Prípad Galileo Galilei

Vo Vatikánskej akadémii vied 10. novembra 1979 pri príležitosti stého výročia narodenia A. Einsteina pripomenul pápež Ján Pavol II.: „*Chcel by som, aby teológovia, vedci a historici úprimne sa riadiac ideou spolupráce, hlbšie analyzovali prípad Galileiho a otvorene priznali vinu tým, na kom skutočne leží, aby pomohli vykoreniť nedôveru, ktorú táto záležitosť ešte stále vyvoláva v hlavách mnohých, prekážajúc dôjsť k plodnému súhlasu medzi vedou a vierou…*“ V sobotu 31. 10. 1992 pápež zrušil rozsudok, ktorý nad Galileim vyhlásila inkvizícia a rehabilitoval tým talianskeho vedca. Privretá brána medzi vedou a vierou sa predsa len otvorila. Máme znovu možnosť zamyslieť sa nad prípadom *Galilea Galileiho*, ktorý poznal silu a mohutnosť ľudského rozumu: „*Kto by chcel tvrdiť, že bolo videné a poznané všetko, čo je vo svete prístupné zmyslom a poznateľné?*“ Pripomeňme si jeho osud.



Narodil sa v Pise 15. februára 1564, v roku, keď zomrel Michelangelo Buonarotti. Stal sa vrstovníkom Shakespeara, Descartesa, Keplera a Rubensa. Žil v dobe doznievajúcej renesancie, vo vlnách reformácie a protifeudálnych vzbúr. Od otca pochytil vzťah k hudbe a literatúre. Už v mladosti rád konštruoval modely strojov a mechanických hračiek. Gréčtinu a latinčinu si osvojil v kláštore Vellombros. Na žiadosť otca šiel študovať medicínu na univerzitu v Pise. Lekárstvo v tej podobe, ako sa vtedy vyučovalo, nebolo pre Galileiho príťažlivé. Ostilio Ricci zasvätil mladého Galileiho do Euklidovej matematiky a Archimedových výpočtových aplikácií vo fyzike. Nový svet racionálnych dôkazov, presných vzorcov a logického myslenia mladého Galileiho očaroval. Spoznal, že matematika je prostriedok poznávania a presného popisu prírodných javov: „*Príroda je napísaná vo veľkej knihe, ktorú máme stále otvorenú pred sebou. Myslím tým vesmír. Tejto knihe porozumieme, ak si osvojíme jej jazyk a spoznáme litery, ktorými je napísaná. Jej jazyk je jazykom matematiky a písmenami sú trojuholníky, kruhy a iné geometrické útvary.*“ Odvtedy sa nezaujímal o nič iné ako o matematiku a fyziku. „*Ak by som sa mal znovu začať vzdelávať, tak by som postupoval podľa Platónovej rady a začal by som najskôr s matematikou ako vedou vyžadujúcou presnosť a presadzujúcou za pravdivé iba to, čo z dokázaného vyplýva ako dôsledok.*“

Vzhľadom na svoje bohaté vedomosti a na príhovor matematika Guidobalda del Monte dostal Galilei v roku 1589, i napriek tomu, že nemal žiadny diplom, miesto na katedre matematiky na univerzite v Pise. Roku 1592 presídlil na univerzitu do Padovy. Tam pôsobil celých osemnásť rokov. Roku 1610 prijal ponuku Cosima II. a stal sa vo Florencii „*prvým matematikom a filozofom vojvodcu toskánskeho*“.

Noc na 7. januára 1610 bola priaznivá pre pozorovanie oblohy. Galileo Galilei zamieril ďalekohľad na Jupiter. V jeho blízkosti zbadal štyri slabé „hviezdičky“. Nasledujúcu noc svoju polohu nápadne zmenili, ale predsa sa len držali v jednej čiare blízko ekliptiky: zrejme krúžili okolo Jupitera. Obloha odhalila novú pravdu nebeskej mechaniky. Už predtým Galilei spoznal, že povrch Mesiaca nie je plochý, ale že z neho vystupujú horské hrebene a je pokrytý krátermi. Pomocou ďalekohľadu rozpoznal v bledom páse Mliečnej cesty zástupy jednotlivých hviezd. Vesmír v poli ďalekohľadu zjavoval nové rozmery a nečakané situácie.

Neskôr Galileiho ďalekohľad odhalil slnečné škvrny a objavil Venušine fázy. Predstava rotujúceho Slnka, odraz slnečného svetla od Mesiaca a Venuše, pohyb Jupiterových mesiačikov, to všetko presvedčovalo Galileiho o Kopernikovej pravde: Stredom vesmíru je Slnko, planéty a Zem ako planéta krúžia okolo neho. Tradičné geocentrické názory sa otriasli.



Matematika ani fyzika neboli vtedy rozhodujúcimi argumentmi. Autoritou bolo Písmo sväté a cirkev. Neslávne spory o Kopernikovej náuke priviedli Galileiho roku 1611 do Ríma. Vtedy ešte obhájil svoje astronomické objavy a z nich vyplývajúce netradičné hypotézy. Odvtedy sa polemika ideologickej moci a túžby po pravde už iba stupňovala. Cesta do Ríma v roku 1633 priviedla starnúceho Galileiho k pokoreniu a mocenskému popretiu jeho objavov. Ďalších deväť rokov prežil v Arcetri neďaleko Florencie, kde aj zomrel 8. 1. 1642. Pochovaný je v kostole Santa Croce vo Florencii. Až po 95 rokoch mu tam postavili dôstojný náhrobok.

Galilei uskutočnil svoj prvý objav v roku 1583. Zistil, že doba kyvu kyvadla nezávisí od jeho hmotnosti a veľkosti rozkyvu, ale mení sa iba s dĺžkou kyvadla. Svoj vynález hydrostatických váh a stanovenie poučiek o určovaní ťažiska niektorých pevných telies opísal v roku 1586. Termoskop ako prototyp teplomera a stroj na zdvíhanie vody ho zamestnávali do roku 1593.

V roku 1609 pri pobyte v Benátkach sa Galilei dozvedel o holandskom vynáleze ďalekohľadu. Sám skonštruoval pomerne účinný ďalekohľad a ako prvý ho použil na astronomické pozorovanie. Svoje astronomické objavy uverejnil po latinsky v roku 1610 v spise *Sidereus nuntius – Hviezdny posol*. Galileiho oči uvideli nové hviezdy, ich fyzikálne zvláštnosti a meniace sa polohy. Jeho pozorná dedukcia ho nezadržateľne viedla k novému planetárnemu systému. Rozchod s náboženskou tradíciou bol už iba logickým dôsledkom: „*Biblia učí ako sa dostať do neba, a nie ako sa nebo točí.*“ Galilei bránil vedu ako pravdivého interpreta prírody tým, že odhaľoval zákony stvoreného sveta. Bol pevne presvedčený o tom, že „*dve pravdy si nemôžu nikdy odporovať... Skutočne si nemyslím, že by bolo treba pripustiť, že ten istý Boh, ktorý nám dal zmysly, rozum a pochopenie, by chcel, aby sme zanedbávali ich použitie, že by nám poučenie, ktoré môžeme dostať cez ne, poskytol iným spôsobom a že by nás takto chcel priviesť k popretiu skúsenosti a rozumu…*“.



