že za deduškom ostáva cestička označená jednotlivými zrnkami. Prvý išiel zobať zrnká zelený vtáčik a zozobal každé štvrté zrnko ležiace na zemi. Potom priletel zobať červený vtáčik a zozobal každé piate

zrnko ležiace na zemi. Nakoniec zlietol na cestičku modrý vtáčik a zozobal každé tretie zrnko ležiace na zemi. Koľko zrniek stratil deduško z vreca, ak vtáčiky zozobali spolu 79 zrniek?

(Dillingerová M.)

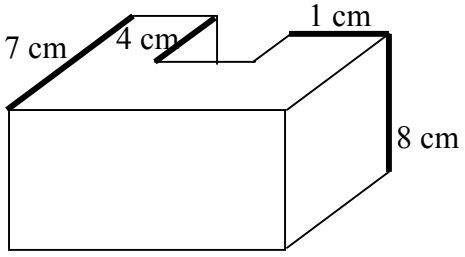
5. Troj- a viacciferné číslo s navzájom rôznymi ciframi, pre ktorého žiadne tri za sebou idúce číslice a, b, c neplatí $a < b < c$ ani $a > b > c$, sa nazýva vlnité. Napíš

a) najväčšie vlnité číslo, ktoré nie je deliteľné 3,
b) najväčšie vlnité číslo deliteľné 150.

(Bednářová S.)

6. Osemboký kolmý hranol načrtnutý na obrázku vznikol zlepením troch kvádrov. Zisti objem a povrch tohto hranola, ak poznáš dĺžky vyznačených hrán a vieš, že z ôsmich jeho bočných stien sú vždy dve a dve zhodné.

(Bednářová S.)



Kategória Z8

1. Z číslic 1 až 9 sme utvorili tri zmiešané čísla $a\frac{b}{c}$. Potom sme tieto tri čísla správne sčítali. Aký najmenší súčet sme mohli dostať? (Každú číslicu sme použili práve raz!)

(Bednářová S.)

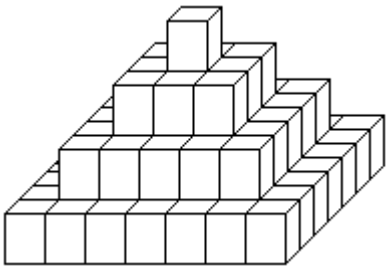
2. Pán kráľ si dal naliať plnú čašu vína. Pätinu vína z nej odpil. Potom si nechal čašu doplniť vodou a odpil štvrtinu objemu. Opäť mu ju doliali vodou a kráľ odpil tretinu. Nakoniec čašu ešte raz doliali vodou doplna. Koľko percent objemu čaše tvorí pôvodné víno?

(Krejčová M.)

3. Je daný pravidelný deväťuholník *ABCDEFGHI*. Vypočítajte veľkosť uhla, ktorý zvierajú priamky *DG* a *BE*.

(Krejčová M., Raabová M.)

4. Žiaci postavili z množstva rovnakých kociek pyramídu, ktorej časť vidíte na obrázku. Pyramída, svojho druhu najväčšia na svete, stála od tej doby na školskom dvore a pršalo na ňu. Po čase sa museli všetky kocky, na ktoré



pršalo, teda tie na povrchu, vymeniť. Vymenilo sa celkom 2 025 kociek. Koľko mala pyramída vodorovných vrstiev?

(Šimůnek L.)

5. Na lúke sa pásli ovce. Tých s rohmi bolo dvakrát menej ako tých bez rohov. Tých s tmavým kožúškom bolo toľko ako tých so svetlým kožúškom. (Iné ovce, jednorohé, fľakaté a pod., sa na lúke nepásli.) Iba tri tmavé ovečky nemali rohy a svetlé vôbec nemali rohy. Koľko sa páslo ovečiek na lúke?

(Dillingerová M.)

6. Výška rovnoramenného trojuholníka *ABC* delí tento trojuholník na dve časti, ktorých obsahy sú v pomere 1 : 3. Určte obsah a obvod trojuholníka *ABC*, ak viete, že $|AC| = |BC|$ a $|AB| = \sqrt{32}$ cm.

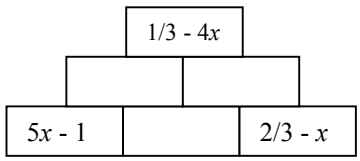
(Hozová L.)

Kategória Z9

1. Zistite, koľko je takých šesťciferných čísel, ktoré majú ciferný súčin 750?

(Tlustý P.)

2. V sčítacej pyramíde sa na každej tehličke (okrem tých z najspodnejšieho riadka) nachádza súčet tých čísel, ktoré sú napísané na dvoch s ňou susediacich tehličkách z nižšieho riadka. Doplňte na prázdne tehličky sčítacej pyramídy znázornenej na obrázku chýbajúce výrazy.



(Bednářová S.)

3. Do kružnice s polomerom 2 cm je vpísaný pravidelný šesťuholník *ABCDEF*. Priesečník priamok *FE* a *CD* označme *M*. Vypočítajte dĺžku úsečky *AM*.

(Volfová M.)

4. Matematickej súťaže sa zúčastnilo 142 žiakov. Po skončení súťaže autor zistil, že priemerný počet bodov udelených za tretiu úlohu pripadajúci na jedného súťažiaceho je 2,7 (zaokrúhlené na desatiny). Nie každý súťažiaci však tretiu úlohu odovzdal, takže priemerný počet bodov udelených za tretiu úlohu pripadajúci na jedno odovzdané riešenie bol 3,9 (zaokrúhlené na desatiny). Koľko súťažiacich mohlo odovzdať tretiu úlohu?
Poznámka: Udeľovali sa len celé body, neodovzdaná úloha bola hodnotená 0 bodmi.

(Šimůnek L.)

5. Trojuholník *REZ* s obsahom 300 cm^2, stranou *RE* dĺžky 25 cm a stranou *ZE* dĺžky 30 cm sme dvomi priamymi rezmi rozdelili na 3 časti a z týchto častí zložili (bez prekrývania) obdĺžnik. Aké rozmery mohol mať tento obdĺžnik? Nájdite všetky možnosti.

(Bednářová S.)

6. Ukážte, že číslo

$$(1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot 2003\cdot 2005)+(2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot \ldots \cdot 2004\cdot 2006)$$

je deliteľné číslom 2007^4.

(Tlustý P.)

Kategória C

1. Určte všetky dvojice prirodzených čísel (a, b), pre ktoré platí

$$a + 5\sqrt{b} = b + 5\sqrt{a}\ .$$

(Jaroslav Švrček)

2. Nájdite všetky trojuholníky, ktoré sa dajú rozrezať na lichobežníky so stranami dĺžok 1 cm, 1 cm, 1 cm a 2 cm.

(Ján Mazák)

3. Nájdite všetky prirodzené čísla, ktorých zápis neobsahuje nulu a má nasledujúcu vlastnosť: Ak v ňom vynecháme ľubovoľnú číslicu, dostaneme číslo, ktoré je deliteľom pôvodného čísla.

(Jaromír Šimša)

4. Daný je lichobežník $ABCD$ so základňami AB a CD. Označme E stred strany AB, F stred úsečky DE a G priesečník úsečiek BD a CE. Vyjadrite obsah lichobežníka $ABCD$ pomocou jeho výšky v a dĺžky d úsečky FG za predpokladu, že body A, F, C ležia na jednej priamke.

(Ján Mazák)

5. Zistite, pre ktoré prirodzené číslo n je podiel

$$\frac{33\ 000}{(n-4)(n+1)}$$

a) čo najväčšie,
b) čo najmenšie prirodzené číslo.

(Eva Řídká)

6. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC, v ktorom je D päta výšky z vrcholu C a V priesečník výšok. Dokážte, že $|AD|.|BD| = |AB|.|VD|$ práve vtedy, keď $|CD| = |AB|$.

(Jaroslav Zhouf)

Kategória B

1. Nájdite všetky dvojice celých čísel (a, b), ktoré sú riešením rovnice

$$a^2 + 7ab + 6b^2 + 5a + 4b + 3 = 0.$$

(Pavel Novotný)

2. Daná je kružnica k s priemerom AB. K ľubovoľnému bodu Y kružnice k, $Y \neq A$, zostrojme na polpriamke AY bod X, pre ktorý platí $|AX| = |YB|$. Určte množinu všetkých takých bodov X.

(Pavel Leischner)

3. Nájdite najmenšie prirodzené číslo k také, že každá k-prvková množina trojciferných po dvoch nesúdeliteľných čísel obsahuje aspoň jedno prvočíslo.

(Pavel Novotný)

4. V ľubovoľnom trojuholníku ABC označme T jeho ťažisko, D stred strany AC a E stred strany BC. Nájdite všetky pravouhlé trojuholníky ABC s preponou AB, pre ktoré je štvoruholník $CDTE$ dotyčnicový.

(Ján Mazák)

5. Nájdite všetky dvojice reálnych čísel (p, q) také, že mnohočlen $x^2 + px + q$ je deliteľom mnohočlena $x^4 + px^2 + q$.

(Jozef Moravčík)

6. Daná je úsečka AA_0 a priamka p. Zostrojte trojuholník s vrcholom A a výškou AA_0, ktorého ťažisko a stred kružnice opísanej ležia na priamke p.

(Eva Řídká)

Kategória A

1. V obore reálnych čísel vyriešte rovnicu

$$4x^4 - 12x^3 - 7x^2 + 22x + 14 = 0,$$

keď viete, že má štyri rôzne reálne korene, pričom súčet dvoch z nich sa rovná číslu 1.

(Jaromír Šimša)

2. Kružnica vpísaná do daného trojuholníka ABC sa dotýka strán BC, CA, AB postupne v bodoch K, L, M. Označme P priesečník osi vnútorného uhla pri vrchole C s priamkou MK. Dokážte, že priamky AP a LK sú rovnobežné.

(Peter Novotný)

3. Ak x, y, z sú reálne čísla z intervalu $\langle -1, 1\rangle$ spĺňajúce podmienku $xy + yz + zx = 1$, tak platí

$$6\sqrt[3]{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)} \le 1 + (x+y+z)^2.$$

Dokážte a zistite, kedy nastáva rovnosť.

(Jaroslav Švrček)

4. Určte, pre ktoré prirodzené čísla n sa množina $M = \{1, 2, \dots, n\}$ dá rozdeliť

a) na dve,
b) na tri

navzájom disjunktné podmnožiny s rovnakým počtom prvkov tak, aby každá z nich obsahovala aj aritmetický priemer všetkých svojich prvkov.

(Peter Novotný)

5. V rovine je daná kružnica k so stredom S a bod $A \neq S$. Určte množinu stredov kružníc opísaných všetkým trojuholníkom ABC, ktorých strana BC je priemerom kružnice k.

(Jiří Dula)

6. Určte všetky funkcie $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ také, že pre všetky celé čísla x, y platí

$$f(f(x) + y) = x + f(y + 2006)$$

(Petr Kaňovský)

Riešenia úloh 3. série korešpondenčnej súťaže

1. Nájdite najmenšie prirodzené číslo n také, že $\sqrt{4n-2}$ je prirodzené číslo.

Riešenie: Keďže číslo $4n-2$ je párne, tak ak je $\sqrt{4n-2}$ prirodzené číslo, potom je párne, teda existuje také prirodzené číslo k, že platí $\sqrt{4n-2} = 2k$, odkiaľ dostávame, že $4n-2 = 4k^2$, čo však pre prirodzené čísla k a n nemôže platiť, pretože číslo 2 nie je deliteľné číslom 4. Preto hľadané prirodzené číslo neexistuje.

2. Každé z čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$ sa rovná 0, 1 alebo -2. Navyše platí

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = -5,$$
$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 19.$$

Určte hodnotu $x_1^5 + x_2^5 + \dots + x_n^5$.

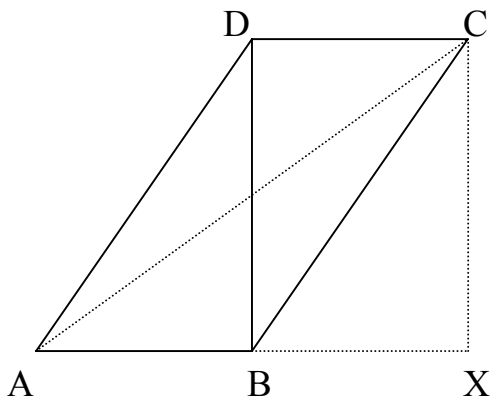
Riešenie: Najprv si uvedomme, že ak sa niektoré z čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rovná 0, tak to nemá vplyv na hodnotu súčtu $x_1^5 + x_2^5 + \ldots + x_n^5$. Zaoberajme sa preto len nenulovými číslami. Ak sa nejaké číslo rovná 1 alebo -2, potom sa jeho druhá mocnina rovná 1 alebo 4. Označme a počet výskytov 1 a b počet výskytov -2 medzi číslami $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Potom z prvej a druhej rovnice zo zadania dostávame, že platí

$$a - 2b = -5,$$
$$a + 4b = 19.$$

Vyriešením tejto sústavy dostaneme, že $a = 3$, $b = 4$. Potom

$$x_1^5 + x_2^5 + \ldots + x_n^5 = 3 \cdot 1^5 + 4 \cdot (-2)^5 = -125.$$

3. V štvoruholníku *ABCD*, ktorého obsah je 2, platí $|AB| + |BD| + |CD| = 4$. Určte dĺžku úsečky AC.



Riešenie: Pre obsah trojuholníka *ABC* platí, že

$$S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2}|AB||BD|\sin|\angle ABD| \le \frac{1}{2}|AB||BD|.$$

Podobne platí pre trojuholník *BCD*

$$S_{\Delta CBD} = \frac{1}{2}|CD||DB|\sin|\angle CDB| \le \frac{1}{2}|CD||DB|.$$

Súčet obsahov trojuholníkov *ABC* a *BCD* sa rovná

$$S_{\Delta ABD} + S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2}|BD|(|AB| + |CD|).$$

Potom na základe AG nerovnosti platí

$$S_{\Delta ABD} + S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2}|BD|(|AB| + |CD|) \le \frac{1}{2}\left(\frac{|AB| + |BD| + |CD|}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2.$$

Keďže platí

$$2 = S_{ABCD} \le S_{\Delta ABD} + S_{\Delta BCD} \le 2,$$

musí v každej z vyššie uvedených nerovností nastať rovnosť. Znamená to, že trojuholníky *ABD* a *BCD* sú pravouhlé s pravým uhlom pri vrchole *B*, resp. *D*, a platí

$$|BD| = |AB| + |CD|.$$

Potom

$$|BD| = |AB| + |CD| = 2.$$

Ak spustíme z bodu *C* výšku na priamku *AB* a jej pätu označíme *X*, tak z Pytagorovej vety v trojuholníku ACX dostávame, že platí

$$|AC| = \sqrt{|AX|^2 + |CX|^2} = \sqrt{(|AB| + |CD|)^2 + |BD|^2} = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}.$$

Hľadaná dĺžka úsečky *AC* je preto $2\sqrt{2}$.