Galileo Galilei vydal v roku 1632 svoj slávny spis *Dialóg o dvoch najväčších svetových sústavách*. Tam rozvinul nové myšlienky, definoval pojem rýchlosti a zrýchlenia. Rozobral problém skladania pohybov a sformuloval myšlienku relatívnosti pohybov. Galileiho princíp relativity sa stal jedným zo základných postulátov klasickej mechaniky.



Napriek tomu, že rímska cenzúra schválila vydanie „Dialógu“, spor o nový svetonázor vyvrcholil inkvizičným súdnym procesom v roku 1633. Vo veľkej sále kláštora Santa Maria sopra Minerva v stredu 22. júna 1633 skoro sedemdesiatročný Galileo Galilei, po vyslovení podozrenia z kacírstva, podpisuje odvolanie.

Slávny nemecký matematik D. Hilbert raz v debate o G. Galileiovi poznamenal: „*Len idiot môže veriť, že vedecká pravda potrebuje mučeníctvo; to je možno nevyhnutné v náboženstve, no vedecké výsledky sa overujú časom.*“

Zaujímavú skutočnosť okolo astronomických pozorovaní G. Galileiho odhalil v roku 1982 americký astronóm C. T. Kowal a kanadský historik S. Drake. Znovu prezreli pozorovacie náčrtky Galilea Galileiho, do ktorých zakresľoval relatívne polohy ním objavených Jupiterových mesiačikov voči samotnej planéte. Zistili, že Galilei zaznačil v decembri 1612 a v januári 1613 planétu Neptún ako „hviezdičku“. Galilei si nevšimol, že sa behom mesiaca táto „hviezdička“ oproti ostatným hviezdam posunula. Bol by tak objavil novú planétu, ktorú objavil J. Galle až o 254 rokov neskôr. Aj vďaka Galileiho pozorným náčrtkom polohy „hviezdičky“ Neptún, ktorá je však oproti dnešným výpočtom dosť rozdielna, vzniká pre súčasných astronómov otázka, či na dráhu planéty Neptún nemá vplyv okrem Pluta aj iné neznáme teleso.

Galilei zostane príkladom vedca, ktorý objavil matematické zákony v lone prírody, aby hľadal pravdu, ktorá pomáha človeku pri pochopení vesmíru. „*Základný motív Galileiho diela vidím vo vášnivom boji proti akejkoľvek viere opierajúcej sa o autoritu. Jediným kritériom pravdy bola pre neho vlastná skúsenosť a svedomitá rozvaha. Dnes si už ťažko môžeme predstaviť, akým nebezpečným a revolučným bol takýto postoj v jeho dobe.*“ Takto vystihol všeobecný prínos Galileiho života a diela Albert Einstein.

Z Galileiho sa stal symbol moderných vedeckých názorov. Spôsob jeho práce v poznávaní prírody, skúsenosť, experiment, priame poznanie faktov, pokus ako previerka hypotézy sa stali prelomom. Spoznal zásadný význam príčinnosti vo vede a vykonal rozhodujúci krok pre kvantitatívne poňatie vedy. Vypozoroval, že „*ľudský intelekt poznáva niektoré pravdy tak dokonale a s takou absolútnou istotou ako sama príroda*“. Jeho myšlienkové konštrukcie už obsahovali matematické skutočnosti. Väzba prírodných vied a matematiky s ľudským životom je odvtedy stále tesnejšia, bezprostrednejšia a plodnejšia.

Dušan Jedinák

45. ročník Medzinárodnej matematickej olympiády
Atény, 6. – 18. 7. 2004

V dňoch 6. – 18. júla 2004 sa v Grécku uskutočnila 45. Medzinárodná matematická olympiáda (IMO). Zúčastnilo sa jej 486 žiakov stredných škôl z 85 krajín. Každá krajina mohla vyslať najviac 6 súťažiach. Slovensko reprezentovali:

Jozef Bodnár, Gymnázium Fiľakovo, 3. ročník,
Ondrej Budáč, Gymnázium Lučenec, 2. ročník,
Hana Budáčová, Gymnázium Lučenec, 4. ročník,
Peter Černo, Gymnázium Trenčín, 3. ročník,
František Simančík, Gymnázium Bratislava, Grösslingová, 3. ročník,
Tomáš Váňa, Gymnázium Žiar nad Hronom, 4. ročník.

Pedagogickým vedúcim družstva bol Ján Mazák, študent FMFI Bratislava, vedúcim výpravy SR bol predseda Slovenskej komisie matematickej olympiády (SKMO) doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc. z fakulty PEDaS ŽU v Žiline.

Poradie	Meno	Body za príklady						Spolu	Ocenenie
		1	2	3	4	5	6		
101.-112.	Simančík František	7	4	1	7	3	3	25	II. cena
101.-112.	Váňa Tomáš	7	5	0	7	6	0	25	II. cena
113.-123.	Budáč Ondrej	7	2	2	7	6	0	24	II. cena
244.-263.	Bodnár Jozef	7	2	0	1	4	1	15	
244.-263.	Budáčová Hana	7	1	3	1	3	0	15	
244.-263.	Černo Peter	7	0	0	7	1	0	15	

Naši žiaci sa v súťaži nestratili: **Tomáš Váňa, František Simančík** a **Ondrej Budáč** získali strieborné medaily, ďalším trom našim reprezentantom chýbal povestný kúsok šťastia – získali po 15 bodov, pričom na bronzovú medailu bolo treba 16 bodov. Aj oni však získali diplom Honorable Mention, ktorý sa udeľuje účastníkom, ktorí vyriešili bezchybne aspoň jeden zo šiestich (obvykle veľmi náročných) príkladov. Pretože v družstve boli len dvaja maturanti, je tu pre budúci rok prísľub zlepšenia výkonov.

Absolútnymi víťazmi IMO s plným počtom 42 bodov sa stal jeden Kanaďan, jeden Maďar a dvaja Rusi. IMO je súťaž jednotlivcov, ale býva zvykom sčítať body celého družstva a vznikne tak neoficiálne poradie krajín. V tomto sme získali 119 bodov (vlani len 77 bodov) a skončili sme na 31. mieste. Výber z neoficiálneho poradia krajín: 1. Čína 220 bodov, 2. USA 212, 3. Rusko 205, 4. Vietnam 196, 5. Bulharsko 194, 6. Taiwan 190, 7. Maďarsko 187, 8. Japonsko 182, 9. Irán 178, 10. Rumunsko 176, ... **31. Slovensko 119**, 34. Česká republika 109, ..., 38. Francúzsko 94 (s obrovskou matematickou tradíciou)...