4. Čísla strán knihy sú 1, 2, ... Ak sčítame všetky tieto čísla strán, ale jedno z nich započítame dvakrát, dostaneme 2006. Ktoré číslo sme započítali dvakrát a koľko strán má kniha?

Riešenie: Označme si počet strán knihy *n*. Potom sa súčet čísel strán rovná

$$1+2+\ldots+n+k,$$

kde *k* označuje číslo strany, ktorá bola započítaná dvakrát. Vieme, že platí $1 \le k \le n$. Potom musí platiť

$$1+2+\ldots+n+k=2006.$$

Upravením dostaneme, že platí

$$\frac{n\cdot(n+1)}{2}+k=2006.$$

Pre ľavú stranu tejto rovnice máme horné aj dolné ohraničenie z ohraničenia pre *k*:

$$\frac{n^2}{2}<\frac{n\cdot(n+1)}{2}+1\le\frac{n\cdot(n+1)}{2}+k\le\frac{n\cdot(n+3)}{2}<\frac{(n+2)^2}{2}.$$

Dostávame, že má platiť

$$\frac{n^2}{2}<2006<\frac{(n+2)^2}{2}.$$

Z týchto dvoch nerovností dostávame, že musí platiť

$$n<63{,}34<n+2.$$

Dve možné hodnoty *n* sú preto 62 a 63. Dosadením týchto hodnôt do rovnice

$$\frac{n\cdot(n+1)}{2}+k=2006$$

dostávame pre *k* hodnoty 53 a -10. Zrejme hodnota -10 nevyhovuje, a preto riešením úlohy je, že kniha má 62 strán a dvakrát sme započítali číslo 53.

5. Nájdite všetky riešenia rovnice

$$x+\frac{96}{x}=\lceil x\rceil+\frac{96}{\lceil x\rceil},$$

kde $\lceil x\rceil$ označuje hornú celú časť *x*, teda také celé číslo, pre ktoré platí $x\le\lceil x\rceil<x+1$.

Riešenie: Prenásobením rovnice zo zadania výrazom $x\cdot\lceil x\rceil$ dostávame, že platí

$$x^2\cdot\lceil x\rceil+96\cdot\lceil x\rceil=x\cdot\lceil x\rceil^2+96\cdot x.$$

Upravením tejto rovnice dostávame, že platí

$$(x\cdot\lceil x\rceil-96)\cdot(x-\lceil x\rceil)=0.$$

Prvá možnosť je, že $x=\lceil x\rceil$. Táto možnosť nastane len vtedy, keď je *x* celé číslo. Vzhľadom na to, že *x* sa vyskytuje v zadaní v menovateli zlomku, nesmie sa rovnať 0. Ak nie je *x* celé číslo, musí platiť

$$x\cdot\lceil x\rceil=96.$$

Keďže $x \le \lceil x \rceil$, tak $x^2 \le 96$ a $\lceil x \rceil^2 \ge 96$. Z poslednej nerovnosti dostávame, že $\lceil x \rceil \ge 10$, čo vzhľadom na podmienku $x^2 \le 96$ vedie k tomu, že $\lceil x \rceil = 10$. Keďže $x \cdot \lceil x \rceil = 96$, dosadením $\lceil x \rceil = 10$ dostávame, že $x = 9{,}6$. Riešením úlohy je teda každé nenulové celé číslo a číslo $9{,}6$.

Komentár a bodovanie: V tomto príklade sa ukázalo, že je dôležité prečítať si zadanie príkladu, pretože viacerí z vás riešili úlohu pre dolnú celú časť. Častou chybou bolo taktiež to, že ste zabudli na to, že *x* sa nemôže rovnať 0.

6. Nech *O* je taký bod vnútri rovnobežníka *ABCD*, pre ktorý platí

$$|\angle AOB| + |\angle COD| = 180°.$$

Dokážte, že $|\angle OBC| = |\angle ODC|$.

Riešenie: Posuňme rovnobežník *ABCD* o vektor $\overrightarrow{AD}$. Bod *A* sa zobrazí do bodu *D*, bod *B* do bodu *C* a bod *O* do bodu O'. Keďže platí

$$|\angle COD| + |\angle CO'D| = |\angle COD| + |\angle BOD| = 180°,$$

štvoruholník $CO'DO$ je tetivový, a teda je mu možné opísať kružnicu. Potom platí

$$|\angle ODC| = |\angle OO'C|.$$

Platí taktiež, že $|BC| = |OO'|$ a $BC \parallel OO'$. Preto je $BCO'O$ rovnobežník. Jeho protiľahlé uhly sú zhodné, preto platí

$$|\angle OO'C| = |\angle OBC|.$$

Spolu s vyššie uvedeným výsledkom tak dostávame, že platí

$$|\angle ODC| = |\angle OO'C| = |\angle OBC|,$$

čo sme mali dokázať.

7. Uvažujme abecedu, ktorá obsahuje len tri rôzne písmená *a*, *b*, *c*. Nájdite počet takých slov obsahujúcich práve *n* písmen, ktoré obsahujú párny počet písmen *a*.

Riešenie: Predpokladajme, že sa v slove nachádza $2k$ písmen *a*, kde *k* je nezáporné celé číslo. Tieto písmená môžeme umiestniť na $\binom{n}{2k}$ miest a ostatné miesta môžeme zaplniť 2^{n-2k} možnosťami (na každé z $n-2k$ zvyšných miest môžeme umiestniť buď písmeno *b* alebo písmeno *c*, teda máme dve možnosti pre každú pozíciu). Preto sa hľadaný počet slov rovná

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} \cdot 2^{n-2k},$$

kde $\lfloor x \rfloor$ označuje dolnú celú časť čísla x. Tento vzorec ešte upravíme. Využijeme pritom fakt, že platí

$$(1+x)^n + (1-x)^n = 2 \cdot \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} \cdot x^{2k}.$$

Ak zvolíme $x = \frac{1}{2}$, dostaneme, že platí

$$2^n \cdot \left(\left(1+\frac{1}{2}\right)^n + \left(1-\frac{1}{2}\right)^n \right) = 2 \cdot \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} \cdot 2^{n-2k},$$

odkiaľ dostávame, že platí

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} \cdot 2^{n-2k} = \frac{1}{2} \cdot \left(3^n + 1\right).$$

Komentár: K vyjadreniu počtu možností pomocou sumy došla väčšina z vás. Avšak ďalej ste sa už neunúvali počítať. Problém pri uvedení výsledku pomocou sumy je v tom, že pre veľmi veľké n by bolo potrebné spočítavať veľké množstvo výrazov. Preto sa snažte výsledky vždy udávať v takom tvare, v ktorom vystupujú len premenné zo zadania úlohy.

8. Nájdite najmenšie prirodzené číslo K také, že každá K-prvková podmnožina množiny $\{1,2,\ldots,50\}$ obsahuje dva rôzne prvky a, b také, že $a+b$ delí ab.

Riešenie: Nech K je hľadané najmenšie prirodzené číslo s vlastnosťou zo zadania. Označme S ľubovoľnú K-prvkovú podmnožinu množiny $\{1,2,\ldots,50\}$. Predpokladajme, že $a,b \in S$ sú také, že $a+b$ delí ab. Označme c najväčší spoločný deliteľ čísel a, b. Položme $a = ca_1$, $b = cb_1$. Potom a_1, b_1 sú nesúdeliteľné čísla. Potom $c \cdot (a_1 + b_1)$ delí $c^2 a_1 b_1$, teda $a_1 + b_1$ delí ca_1b_1. Keďže a_1, b_1 sú nesúdeliteľné čísla, tak sú aj čísla a_1 a $a_1 + b_1$, b_1 a $a_1 + b_1$ nesúdeliteľné. Preto $a_1 + b_1$ delí c. Keďže $S \subseteq \{1,2,\ldots,50\}$, tak $a+b \le 99$. Preto $c \cdot (a_1 + b_1) \le 99$ a keďže $a_1 + b_1$ delí c, tak platí, že $a_1 + b_1 \le 9$. Na druhej strane však určite platí $a_1 + b_1 \ge 3$. Rozobraním všetkých možností nájdeme 23 dvojíc a a b s požadovanou vlastnosťou:

$a_1 + b_1 = 3$: $(6,3)$, $(12,6)$, $(18,9)$, $(24,12)$, $(30,15)$, $(36,18)$, $(42,21)$, $(48,24)$
$a_1 + b_1 = 4$: $(12,4)$, $(24,8)$, $(36,12)$, $(48,16)$
$a_1 + b_1 = 5$: $(20,5)$, $(40,10)$, $(15,10)$, $(30,20)$, $(45,30)$
$a_1 + b_1 = 6$: $(30,6)$
$a_1 + b_1 = 7$: $(42,7)$, $(35,14)$, $(28,21)$
$a_1 + b_1 = 8$: $(40,24)$

$a_1 + b_1 = 9$: $(45,36)$

Označme $M = \{6,12,15,18,20,21,24,35,40,42,45,48\}$ a $T = \{1,2,\ldots,50\} - M$. Keďže každá dvojica z vyššie uvedených obsahuje aspoň jeden prvok *M*, množina *T* nemá požadovanú vlastnosť. Preto musí platiť $K \geq |T| + 1 = 39$. Na druhej strane z vyššie uvedených 23 dvojíc vieme vybrať 12, ktoré sú navzájom disjunktné: $(6,3)$, $(12,4)$, $(20,5)$, $(42,7)$, $(24,8)$, $(18,9)$, $(40,10)$, $(35,14)$, $(30,15)$, $(48,16)$, $(28,21)$, $(45,36)$. Každá 39-prvková podmnožina množiny $\{1,2,\ldots,50\}$ musí obsahovať oba prvky aspoň jednej dvojice. Preto je najmenšie hľadané číslo $K = 39$.

Komentár a bodovanie: Vo svojich riešeniach ste často zabúdali na niektoré dvojice alebo ste mali niektoré navyše, a tak ste dostávali iné hodnoty čísla *K*.

9. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $n \geq 3$ existujú také nepárne prirodzené čísla x_n, y_n, že platí $7x_n^2 + y_n^2 = 2^n$.

Riešenie: Pre $n = 3$ máme $x_3 = y_3 = 1$. Ďalej predpokladajme, že pre dané prirodzené číslo *n* máme nájdené nepárne prirodzené čísla x_n, y_n také, že $7x_n^2 + y_n^2 = 2^n$. Potom platí

$$7 \cdot \left(\frac{x_n \pm y_n}{2}\right)^2 + \left(\frac{7x_n \mp y_n}{2}\right)^2 = 2 \cdot \left(7x_n^2 + y_n^2\right) = 2^{n+1}.$$

Jedno z čísel $\frac{x_n + y_n}{2}$, $\frac{|x_n - y_n|}{2}$ je určite nepárne. Potom bude nepárne aj $\frac{|7x_n - y_n|}{2}$, resp. $\frac{7x_n + y_n}{2}$. Tým sme našli vyhovujúce x_{n+1} a y_{n+1}, čím sme tvrdenie úlohy dokázali.

Komentár a bodovanie: Úlohu nevyriešil nikto z vás, aj keď zadanie úlohy poskytovalo veľa možností riešenia.

10. Nech $x > 1$ je reálne číslo, ktoré nie je prirodzeným číslom. Pre $n \in \mathbf{N}$ definujeme $a_n = \lfloor x^{n+1} \rfloor - x\lfloor x^n \rfloor$. Dokážte, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nie je periodická.

Riešenie: Dôkaz urobíme sporom. Predpokladajme, že existuje $p > 0$ také, že $a_{n+p} = a_n$ pre každé *n*. Keďže $\lfloor x^n \rfloor \to \infty$ pre $n \to \infty$, musí pre nejaké *n* platiť $\lfloor x^{n+p} \rfloor - \lfloor x^n \rfloor > 0$. Riešením rovnice $a_{n+p} = a_n$ dostaneme, že

$$x = \frac{\lfloor x^{n+p+1} \rfloor - \lfloor x^{n+1} \rfloor}{\lfloor x^{n+p} \rfloor - \lfloor x^{n} \rfloor},$$

teda x je racionálne číslo. Položme $y = x^p$ a

$$b_m = \sum_{k=0}^{p-1} x^{p-k-1} a_{mp+k} = \lfloor x^{mp+p} \rfloor - x^p \lfloor x^{mp} \rfloor = \lfloor y^{m+1} \rfloor - y \lfloor y^m \rfloor.$$

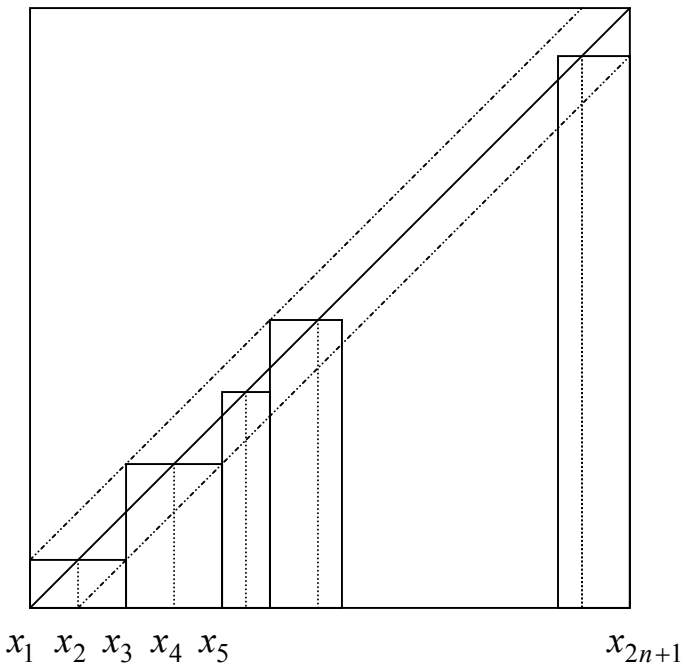
Keďže $a_{n+p} = a_n$, musí platiť aj $b_{m+1} = b_m$, a tak je aj y racionálne číslo, ktoré nie je prirodzené. Položme $c_m = \lfloor y^{m+1} - y^m \rfloor$. Potom $c_{m+1} = yc_m = y^m c_1$. Potom ale c_m nemôže byť prirodzené číslo pre dostatočne veľké m, čo je spor s predpokladom. Preto postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nie je periodická.

Komentár a bodovanie: Úlohu taktiež nikto z vás nevyriešil úplne. To, že x je racionálne číslo, sa vám zvyčajne podarilo dokázať, problémy však vznikali pri dokazovaní nenulovosti menovateľa príslušného zlomku.