Usporiadateľmi ďalšej IMO bude Mexiko v dňoch 1. – 12. 7. 2005, a to v meste Cancún. V ďalších rokoch IMO usporiadajú: Slovinsko 2006, Vietnam 2007, Španielsko 2008 a Nemecko 2009.

Vojtech Bálint

Zadania úloh 45. ročníka Medzinárodnej matematickej olympiády

1. deň

Úloha 1

Nech ABC je ostrouhlý trojuholník, v ktorom $|AB| \neq |AC|$. Kružnica s priemerom BC pretína strany AB a AC v bodoch M, resp. N. Označme O stred strany BC. Osi uhlov BAC a MON sa pretínajú v bode R. Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkom BMR a CNR majú spoločný bod, ktorý patrí strane BC.

Úloha 2

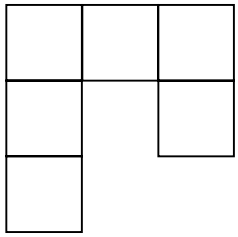
Nájdite všetky polynómy $P(x)$ s reálnymi koeficientmi, ktoré spĺňajú rovnosť

$$P(a-b)+P(b-c)+P(c-a)=2P(a+b+c)$$

pre všetky reálne čísla a, b, c, pre ktoré platí $ab+bc+ca=0$.

Úloha 3

Definujme „hák“ ako obrazec, ktorý je tvorený šiestimi jednotkovými štvorcami podľa obrázka alebo útvar, ktorý vznikne rotáciou alebo preklopením tohto útvaru. Nájdite všetky také obdĺžniky s rozmermi $m \times n$, ktoré môžu byť pokryté hákmi tak, aby bol obdĺžnik nimi bezo zvyšku pokrytý, aby sa háky neprekrývali a aby žiadna časť háku nezasahovala do plochy mimo obdĺžnika.



2. deň

Úloha 4

Nech $n \geq 3$ je prirodzené číslo. Nech $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sú kladné reálne čísla také, že

$$n^2+1 > (t_1+t_2+\ldots+t_n)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\cdots+\frac{1}{t_n}\right).$$

Dokážte, že t_i, t_j, t_k sú dĺžkami strán trojuholníka pre všetky i, j, k také, že $1 \leq i < j < k \leq n$.

Úloha 5

V konvexnom štvoruholníku $ABCD$ uhlopriečka BD nie je osou uhla ABC, ani osou uhla CDA. Nech bod P leží vnútri $ABCD$ a spĺňa rovnosti

$$|\angle PBC| = |\angle DBA| \quad \text{a} \quad |\angle PDC| = |\angle BDA|.$$

Dokážte, že $ABCD$ je tetivový štvoruholník práve vtedy, keď $|AP| = |CP|$.

Úloha 6

Kladné číslo nazveme alternujúcim, ak každé dve za sebou idúce cifry jeho dekadického zápisu majú rozdielnu paritu. Nájdite všetky prirodzené čísla n také, že n má násobok, ktorý je alternujúci.

Sústredenie MATMIX-u, Štúrovo 23. 8. – 27. 8. 2004

Koncom augusta, v pondelok 23. 8. 2004, sa začalo to, na čo sme sa dlhší čas už viacerí tešili. Sústredenie MATMIX-u. V dopoludňajších hodinách sme sa všemožnými dopravnými prostriedkami snažili dostať do Štúrova. Niektorí to mali pohodlné a odviezli sa na aute, iní išli vlakom a zo železničnej stanice autobusom alebo pešo. Komu sa podarilo trafiť do internátu (čo sa podarilo všetkým), ten nahlásil tete vrátničke svoje údaje, vyviezol sa výťahom na šieste poschodie a mohol sa ubytovať.

Bolo nás menej ako po minulé roky: len päť dievčat, osem chlapcov a traja vedúci – Mgr. Martin Hriňák, RNDr. Milan Maxian a RNDr. Ľudovít Hrdina, CSc. Okrem nás, čo sme poctivo rátali príklady korešpondenčnej súťaže, bol s nami aj jeden chlapec, ktorého pán Maxian doučoval matematiku, aby po ročnom pobyte v Amerike mohol postúpiť do ďalšieho ročníka.

O jednej hodine poobede sme sa stretli v spoločenskej miestnosti, kde sa nám predstavili vedúci, ktorých väčšina z nás už poznala z minulých rokov, pán Maxian povedal pár slov na úvod a víťazi korešpondenčnej súťaže dostali kalkulačky. Rozdelili sme sa do dvoch družín, aby sme počas nasledujúcich dní mohli medzi sebou súťažiť. Začali sme hneď volejbalom a futbalom a zvyšok poobedia sme mali voľno. Niektorí išli na kúpalisko, iní ostali v internáte alebo išli do mesta na prechádzku spojenú s nákupom oblečenia. Večer sme sa s Maťom Hriňákom v spoločenskej miestnosti hrali rôzne zoznamovacie hry, elektrinu a mafiu. Na záver sme si ešte takmer všetci pozerali na notebooku fotky, ktoré Maťo nafotil počas dňa.



Druhý deň o deviatej sa začal Matboj, ktorý pripravil pán Hrdina. Pozostával z desiatich úloh rôznej náročnosti, ktoré sme mali v družinách v stanovenom čase vyriešiť. Po prestávke bolo vyhodnotenie, kde sme my sami hovorili riešenia príkladov – vždy jeden z družiny prezentoval svoje riešenie pred vedúcimi a druhou družinou. Za tieto riešenia sa dali získavať ďalšie body. Potom sme hrali futbal a volejbal, každý sa naobedoval podľa svojej chuti a väčšina z nás sa pobrala na kúpalisko, ktoré bolo oproti minulému roku väčšie a drahšie. Nebolo práve najteplejšie, obzvlášť nie v mokrých plavkách, keď slnko zašlo za oblaky, tak sme sa po niekoľkých hodinách kúpania vrátili do internátu, ledva sme sa stihli navečerať a už bol večerný program. Maťo mal pre nás pripravenú logickú hru, po jej skončení sme si ešte pozerali fotky a išli sme spať.



V stredu sme si vypočuli prednášku pána Maxiana o kužeľosečkách, zašportovali sme si a poobedie každý strávil podľa vlastného uváženia – na kúpalisku alebo na výlete v Ostrihome. Večer sme si zahrali proti sebe ďalšiu logickú hru, bridž a šarády.