11. Sú dané reálne čísla $0 = x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n} < x_{2n+1} = 1$, pričom platí $|x_{i+1} - x_i| \le h$ pre $1 \le i \le 2n$. Dokážte, že potom platí nerovnosť

$$\frac{1-h}{2} < \sum_{i=1}^{n} x_{2i} \cdot (x_{2i+1} - x_{2i-1}) < \frac{1+h}{2}.$$

Riešenie: Pri riešení tohto príkladu veľmi pomôže nakresliť si správny obrázok. Člen $x_{2i} \cdot (x_{2i+1} - x_{2i-1})$ môžeme reprezentovať ako obsah obdĺžnika so stranami dĺžky x_{2i} a $x_{2i+1} - x_{2i-1}$. Vidíme, že celkový obsah týchto obdĺžnikov bude blízky polovici obsahu štvorca so stranou 1. Celkový obsah však bude ležať medzi zvýraznenými čiarkovanými čiarami. Obsah trojuholníkov nad (a samozrejme aj pod) uhlopriečkou štvorca je menej než (ostrá nerovnosť nastáva kvôli ostrej nerovnosti medzi x_i v zadaní)



$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \cdot (x_{2i} - x_{2i-1}) \cdot (x_{2i} - x_{2i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \cdot h \cdot (x_{2i} - x_{2i-1}) < \frac{h}{2}.$$

To sme ale práve chceli dokázať, pretože z tohto dostávame, že platí

$$\frac{1}{2}-\frac{h}{2}<\sum_{i=1}^{n} x_{2i}\cdot\left(x_{2i+1}-x_{2i-1}\right)<\frac{1}{2}+\frac{h}{2}.$$

12. Dokážte, že pre každú dvojicu m, k prirodzených čísel existuje jednoznačné vyjadrenie m v tvare

$$m=\binom{a_k}{k}+\binom{a_{k-1}}{k-1}+\cdots+\binom{a_t}{t},$$

pričom $a_k > a_{k-1} > \ldots > a_t \geq t \geq 1$.

Riešenie: Najprv ukážeme jednoznačnosť. Predpokladajme, že m sa dá vyjadriť pomocou dvoch postupností $a_k, a_{k-1}, \ldots, a_t$ a $b_k, b_{k-1}, \ldots, b_u$. Nájdime prvú pozíciu, v ktorej sa tieto dve postupnosti líšia. Bez ujmy na všeobecnosti nech je táto pozícia k a nech platí $a_k > b_k$. Potom platí

$$m\leq\binom{b_k}{k}+\binom{b_k-1}{k-1}+\cdots+\binom{k_k-k+1}{1}<\binom{b_k+1}{k}\leq m,$$

čo je spor.

Existenciu dokážeme pomocou „pažravého“ algoritmu: Nájdime najväčšie číslo a_k také, že $\binom{a_k}{k}\leq m$ a aplikujme tento istý algoritmus, pričom m a k nahradíme číslami $m-\binom{a_k}{k}$ a $k-1$. Vzhľadom na to, že $m<\binom{a_k+1}{k}$, platí $m-\binom{a_k}{k}<\binom{a_k}{k-1}$. Preto je takto získaná postupnosť klesajúca, a teda algoritmus skončí po konečnom počte krokov. Tým sme dokázali aj existenciu hľadaného vyjadrenia.

13. Nech $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ je taká funkcia, že pre všetky $x,y\in\mathbf{R}$ platí

$$f\left(x^3+y^3\right)=(x+y)\left(f(x)^2-f(x)f(y)+f(y)^2\right).$$

Dokážte, že potom pre všetky $x\in\mathbf{R}$ platí $f(2006x)=2006f(x)$.

Riešenie: Položením $x=y=0$ v rovnici zo zadania dostávame, že $f(0)=0$. Ak položíme $y=0$, dostávame, že $f\left(x^3\right)=xf(x)^2$. Tento vzťah je ekvivalentný so vzťahom

$$f(x)=x^{1/3}f\left(x^{1/3}\right)^2.$$

Z tohto vyjadrenia vidíme, že ak $x\leq 0$, tak $f(x)\leq 0$, resp. ak $x\geq 0$, tak aj $f(x)\geq 0$. Definujme množinu S:

$$S=\{a>0: f(ax)=af(x) \text{ pre všetky } x\in\mathbf{R}\}.$$

Zrejme $1 \in S$. Teraz ukážeme, že ak $a \in S$, potom aj $a^{1/3} \in S$. Nech x je ľubovoľné reálne číslo. Potom

$$axf(x)^2 = af(x^3) = f(ax^3) = f\left(\left(a^{1/3}x\right)^3\right) = a^{1/3}xf\left(a^{1/3}x\right)^2,$$

teda platí

$$axf(x)^2 = a^{1/3}xf\left(a^{1/3}x\right)^2,$$

odkiaľ po úprave dostávame, že platí

$$\left[a^{1/3}f(x)\right]^2 = f\left(a^{1/3}x\right)^2.$$

Keďže x a $f(x)$ majú rovnaké znamienko, dostávame, že platí

$$a^{1/3}f(x) = f\left(a^{1/3}x\right),$$

teda $a^{1/3} \in S$.

Teraz ukážeme, že ak $a, b \in S$, potom aj $a + b \in S$:

$$f((a+b)x) = f\left(\left(a^{1/3}x^{1/3}\right)^3 + \left(b^{1/3}x^{1/3}\right)^3\right) = \left(a^{1/3} + b^{1/3}\right)\left[f\left(a^{1/3}x^{1/3}\right)^2 -\right.$$

$$\left. - f\left(a^{1/3}x^{1/3}\right)f\left(b^{1/3}x^{1/3}\right) + f\left(b^{1/3}x^{1/3}\right)^2\right] = \left(a^{1/3} + b^{1/3}\right)\left(a^{2/3} - a^{1/3}b^{1/3} + b^{2/3}\right)x^{1/3}f\left(x^{1/3}\right)^2 =$$

$$= (a+b)f(x).$$

Teraz už ľahko indukciou nahliadneme, že pre každé prirodzené číslo n platí $n \in S$, a teda pre všetky $x \in \mathbf{R}$ platí $f(2006x) = 2006f(x)$.

14. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $k > 1$ existuje jeho násobok menší než k^4, ktorého dekadický zápis obsahuje maximálne štyri rôzne cifry.

Riešenie: Nech n je také prirodzené číslo, pre ktoré platí $2^{n-1} \le k < 2^n$. Pre $n \le 6$ je tvrdenie úlohy triviálne, preto ďalej uvažujeme len $n > 6$. Označme S množinu tých nezáporných celých čísel menších než 10^n, ktorých dekadický zápis obsahuje len cifry 0 a 1. Keďže $|S| = 2^n > k$, existujú dva prvky a, b, $a > b$, množiny S také, že dávajú rovnaký zvyšok po delení číslom k. Zároveň dekadický zápis rozdielu $a - b$ obsahuje len cifry 0, 1, 8 a 9 a číslo $a - b$ je deliteľné číslom k. Ďalej platí

$$a - b \le a \le 1 + 10 + \cdots + 10^{n-1} < 10^n < 16^{n-1} \le k^4,$$

teda $a - b$ je hľadaný násobok čísla k.

Komentár a bodovanie: Vo vašich riešeniach sa našli dobré myšlienky, avšak neboli úplne dopracované do konca. Body ste získavali za každý dobrý nápad smerujúci k riešeniu.