Vo štvrtok mal prednášku Maťo Hriňák o polynómoch a po prestávke sme spolu s ním riešili niekoľko zaujímavých úloh. Keďže pršalo, väčšina strávila popoludnie v internáte, napr. hraním multifunkčných mafiánov. Okolo deviatej večer sme sa všetci stretli v spoločenskej miestnosti, kde bolo vyhodnotenie celého sústredenia a každá družinka dostala ceny – veľkú čokoládu a makovníky, ktoré sa počas predchádzajúcich dní stali kultovým jedlom sústredenia. Fotili sme sa, pojedli sme ceny a potom sme sa všetci presunuli do našej izby, kde sme hrali multifunkčných mafiánov, šarády, rozprávali sme sa a zavŕšili sme to hrou „horúce kreslo“.



Nastal piatok, a tým aj deň odchodu. Po neveľmi dlhom spánku sme sa pobalili a od skorého rána sme postupne odchádzali domov plní dojmov a zážitkov zo sústredenia. A už sa tešíme na to ďalšie.

Lenka Veselovská



Horný rad zľava: RNDr. Milan Maxian, Lucia Vašková, Zuzana Pôbišová, Slávka Bertová, Michal Takács, Lenka Veselovská, Róbert Birkus, Peter Perešíni, Marek Derňár, Katarína Bachratá, Martin Blicha
Dolný rad zľava: Peter Korcsok, Vladimír Božа, Mgr. Martin Hriňák

54. ročník matematickej olympiády

Úlohy I. kola – domáca časť

Kategória A

A – I – 1

Neprázdnu podmnožinu prirodzených čísel nazveme *malou*, keď má menej prvkov, ako je jej najmenší prvok. Určte počet všetkých malých množín M, ktoré sú podmnožinami množiny $\{1,2,3,\ldots,100\}$ a majú nasledujúcu vlastnosť: ak do M patria dve rôzne čísla x a y, potom do M patrí aj číslo $|x-y|$.

J. Földes

A – I – 2

Nech M je ľubovoľný vnútorný bod kratšieho oblúka CD kružnice opísanej štvorcu $ABCD$. Označme P, R priesečníky priamky AM postupne s úsečkami BD, CD a podobne Q, S priesečníky priamky BM s úsečkami AC, DC. Dokážte, že priamky PS a QR sú navzájom kolmé.

J. Švrček

A – I – 3

Nech k je ľubovoľné prirodzené číslo. Uvažujme dvojice (a,b) celých čísel, pre ktoré majú kvadratické rovnice

$$x^2 - 2ax + b = 0, \qquad y^2 + 2ay + b = 0$$

reálne korene (nie nutne rôzne), ktoré možno označiť $x_{1,2}$ resp. $y_{1,2}$ v takom poradí, že platí rovnosť $x_1y_1 - x_2y_2 = 4k$.

a) Pre dané k určte najväčšiu možnú hodnotu b zo všetkých takých dvojíc (a,b).

b) Pre $k = 2004$ určte počet všetkých takých dvojíc (a,b).

c) Pre dané k vypočítajte súčet čísel b zo všetkých takých dvojíc (a,b), pričom každé číslo b sa pripočíta toľkokrát, v koľkých dvojiciach (a,b) vystupuje.

E. Kováč

A – I – 4

Dané aritmetické postupnosti $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ a $(y_i)_{i=1}^{\infty}$ majú rovnaký prvý člen a nasledujúcu vlastnosť: existuje index k $(k>1)$, pre ktorý platia rovnosti

$$x_k^2 - y_k^2 = 53, \qquad x_{k-1}^2 - y_{k-1}^2 = 78, \qquad x_{k+1}^2 - y_{k+1}^2 = 27.$$

Nájdite všetky také indexy k.

V. Bálint

A – I – 5

V lichobežníku $ABCD$, kde $AB \parallel CD$, platí $|AB| = 2|CD|$. Označme E stred ramena BC. Dokážte, že rovnosť $|AB| = |BC|$ platí práve vtedy, keď štvoruholník $AECD$ je dotyčnicový.

R. Horenský

A – I – 6

Nájdite všetky funkcie $f:\langle 0,+\infty)\to\langle 0,+\infty)$, ktoré spĺňajú zároveň tri nasledujúce podmienky:

a) Pre ľubovoľné nezáporné čísla x,y také, že $x+y>0$, platí rovnosť

$$f\big(x\,f(y)\big)f(y)=f\left(\frac{xy}{x+y}\right);$$

b) $f(1)=0$;

c) $f(x)>0$ pre ľubovoľné $x>1$.

P. Calábek

Kategória B

B – I – 1

Určte všetky dvojice (a,b) reálnych čísel, pre ktoré má každá z rovníc

$$x^2+ax+b=0,\quad x^2+(2a+1)x+2b+1=0$$

dva rôzne reálne korene, pričom korene druhej rovnice sú prevrátenými hodnotami koreňov prvej rovnice.

E. Kováč

B – I – 2

Daný je rovnobežník $ABCD$. Priamka vedená bodom D pretína úsečku AC v bode G, úsečku BC v bode F a polpriamku AB v bode E tak, že trojuholníky BEF a CGF majú rovnaký obsah. Určte pomer $|AG|:|GC|$.

T. Jurík

B – I – 3

Na stole leží k hromádok s $1,2,3,\ldots,k$ kameňmi, kde $k\geq 3$. V každom kroku si vyberieme tri ľubovoľné hromádky na stole, zlúčime ich do jednej a pridáme k nej jeden kameň, ktorý dovtedy na stole nebol. Dokážte, že ak po niekoľkých krokoch vznikne jediná hromádka, potom výsledný počet kameňov nie je deliteľný tromi.

J. Zhouf

B – I – 4

Označme V priesečník výšok a S stred kružnice opísanej trojuholníku ABC, ktorý nie je rovnostranný. Dokážte, že ak uhol pri vrchole C má $60°$, potom os uhla ACB je osou úsečky VS.

J. Zhouf

B – I – 5

V obore reálnych čísel vyriešte rovnicu

$$\frac{x}{x+4}=\frac{5\lfloor x\rfloor-7}{7\lfloor x\rfloor-5},$$

kde $\lfloor x \rfloor$ označuje najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako x (tzv. dolná celá časť reálneho čísla x).

J. Šimša

B – I – 6

Do kružnice k s polomerom r sú vpísané dve kružnice k_1, k_2 s polomerom $\frac{r}{2}$, ktoré sa vzájomne dotýkajú. Kružnica l sa zvonka dotýka kružníc k_1, k_2 a s kružnicou k má vnútorný dotyk. Kružnica m má vonkajší dotyk s kružnicami k_2 a l a vnútorný dotyk s kružnicou k. Vypočítajte polomery kružníc l a m.