Výsledky korešpondenčnej súťaže po 3. kole

Kategória Z

Por.	Priezvisko a meno	Škola	Trieda	Učiteľ	PS	1	2	3	4	Spolu
1.	Lopata Ján	ZŠ Svit	8. B	Božová	36	5	5	3	3	**52**
2.	Hornyák Zsolt	G s VJM Nové Zámky	Kvarta C	Hornyák	34	5	5	2	3	**49**
3.	Marák Karoly	G s VJM Nové Zámky	Kvarta C	Hornyák	29					**29**
4.	Ľupták Filip	IV. ZŠ Detva, J. J. Thurzu	6. A	Sadovská	9					**9**
	Dolný Martin	ZŠ Bratislava	8. A		9	0	0	0	0	**9**
	Melicharová Jana	ZŠ Bratislava	8. A		9	0	0	0	0	**9**
	Novotný Juraj	Košice			9	0	0	0	0	**9**
	Novotný Peter	Košice			9	0	0	0	0	**9**
	Stankovič Ján	ZŠ Bratislava	8. A		9	0	0	0	0	**9**
10.	Hudáková Jolana	ZŠ Bratislava	8. A		8	0	0	0	0	**8**
11.	Starcová Zuzana	Žilina			8	0	0	0	0	**8**
	Takáč Martin	ZŠ Bratislava	8. B		7	0	0	0	0	**7**
	Varga Peter	ZŠ Bratislava	8. A		7	0	0	0	0	**7**
	Vargová Andrea	ZŠ Bratislava	8. A		7	0	0	0	0	**7**
15.	Perner Stanislav	ZŠ Bratislava	8. B		1	0	0	0	0	**1**

Kategória C

Por.	Priezvisko a meno	Škola	Trieda	Učiteľ	PS	3	4	5	6	Spolu
1.	Herencsár Albert	G s VJM Z. Kodálya, Galanta	5. G	Gešková	31	5	5	5	5	**51**
2.	Flimmel Samuel	G Púchov	Kvinta	Jančiová	28		3	5		**36**
3.	Žársky Mário	G Púchov	Kvinta	Jančiová	21		3			**24**
4.	Hujer Peter	G Nitra, Párovská	Kvinta	Bíro	15					**15**
	Melchertová Anna	G Nitra, Párovská	Kvinta	Bíro	15					**15**
	Pažický Denis	G Nitra, Párovská	Kvinta	Bíro	15					**15**
	Vargová Natália	G Nitra, Párovská	Kvinta	Bíro	15					**15**
8.	Proksa Ondrej	G Nitra, Párovská	Kvinta	Bíro	9					**9**
9.	Suchetková Mária	G s VJM Šahy	1	Gajdácsová	8					**8**
10.	Slabý Zdenko	Žilina			7	0	0	0	0	**7**
11.	Králik Michal	Bratislava			5	0	0	0	0	**5**
12.	Bakošová Zuzana	Bratislava			4	0	0	0	0	**4**
	Konečný Milan	Košice			4	0	0	0	0	**4**
	Struhár Ján	Poprad			4		0	0	0	**4**
	Studený Alfonz	Košice			4	0	0	0	0	**4**

Kategória B

Por.	Priezvisko a meno	Škola	Trieda	Učiteľ	PS	5	6	7	8	Spolu
1.	Boža Vladimír	G Poprad, D. Tatarku	2. C		39	3	0	3	5	**50**
2.	Živčáková Andrea	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	2. F	Minarovič	38	4	0	3	4	**49**
3.	Juríková Katarína	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	2. F	Oravcová	35	5		3		**43**
	Kobza Vladimír	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	2. F	Minarovič	35	5	0		3	**43**
	Perešíni Ondrej	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	2. F	Oravcová	35	2		4	2	**43**
	Vrbovská Mária	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	2. F	Oravcová	35	5	0	3		**43**
7.	Kucbel Maroš	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	2. F	Minarovič	34					**34**
8.	Šiagi Miroslav	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	2. F	Oravcová	33					**33**
9.	Zubnárová Katarína	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	2. F	Oravcová	21	2	0		1	**24**
10.	Alberty Roman	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	2. F	Oravcová	17					**17**
11.	Kolesíková Mária	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	2. F	Minarovič	13					**13**
12.	Pagáč Martin	G Púchov	Sexta	Tanečková	12					**12**
13.	Dobrotka Tomáš	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	2. F	Oravcová	11					**11**
	Nemec Juraj	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	2. F	Oravcová	11					**11**
15.	Slovík Lukáš	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	2. F	Oravcová	9					**9**
16.	Blesák Viktor	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	2. F	Oravcová	7					**7**

Kategória A

Por.	Priezvisko a meno	Škola	Trieda	Učiteľ	PS	7	8	9	10	Spolu
1.	Derňár Marek	OG Košice, Alejová 1	Septima B	Vavrinčíková	40	5	5	0	2	**52**
	Škrovinová Katarína	G Nitra, Párovská	Oktáva	Teplička	40	5	5	1	1	**52**
3.	Blicha Martin	OG Košice, Alejová 1	Septima B	Vavrinčíková	38	4	5		2	**49**
	Takács Michal	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	4. F	Oravcová	40	5	3		1	**49**
5.	Perešíni Peter	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	4. F	Oravcová	40	5				**45**
6.	Knebl Jaroslav	G A. Bernoláka, Námestovo	Oktáva B	Kompanová	40					**40**
	Veselovská Lenka	G M. M. Hodžu Liptovský Mikuláš	Oktáva	Žiaková	35	2	3			**40**
8.	Holecyová Mária	G Nitra, Párovská	Septima	Teplička	35					**35**
9.	Bertová Slávka	OG Košice, Alejová 1	Oktáva B	Krajčiová	29					**29**
10.	Ficzová Monika	OA Šurany	3. A	Lauro	26					**26**
11.	Ľuptáková Paula	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	4. F	Minarovič	14					**14**
12.	Blštáková Dominika	G Hlohovec	3. B	Vavrová	10					**10**
	Vranovský Michal	Nitra			10					**10**
	Minárová Silvia	G Hlohovec	3. B	Vavrová	7					**7**
14.	Balún Tomáš	G Prešov			-		5			**5**

Kategória π

Por.	Priezvisko a meno	Škola	Trieda	Učiteľ	PS	11	12	13	14	Spolu
1.	Škrovinová Katarína	G Nitra, Párovská	Oktáva	Teplička	37	1	5	2	3	**48**
2.	Derňár Marek	OG Košice, Alejová 1	Septima B	Vavrinčíková	36	3	1	1	3	**44**
3.	Takács Michal	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	4. F	Oravcová	36				5	**41**
4.	Perešíni Peter	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	4. F	Oravcová	34					**34**
5.	Knebl Jaroslav	G A. Bernoláka, Námestovo	Oktáva B	Kompanová	32					**32**
6.	Blicha Martin	OG Košice, Alejová 1	Septima B	Vavrinčíková	30			1		**31**
	Boža Vladimír	G Poprad, D. Tatarku	2. C		31					**31**
8.	Ficzová Monika	OA Šurany	3. A	Lauro	5					**5**
9.	Proksa Ondrej	G Nitra, Párovská	Kvinta	Bíro	2					**2**

MINIMIX – Riešenia úloh 3. kola

7. Namiesto * doplňte cifry 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 do troch sčítancov. Jeden sčítanec je dvojnásobkom iného sčítanca. Posledný sčítanec je ľubovoľný. Cifry sa môžu opakovať. Cifra 0 nemôže byť na mieste stoviek. Vypíšte všetky možnosti riešenia úlohy.

$$\begin{array}{ccc} * & * & 1 \\ * & 2 & * \\ * & * & * \\ \hline 6 & 5 & 3 \end{array}$$

Riešenie: Je 6 možností riešenia úlohy:

111	111	281	311	161	161
222	320	124	228	328	322
320	222	248	114	164	170
653	653	653	653	653	653

8. 15 detí bolo s pani učiteľkou na výlete. Zastavili sa pri občerstvení, kde predávali džús po 20 Sk, kofolu po 12 Sk a minerálnu vodu po 7 Sk. Pani učiteľka kúpila každému dieťaťu jeden nápoj. Za všetky zaplatila spolu 190 Sk. Zistite, koľko detí dostalo džús, koľko kofolu a koľko minerálku.

Riešenie: Za džús môžeme zaplatiť dvadsaťkorunáčkami. Potom za minerálne vody spolu s kofolami môžeme zaplatiť hodnotami peňazí 50 Sk, 70 Sk, 90 Sk, 110 Sk, 130 Sk, 150 Sk, 170 Sk. Zostavme tabuľku pre minerálne vody a kofoly:

Počet nápojov	1	2	3	4	5	6	7	8
Suma za minerálne vody v Sk	7	14	21	28	35	42	49	56
Suma za kofoly v Sk	12	24	36	48	60	72	84	96

V tabuľke hľadáme také dve čísla v 2. a 3. riadku, aby ich súčet tvorilo číslo, ktoré má na mieste jednotiek 0 a na mieste desiatok nepárne číslo. Zoberme čísla 14 a 36, čiže

$$2 \times 7 + 3 \times 12 = 50.$$

Znamená to, že dvaja žiaci si kúpili minerálnu vodu a traja žiaci kofolu. Potom si zvyšných 10 žiakov kúpilo džús, čo je 200 Sk. Učiteľka by musela zaplatiť spolu

50 Sk + 200 Sk = 250 Sk,

čo však nie je možné. Zoberme inú dvojicu: 42 a 48, čo znamená, že

$$6 \times 7 + 4 \times 12 = 90.$$

Potom si zvyšných 5 žiakov mohlo kúpiť džús za 100 Sk. Riešením úlohy potom je, že džús si kúpilo 5 žiakov, kofolu 4 žiaci a minerálnu vodu 6 žiakov.

9. Pán Veselý poslal syna Mirka odniesť balík s hmotnosťou 10 kg na poštu. Pošta bola od ich bydliska vzdialená 1,6 km. Druhého syna Tomáša požiadal, aby odnášal koše s jablkami od každého stromu v záhrade do stodoly. Každý kôš s jablkami mal hmotnosť 10 kg. V záhrade bolo 12 stromov. Rástli v rade za sebou a vzdialenosť medzi nimi bola 10 m. Prvý strom bol od stodoly, kam sa jablká ukladali, vzdialený tiež 10 m. Zistite, ktorý z bratov niesol bremeno po dlhšej dráhe.

Riešenie: Vzdialenosť od stodoly k 1. stromu a späť je 10 m. Vzdialenosť od stodoly k 2. stromu je 20 m atď., čo môžeme bez udania dĺžky zapísať

$$10 + 20 + 30 + 40 + 50 + 60 + 70 + 80 + 90 + 100 + 110 + 120.$$

Ak prvé číslo spočítame s posledným, druhé s predposledným atď., potom

$$(10 + 120) + (20 + 110) + (30 + 100) + (40 + 90) + (50 + 80) + (60 + 70) =$$
$$= 130 + 130 + 130 + 130 + 130 + 130 = 6 \times 130 = 780,$$

čo znamená, že Tomáš niesol bremeno 780 m. Mirko niesol bremeno 1 600 m. Mirko niesol teda bremeno po dlhšej dráhe ako Tomáš.

MINIMIX – Výsledky po 3. kole

	Meno	Učiteľ	Základná škola	Tr.	1. – 6.	7.	8.	9.	Σ
1.	Zuzanka Králiková		Bruselská ul., Košice	2.C	60	8	10	10	88
	Alexandra Žilková	I. Macáková	Benkova 34, Nitra	4.U	60	8	10	10	88
3.	Martina Pivarníková	D. Vajková	Krosnianská 4, Košice	3.A	60	6	9	10	85
4.	Adam Múdry	D. Vajková	Krosnianská 4, Košice	3.B	58	6	10	10	84
	Martin Vrabac	V. Ferenčíková	Krosnianská 4, Košice	4.A	60	4	10	10	84
	Peter Vook	V. Ferenčíková	Krosnianská 4, Košice	4.B	60	8	10	6	84
7.	Zuzana Krajčovičová		Mierova 134, Svit	4.A	60	2	10	10	82
8.	Michal Benej	V. Ferenčíková	Krosnianská 4, Košice	4.B	60	4	10	6	80
9.	Denis Rozložník	V. Ferenčíková	Krosnianská 4, Košice	4.A	60	0	10	8	78
10.	Miroslav Novák	V. Ferenčíková	Krosnianská 4, Košice	4.B	60		10	6	76
11.	René Michal Cehlár	D. Vajková	Krosnianská 4, Košice	3.A	52	2	10	10	74
	Cyril Pavlovič	D. Vajková	Krosnianská 4, Košice	3.B	52	2	10	10	74
13.	Jakub Cimbala	V. Ferenčíková	Krosnianská 4, Košice	4.A	50	4	9	10	73
14.	Roman Staňo	V. Ferenčíková	Krosnianská 4, Košice	4.B	55	6	5	6	72
15.	Jakub Hromada	V. Ferenčíková	Krosnianská 4, Košice	4.B	49	6	10	6	71
	Štefan Masič	V. Ferenčíková	Krosnianská 4, Košice	4.A	49	2	10	10	71
17.	Dominik Benko	V. Ferenčíková	Krosnianská 4, Košice	4.B	48	8	10	4	70
18.	Florián Hatala	V. Ferenčíková	Krosnianská 4, Košice	4.B	40	9	10	10	69
	Daniel Hajduk	V. Ferenčíková	Krosnianská 4, Košice	4.B	45	4	10	10	69
20.	Jakub Kupčík	V. Ferenčíková	Krosnianská 4, Košice	4.B	46	4	10	6	66
21.	Michal Greššák	V. Ferenčíková	Krosnianská 4, Košice	4.A	45	2	10	7	64
	Rastislav Zdechovan	V. Ferenčíková	Krosnianská 4, Košice	4.A	44	4	10	6	64
23.	Tomáš Daneshjo	V. Ferenčíková	Krosnianská 4, Košice	4.A	36	8	8	10	62
24.	Milan Ďurjančík	I. Macáková	Benkova 34, Nitra	4.U	60				60
	Milan Gašparík	K.Kunová	Benkova 34, Nitra	4.U	60				60
	Janka Ondrejčáková	I. Macáková	Benkova 34, Nitra	4.U	60				60
	Viktória Žilková	K. Kiačková	Benkova 34, Nitra	2.T	40		10	10	60
28.	Jakub Ács	K. Kiačková	Benkova 34, Nitra	4.T	59				59