L. Boček

Kategória C

C – I – 1

Nech a, b, c, d sú také reálne čísla, že $a + d = b + c$. Dokážte nerovnosť

$$(a-b)(c-d) + (a-c)(b-d) + (d-a)(b-c) \geq 0.$$

E. Kováč

C – I – 2

Zistite, pre ktoré prirodzené čísla $n \geq 2$ je možné z množiny $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ vybrať navzájom rôzne párne čísla tak, aby ich súčet bol deliteľný číslom n.

J. Zhouf

C – I – 3

V ľubovoľnom konvexnom štvoruholníku $ABCD$ označme E stred strany BC a F stred strany AD. Dokážte, že trojuholníky AED a BFC majú rovnaký obsah práve vtedy, keď sú strany AB a CD rovnobežné.

J. Šimša

C – I – 4

Tri štvormiestne čísla k, l, m majú rovnaký tvar $ABAB$, t.j. číslica na mieste jednotiek je rovnaká ako číslica na mieste stoviek a číslica na mieste desiatok je rovnaká ako číslica na mieste tisícok. Číslo l má číslicu na mieste jednotiek o 2 väčšiu a číslicu na mieste desiatok o 1 menšiu ako číslo k. Číslo m je súčtom čísel k a l a je deliteľné deviatimi. Určte všetky také čísla k.

T. Joska

C – I – 5

Určte počet všetkých trojíc dvojmiestnych prirodzených čísel a, b, c, ktorých súčin abc má zápis, v ktorom sú všetky číslice rovnaké. Trojice líšiace sa len poradím čísel považujeme za rovnaké, t.j. započítavame ich len raz.

J. Šimša

C – I – 6

V trojuholníku ABC so stranou BC dĺžky $2\,\text{cm}$ je bod K stredom strany AB. Body L a M rozdeľujú stranu AC na tri zhodné úsečky. Trojuholník KLM je rovnoramenný a pravouhlý. Určte dĺžky strán AB, AC všetkých takých trojuholníkov ABC.

P. Leischner

Kategória Z9

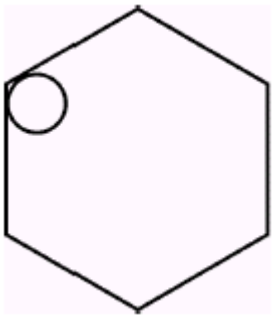
Z9 – I – 1

Dvojciferné číslo nazveme *exkluzívne*, ak má nasledujúcu vlastnosť: keď cifry exkluzívneho čísla navzájom vynásobíme a k tomuto súčinu pripočítame ciferný súčet daného exkluzívneho čísla, dostaneme práve toto exkluzívne číslo. Napríklad číslo 79 je exkluzívne, lebo $79 = 7 \cdot 9 + (7 + 9)$. Nájdite všetky exkluzívne čísla.

P. Tlustý

Z9 – I – 2

Vnútri pravidelného šesťuholníka so stranou dĺžky $2\sqrt{3}$ cm sa pohybuje kruh s priemerom dĺžky 1 cm tak, že sa stále dotýka obvodu pravidelného šesťuholníka. Vypočítajte obsah tej časti šesťuholníka, ktorá nemôže byť nikdy prekrytá pohybujúcim sa kruhom.



M. Dillingerová

Z9 – I – 3

Koľko existuje spôsobov, ako vybrať sedem čísel z množiny $\{1, 2, \ldots, 8, 9\}$ tak, aby ich súčet bol deliteľný tromi?

P. Tlustý

Z9 – I – 4

Nech sú dané kruh a štvorec s rovnakým obsahom. Do daného kruhu vpíšeme štvorec, do daného štvorca vpíšeme kruh. Ktorý z vpísaných obrazcov má väčší obsah?

M. Volfová

Z9 – I – 5

Pán Párny mal párny počet ovečiek, pán Nepárny mal nepárny počet ovečiek. Počet všetkých ovečiek týchto dvoch pánov tvoril trojciferné číslo, ktoré malo všetky číslice rovnaké. Každej ovečke pána Párneho sa narodili tri ovečky, každej ovečke pána Nepárneho dve ovečky. Jedného dňa však vlk roztrhal tri ovečky pánovi Párnemu. Teraz má pán Párny rovnako ovečiek, ako pán Nepárny. Koľko ovečiek mal pôvodne každý z chovateľov?

L. Hozová

Z9 – I – 6

Päť detí postupne povedalo:

„Včera bol pondelok.“

„Dnes je štvrtok.“

„Pozajtra bude piatok.“

„Zajtra bude sobota.“

„Predvčerom bol utorok.“

Keby ste vedeli, koľko detí klamalo, hneď by bolo jasné, ktorý je dnes deň. Ktorý je dnes deň?

Š. Ptáčková

Kategória Z8

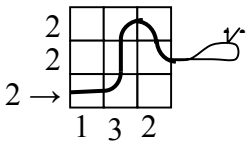
Z8 – I – 1

Poradové číslo dňa v mesiaci je smutné, lebo v istom roku ani raz naň nepripadla nedeľa. Aké číslo to bolo a na ktorý deň v týždni pripadol v tom roku Nový rok?

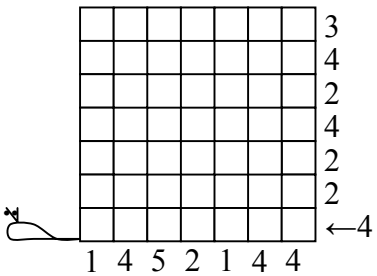
M. Volfová

Z8 – I – 2

Slimák liezol po štvorcovej sieti a zanechal za sebou stopu (pozri obr.1). Čísla pod stĺpcami a vedľa riadkov udávajú počet navštívených štvorčekov v danom stĺpci či riadku. Na obr. 2. dokreslite dráhu slimáka, ak viete, že nikdy nevliezol dvakrát do



Obr. 1



Obr. 2

toho istého štvorčeka a že nikdy neliezol šikmo.

Š. Ptáčková

Z8 – I – 3

O lichobežníku $LICH$ so základňou LI vieme, že $LC \perp HI$, $|\sphericalangle ILC| = |\sphericalangle IHC|$ a aritmetický priemer dĺžok jeho základní je 8 cm. Vypočítajte obsah tohto lichobežníka.

S. Bednářová

Z8 – I – 4

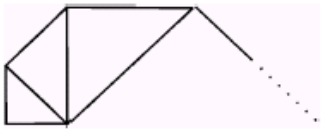
Koľko je medzi číslami 1, 2, 3, . . . , 999, 1 000 takých, ktoré nie sú deliteľné žiadnym z čísel 2, 3, 4, 5?