29.	Dušan Buček	K. Kunová	Benkova 34, Nitra	4.U	58				58
30.	Katarína Burdová	V. Ferenčíková	Krosnianská 4, Košice	4.A	33	4	10	10	57
	Majo Ivančík	K. Kiačková	Benkova 34, Nitra	4.U	57				57
	Saška Šabová	I. Urcikánová	Benkova 34, Nitra	3.U	57				57
	Soňa Vargová	D. Vajková	Krosnianská 4, Košice	3.B	43	4	10	0	57
34.	Petra Eškutová	V. Ferenčíková	Krosnianská 4, Košice	4.B	38	2	10	6	56
	Oliver Koreň	V. Ferenčíková	Krosnianská 4, Košice	4.A	45	2	0	9	56
	Šimon Tabačko	D. Vajková	Krosnianská 4, Košice	3.A	44	2	0	10	56
37.	Jakub Gubáň	K. Kiačková	Benkova 34, Nitra	4.T	54				54
38.	Mário Bujňák	D. Vajková	Krosnianská 4, Košice	3.B	33	0	10	9	52
39.	Jakub Marták	I. Urcikánová	Benkova 34, Nitra	3.U	51				51
	Adam Örlahmi	D. Vajková	Krosnianská 4, Košice	3.A	35	4	2	10	51
	Robert Selvek	D. Vajková	Krosnianská 4, Košice	3.A	27	4	10	10	51
42.	Arek Antonewicz	K. Kiačková	Benkova 34, Nitra	4.T	48				48
	Monika Kunayová	D. Vajková	Krosnianská 4, Košice	3.B	36	2	10	0	48
44.	Richard Černík	D. Vajková	Krosnianská 4, Košice	3.B	26	2	10	8	46
	Mária Kapasná	D. Vajková	Krosnianská 4, Košice	3.B	29	2	10	5	46
	Jakub Krajňák	V. Ferenčíková	Krosnianská 4, Košice	3.B	33	0	10	3	46
47.	Faustíba Ciprusová	V. Ferenčíková	Krosnianská 4, Košice	4.A	33	0	10	2	45
	Tara Stefanyi	D. Vajková	Krosnianská 4, Košice	3.B	26	2	10	7	45
	Niki Stripaj	D. Vajková	Krosnianská 4, Košice	3.A	30	2	10	3	45
50.	Petra Tocíková	D. Vajková	Krosnianská 4, Košice	3.B	27	2	10	5	44
51.	Xénia Baranová	V. Ferenčíková	Krosnianská 4, Košice	4.B	34	0	4	3	41
52.	Laura Fabianová	D. Vajková	Krosnianská 4, Košice	3.A	38	0	0	1	39
53.	Adam Kollár	D. Vajková	Krosnianská 4, Košice	3.A	30	4	2	2	38
54.	Samuel Alezár	D. Vajková	Krosnianská 4, Košice	3.A	31	2	1	2	36
55.	Tomáš Petty	D. Vajková	Krosnianská 4, Košice	3.B	21	0	4	10	35
56.	Mária Lukáčová	D. Vajková	Krosnianská 4, Košice	3.B	29	2	0	3	34
	Terézia Volavková	D. Vajková	Krosnianská 4, Košice	3.A	24	0	0	10	34
58.	Deniska Strončeková	D. Vajková	Krosnianská 4, Košice	3.B	32	0	0	0	32
59.	Evka Marková	D. Vajková	Krosnianská 4, Košice	3.B	5	6	10	10	31
	Dušan Zis	V. Ferenčíková	Krosnianská 4, Košice	4.A	15	2	8	6	31
61.	Patrícia Čigášová	K. Kiačková	Benkova 34, Nitra	4.T	30				30
	Daniel Rozický	V. Ferenčíková	Krosnianská 4, Košice	4.A	19	2	0	9	30
	Sophia Sommerová	K. Kiačková	Benkova 34, Nitra	4.T	30				30
64.	Michal Bali	K. Kiačková	Benkova 34, Nitra	4.T	25				25
	Matúš Greguš	K. Kiačková	Benkova 34, Nitra	4.T	25				25
66.	Mário Igáz	K. Kiačková	Benkova 34, Nitra	4.T	23				23
67.	Lucia Káčeriková	K. Kunová	Benkova 34, Nitra	4.U	19				19
	Sarah Shahpesandy	V. Ferenčíková	Krosnianská 4, Košice	4.B	19				19
69.	Katka Krajčiová		Jenisejská 22, Košice	3.B	18				18
70.	Terézia Marková	D. Vajková	Krosnianská 4, Košice	3.B	5	2	5	5	17
71.	Jakub Lokša	D. Vajková	Krosnianská 4, Košice	3.A	12	0	0	1	13
72.	Barbora Latečková	K. Kiačková	Benkova 34, Nitra	4.U	5				5

Penrose, R.: Makrosvět, mikrosvět a lidská mysl

Praha, Mladá fronta 1999

„*Jednou z pozoruhodných vecí na javoch nášho sveta je, s akou neobyčajnou presnosťou mu vládnu matematické zákony.*“ *Roger Penrose*, profesor matematiky na univerzite v Oxforde, uznávaná osobnosť v mnohých oblastiach matematiky i teoretickej fyziky, ponúkol svoju víziu súvislostí medzi matematikou, fyzikou a ľudskou mysľou. V troch kapitolách (*Prostoročas a kosmologie, Záhady kvantové fysiky, Fysika a mysl*) rozviedol svoje predstavy o činnosti vedomia i slobodnej vôle. Okrem iného uvádza možnosť vstupu nejakého druhu nevypočítateľnosti, ktorého charakter vníma pri pokuse kombinovať všeobecnú teóriu relativity s kvantovou mechanikou. Nevypočítateľnosť v matematickom porozumení berie ako črtu celého vedomia. Ďalšie tri kapitoly tejto podnetnej knižky sú príspevky zhrňujúce námietky proti Penroseovým myšlienkam (od A. Shimonyho, N. Cartwrightovej a S. Hawkinga). V siedmej kapitole Roger Penrose odpovedá na tieto komentáre ich autorom.

Publikácia je parádnou ukážkou spôsobu debaty odborníkov o otvorených otázkach súčasnej vedy pred čitateľmi túžiacimi po intelektuálnych zážitkoch. Spolu tak uznajú Penroseovo presvedčenie: „*Je dôležité vedieť spoznať hádanky, keď už do nich narazíme.*“

Dušan Jedinák

Objednávka

Objednávame u Vás ..... ks časopisu MATMIX na školský rok 2006/2007.

Časopisy zasielajte na adresu:

Škola (Meno): .....

Ulica, číslo: .....

PSČ, miesto: .....

Telefón: ..... E-mail: .....

.....

podpis

O b s a h

Redakčná pošta ..... 2. strana obálky
Dušan Jedinák: Karl Weierstrass – neobyčajne svedomitý matematik 1
Pozvánka na školenie učiteľov zamerané na inovačné metódy vo vyučovaní matematiky 3
Celoštátne kolo súťaže SOŠ a SOU Praktická matematika, šk. rok 2005/2006 5
Výsledkové listiny celoštátneho kola súťaže Praktická matematika 9
Zadania úloh 56. ročníka Matematickej olympiády v školskom roku 2006/2007 10
- Kategória Z4 10
- Kategória Z5 11
- Kategória Z6 13
- Kategória Z7 14
- Kategória Z8 15
- Kategória Z9 16
- Kategória C 17
- Kategória B 18
- Kategória A 18

Riešenia úloh 3. série korešpondenčnej súťaže 19
Výsledky korešpondenčnej súťaže po 3. kole – kategória Z 28
Výsledky korešpondenčnej súťaže po 3. kole – kategória C 28
Výsledky korešpondenčnej súťaže po 3. kole – kategória B 29
Výsledky korešpondenčnej súťaže po 3. kole – kategória A 29
Výsledky korešpondenčnej súťaže po 3. kole – kategória π 29
MINIMIX – Riešenia úloh 3. kola 30
MINIMIX – Výsledky po 3. kole 31
Dušan Jedinák: Penrose, R.: Makrosvět, mikrosvět a lidská mysl ..... 3. strana obálky

---

MATMIX – matematický časopis pre žiakov základných a stredných škôl, vydáva Metodicko-pedagogické centrum v Bratislave na Tomášikovej ulici s finančnou podporou Európskeho sociálneho fondu ako pomocnú literatúru pre PK matematiky a pre žiakov so záujmom o matematiku.

Šéfredaktor: RNDr. Ľudovít Hrdina, CSc.

Redakcia: PhDr. Katarína Dzúriková, Ing. Mgr. Martin Hriňák, PhDr. Soňa Hronská

Tlač a väzba: Eduard Rác

Vydavateľ: Metodicko-pedagogické centrum, Tomášikova 4, P. O. BOX 14, 820 09 Bratislava 29

Adresa redakcie: Metodicko-pedagogické centrum, MATMIX, resp. pre 1. stupeň ZŠ MINIMIX, Tomášikova 4, P. O. BOX 14, 820 09 Bratislava 29

Telefóny: 02/ 48 20 94 32, 43 42 22 53, 43 42 57 90 **Fax:** 02/ 43 33 59 46

E-mail: hrdina@mctba.sk, hrinak@mctba.sk

www stránka: www.matmix-web.sk

Registračné číslo MK SR: 3449/2005

ISSN: 1336-7854

Náklad: 600 ks

Vychádza 4-krát ročne.