M. Volfová

Z8 – I – 5

Alenka zostavovala „*slimáčiu ulitu*“ z rovnoramenných pravouhlých trojuholníkov ako na obrázku. Použila na to čo najviac trojuholníkov, ale žiadne dva sa neprekrývali.

a) Z koľkých trojuholníkov bola ulita zostavená?
b) Vypočítajte obsah najväčšieho trojuholníka v hotovej ulite, ak odvesna najmenšieho z nich má dĺžku 1 cm.



Obr. 3

M. Raabová

Z8 – I – 6

Archeológovia vykopali papyrus so zaujímavou tabuľkou s výrezom v tvare písmena **Z** (pozri obrázok). Domnievajú sa, že ide o talizman indiánskeho kmeňa *Sčítačov*. Každý ich talizman mal nasledujúcu vlastnosť: Ak v ňom zakrúžkujete ľubovoľných päť čísel tak, aby v každom stĺpci aj riadku bolo zakrúžkované práve jedno, a týchto päť čísel sčítate, dostanete vždy ten istý súčet. Pokúste sa zreštaurovať tento talizman, t. j. doplňte čísla na prázdne miesta.

0				6
	■	■	8	
	3	■	5	7
	2	■	■	
4		9		

Obr. 4

S. Bednářová

Kategória Z7

Z7 – I – 1

Dlhý, Široký a Bystrozraký si merali svoju výšku. Zistili, že Dlhý je dvakrát taký vysoký ako Široký. Bystrozrakého výška tvorí len dve tretiny výšky Dlhého, ale je o 44 cm vyšší ako Široký. Zistite, aký vysoký je Dlhý, Široký aj Bystrozraký.

M. Dillingerová

Z7 – I – 2

Je dané päťciferné číslo deliteľné tromi. Ak z neho vyškrtneme číslice na nepárnych miestach, dostaneme dvojciferné číslo, ktoré je 67-krát menšie, než číslo získané z pôvodného päťciferného čísla vyškrtnutím číslic na párnych miestach. Zistite, aké mohlo byť pôvodné päťciferné číslo.

M. Raabová

Z7 – I – 3

V krajine Čísielkovo žijú iba prirodzené čísla. Muži a chlapci sú párne čísla, ženy a dievčatá sú nepárne čísla. Manželia majú deti hneď po svadbe, a to všetky čísla, ktoré delia ich súčin bezo zvyšku.

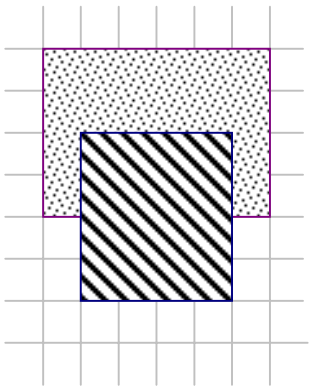
a) Ktorého nápadníka z čísel 2, 16, 28, 46 si má vybrať slečna Deviatka, ak chce mať čo najviac rôznych detí?

b) Ktorého nápadníka z čísel 2, 16, 28, 46 si má vybrať slečna Deviatka, ak chce mať rovnako veľa synov ako dcér, ale žiadne dve deti rovnaké?

M. Dillingerová

Z7 – I – 4

Kamilka pri kreslení obdĺžnikov (štvorec je špeciálny prípad obdĺžnika) v štvorcovej sieti narazila na takúto zaujímavú dvojicu: obdĺžnik s rozmermi 6 cm a 4 cm a štvorec so stranou dĺžky 4 cm. Najprv zakreslila do siete obdĺžnik a potom štvorec (pozri obrázok). S údivom vo svojom obrázku objavila, že obsah nezakrytej časti obdĺžnika sa rovná obsahu štvorca a nezakrytá časť obvodu obdĺžnika sa rovná celému obvodu štvorca.



Obr. 1

Medzi nasledujúcimi obdĺžnikmi nájdi všetky dvojice, ktoré majú obe vlastnosti Kamilkiných obdĺžnikov:
3 cm × 9 cm, 4 cm × 9 cm, 4 cm × 6 cm a 5 cm × 7 cm.

M. Dillingerová

Z7 – I – 5

Myška Hryzka našla tehlu syra. Prvý deň zjedla $\frac{1}{8}$ syra, druhý deň $\frac{1}{7}$ zvyšku, tretí deň $\frac{1}{6}$ zvyšku a štvrtý deň $\frac{1}{5}$ zvyšku syra. Potom už zo syra zostala iba kocka s povrchom 150 cm^2. Aký objem mala pôvodná tehla syra?

M. Dillingerová

Z7 – I – 6

Archeológovia vykopali papyrus so zaujímavou tabuľkou s výrezom v tvare písmena **Z** (pozri obrázok). Domnievajú sa, že ide o talizman indiánskeho kmeňa *Sčítačov*. Každý ich talizman mal nasledujúcu vlastnosť: Ak v ňom zakrúžkujete ľubovoľných päť čísel tak, aby v každom stĺpci aj riadku bolo zakrúžkované práve jedno, a týchto päť čísel sčítate, dostanete vždy ten istý súčet. Pokúste sa zreštaurovať tento talizman, t. j. doplňte čísla na prázdne miesta.

0				6
	■	■	8	
	3	■	5	7
	2	■	■	
4		9		

Obr. 2

S. Bednářová

Kategória Z6

Z6 – I – 1

Desatinné číslo nazveme *vyvážené*, ak sa súčet cifier nachádzajúcich sa pred desatinnou čiarkou rovná súčtu cifier za desatinnou čiarkou. Napr. číslo 25,133 je vyvážené. Napíšte

a) najväčšie,

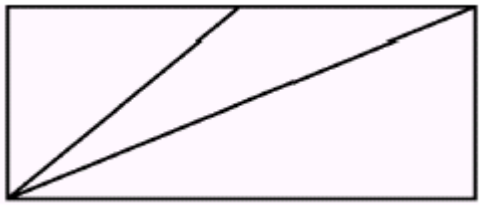
b) najmenšie vyvážené číslo,

ktorého žiadne dve číslice nie sú rovnaké.

S. Bednářová

Z6 – I – 2

Obdĺžnik sme rozdelili na tri trojuholníky. V týchto trojuholníkoch sme správne odmerali všetky vnútorné uhly a získali sme tak tieto hodnoty: 20°, 30°, 30°, 40°, 50°, 60°, 90°, 90° a 130°. Dopíšte ich na správne miesta v nasledujúcom obrázku. (Pozor, obrázok môže byť veľmi nepresný, neoplatí sa merať!)



Obr. 1

S. Bednářová

Z6 – I – 3

V krajine Čísielkovo žijú iba prirodzené čísla. Muži a chlapci sú párne čísla, ženy a dievčatá sú nepárne čísla. Manželia majú deti hneď po svadbe, a to všetky čísla, ktoré delia ich súčin bezo zvyšku. Ktorého nápadníka z čísel 2, 8, 14 si má vybrať slečna Sedmička, ak chce mať čo najviac rôznych detí? Ktorého nápadníka z čísel 2, 8, 14 si má vybrať slečna Sedmička, ak chce mať rovnako veľa synov ako dcér, ale žiadne dve deti rovnaké?

M. Dillingerová

Z6 – I – 4

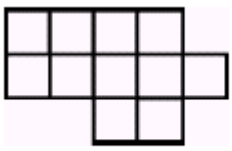
Na kartičke mám napísané párne štvorciferné číslo. Rozstrihnem ju tak, že získam dve dvojciferné čísla, ktorých súčin je 2562. Ktoré štvorciferné číslo som mala napísané na kartičke?

M. Raabová

Z6 – I – 5

Na obrázku je mnohouholník zložený z 11 rovnakých štvorčekov.

a) Zistite jeho obvod, ak viete, že jeden malý štvorček má obvod 2 cm.



Obr. 2

b) Ktoré dva štvorčeky mnohouholníka treba premiestniť, aby vznikol nový mnohouholník s čo najväčším obvodom? (Ak sa premiestnený štvorec dotýka iného štvorca, musia mať spoločný buď iba vrchol, alebo celú stranu.)

S. Bednářová

Z6 – I – 6

V Petroviciach, Bodríkovciach a Micinkove žije spolu 6000 obyvateľov. V každej z týchto troch dediniek pripadá v priemere na 20 obyvateľov 1 pes a na 30 obyvateľov 1 mačka. V Petroviciach a Bodríkovciach žije celkom 234 psov, v Bodríkovciach a Micinkove žije celkom 92 mačiek. Koľko obyvateľov majú jednotlivé dedinky?

Š. Ptáčková

Kategória Z5

Z5 – I – 1

Viktor chcel napísať zoznam všetkých dvojciferných čísel, ktoré po delení piatimi dávajú zvyšok 3. Keď napísané čísla sčítal, dostal súčet 911. Ktoré číslo zabudol na zoznam napísať, ak tam žiadne nesprávne napísané nebolo?

L. Hozová

Z5 – I – 2

Anička a Marienka sa mali stretnúť presne o 17:30 pred kinom. Anička si myslela, že jej idú hodinky o 4 minúty dopredu, ale v skutočnosti jej meškali 8 minút. Marienka si myslela, že jej hodinky 8 minút meškajú, ale išli jej o 4 minúty dopredu. Kedy ktoré z dievčat prišlo na stretnutie, ak si obe mysleli, že prišli presne o 17:30?

Š. Ptáčková

Z5 – I – 3

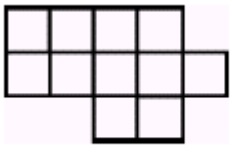
Traja princovia išli bojovať s mnohohlavým drakom. Najprv mu prvý princ ľavou rukou odsekol polovicu hláv a pravou rukou ešte ďalšie dve hlavy. Potom mu druhý princ tiež ľavou rukou odsekol polovicu zvyšných hláv a pravou rukou ešte ďalšie dve a napokon tretí princ mu ľavou rukou odsekol polovicu zvyšných hláv a pravou rukou ešte ďalšie dve. Potom drak padol bezhlavý na zem. Koľkohlavý drak to bol?

Š. Ptáčková

Z5 – I – 4

Na obr. 1 je mnohouholník zložený z 11 rovnakých štvorčekov. Zistite jeho obvod, ak jeden malý štvorček má obvod 20 cm. Ktoré dva štvorčeky mnohouholníka treba ubrať, aby vznikol nový mnohouholník s čo najväčším obvodom?

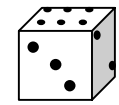
S. Bednářová



Obr. 1

Z5 – I – 5

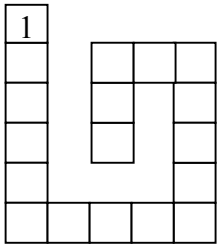
Hracia kocka má bodky rozmiestnené tak, že ich súčet na protiľahlých stenách je vždy 7. Kocka na obr. 2 stojí na stene s jednou bodkou, takže na podložke zanechá odtlačok ”1”. Keď prevalíme kocku doprava na stenu s dvomi bodkami, zanechá na podložke odtlačok ”2”. Keď potom prevalíme kocku smerom k sebe, zanechá odtlačok ”3”. Pri tomto prevaľovaní dostaneme stopu na obr. 3. Súčet čísel tejto stopy je 6.



Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4

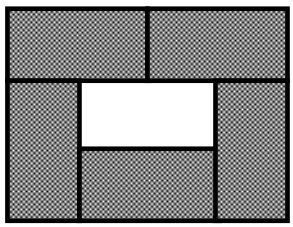
Aký bude súčet na stope na obr. 4, ak východzie postavenie kocky je na obr. 2?

Nakreslite, ako by mohla vyzerať stopa, na ktorej je súčet 22, ak východzie postavenie kocky je na obr. 2?

L. Hozová

Z5 – I – 6

Ivanka si stavia zo stavebnice komíny. Všetky diely stavebnice sú rovnaké kvádre a majú rozmery 1 cm, 1 cm a 2 cm. Teraz postavila jednoposchodový dutý komín z piatich kvádrov na ploche 12 cm^2 (viď obr.). Rozhodla sa ale, že postaví dutý komín na ploche 36 cm^2 z 260 takých kvádrov. Aký najvyšší komín mohla postaviť, ak jej žiaden kváder nezostal a komín bol na vrchu zarovnaný?



Obr. 5

Š. Ptáčková

Kategória Z4

Z4 – I – 1

Z čísla 6574839201 vyškrtni niektoré číslice tak, aby vzniknuté číslo bolo čo najmenšie a aby súčet cifier na mieste desiatok a mieste tisícok bol 7 a rozdiel cifier na mieste stoviek a mieste jednotiek bol 2.

S. Bodláková, M. Dillingerová

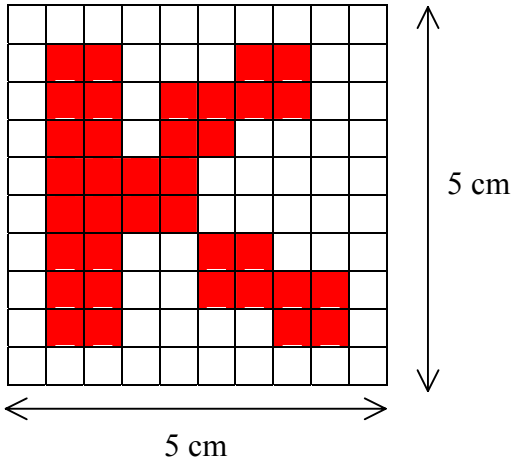
Z4 – I – 2

Obdĺžnik JURO má obvod 36 cm, štvorec LENA má obvod 24 cm. JURO a LENA sú rodičmi obdĺžnikov a štvorcov, ktoré majú polovičný obvod ako LENA alebo polovičný obvod ako JURO. Pritom všetky dcéry sú štvorce a žiadny syn nie je štvorec. Koľko najviac môžu mať JURO a LENA rôznych synov a koľko rôznych dcér, ak rozmery detí sú v centimetroch zapísané celými číslami?

S. Bodláková

Z4 – I – 3

Stará mama plietla pre svoju vnučku Katku šál so vzorom s písmenami K. Najprv uplietla vzorku tvaru štvorca s dĺžkou strany 5 cm (pozri obr.).



Potom z takýchto vzorov urobila šál dlhý 1 m a široký 20 cm. Koľko bolo na šále písmeniek K?

S. Bodláková

Z4 – I – 4

Od pondelka do piatku býva náš psík Bobi doma sám, lebo rodičia sú v práci a deti v škole. Jeden mesiac bol však sám iba 11 dní. Najprv bol tri dni od nedele do utorka doma Ivan, lebo ho bolelo brucho. Len čo vyzdravel, ostala doma Majka s chrípkou, a to od stredy do štvrtka ďalšieho týždňa. Koľko dní mohol mať ten mesiac?

M. Dillingerová

Z4 – I – 5

Na Vianočných trhoch boli vystavené 5, 7 a 9-ramenné svietniky, pričom na každom ramene bola jedna sviečka. Spolu tam bolo 9 svietnikov a 67 sviečok. Zisti, koľko ktorých svietnikov tam bolo.

M. Dillingerová

Z4 – I – 6

Na telocviku bolo 9 chlapcov a 8 dievčat v dvoch zástupoch. V zástupe chlapcov bol každý chlapec o 1 cm vyšší než ten, ktorý stál tesne pred ním. V dievčenskom zástupe bolo každé dievča o 2 cm vyššie než to, ktoré stálo tesne pred ním. Najvyššie dievča bolo o 15 cm vyššie ako najnižší chlapec. Tretí najvyšší chlapec je Jurko a meria 134 cm. Koľko cm meria najnižšie dievča?

M. Dillingerová

Korešpondenčná súťaž v školskom roku 2004/2005

Redakcia časopisu MATMIX aj v tomto školskom roku vyhlasuje korešpondenčnú súťaž pre žiakov základných a stredných škôl. Zapojiť sa môžu všetci žiaci spomínaných škôl, ktorí majú záujem o matematiku a sú ochotní venovať pravidelne niekoľko minút vypracovaniu riešení.

V školskom roku 2004/2005 vyjdú 4 čísla časopisu a korešpondenčná súťaž bude mať tri série. Zadania úloh budú uverejnené v číslach 1, 2 a 3, riešenia úloh spolu s výsledkovými listinami v číslach 2, 3 a 4. Výsledky korešpondenčnej súťaže sa budú priebežne zverejňovať na internete na našej www stránke

www.matmix-web.sk.

Žiakom prvého stupňa základných škôl je určená kategória E, ktorej úlohy budú zverejnené v rubrike MINIMIX. Žiakom druhého stupňa základnej školy a žiakom prímy až kvarty osemročných gymnázií je určená kategória Z a sú pre nich určené úlohy č. 1 až 4. Prvákom stredných škôl a žiakom kvinty osemročných gymnázií je určená kategória C. Riešitelia tejto kategórie riešia úlohy 3 až 6. Druhákom stredných škôl a žiakom sexty osemročných gymnázií je určená kategória B s úlohami 5 až 8. Tretiakom a štvrtákom stredných škôl a žiakom septimy a oktávy osemročných gymnázií je určená kategória A s úlohami 7 až 10.

Žiakom, ktorí majú záujem o náročnejšie úlohy, je určená kategória π. Pre túto kategóriu sú v každej sérii určené úlohy 11 až 14.

Vzhľadom na prelínanie sa kategórií A, B, C a Z, ako aj vzhľadom na naše obmedzené možnosti, **môže každý žiak súťažiť len v jednej z týchto kategórií** (môže však navyše súťažiť aj v kategórii π).

Riešenia každej série zasielajte do uvedeného termínu – rozhoduje pečiatka na obálke. Ak pošlete riešenia po tomto termíne, strhneme vám za každý deň omeškania jeden bod (pod 0 bodov však klesnúť nemôžete). Veľmi by nám pomohlo, keby ste s nami korešpondovali v slovenskom jazyku. Riešenia zasielajte na adresu:

Metodicko-pedagogické centrum
MATMIX
Tomášikova 4
P. O. BOX 14
820 09 Bratislava 29

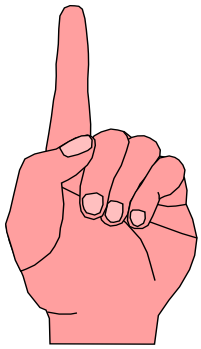
V tomto školskom roku zavádzame na základe vašich žiadostí možnosť dostávať svoje opravené riešenia s komentármi späť domov. Podmienkou je zaslanie troch obálok formátu A5 alebo A4 s vašou adresou domov spolu so známkami v hodnote 36 Sk a označenie vašej voľby v prihláške.

V prípade, že máte nejasnosti v zadaní alebo máte iné otázky, môžete svoje pripomienky adresovať na uvedenú adresu alebo na e-mail *hrinak@matmix-web.sk*.

Prihlášku do korešpondenčnej súťaže nám pošlite spolu s prvou sériou vašich riešení na osobitnom papieri formátu A6 podľa nasledujúceho vzoru. V prípade, že chcete riešiť aj kategóriu π, zašlite nám prihlášku pre obe kategórie.

Prihláška do korešpondenčnej súťaže časopisu MATMIX

Priezvisko: ……..... Meno: …… Kategória: ……..
Škola: …… Trieda: ……
Adresa domov: ……
Mám záujem dostávať späť opravené riešenia s komentármi: áno nie
Telefón: …… E-mail: …….
Meno učiteľa alebo ďalších, ktorí vás vedú v matematike: ……



Súťažiacich upozorňujeme, aby **riešenia písali <u>čitateľne</u> na papiere formátu A4** (tzv. kancelársky papier) a na každé riešenie napísali **hlavičku – svoje meno, číslo úlohy a kategóriu**. V prípade, že sa riešenie jednej úlohy nachádza na viacerých papieroch, zopnite ich spolu alebo na jednotlivé papiere napíšte hlavičku a očíslujte ich. Na jednom papieri nemôžu byť napísané riešenia viacerých úloh. **Hodnotiť budeme len také riešenia, ktoré budú spĺňať tieto kritériá.**

Do súťaže sa môžu žiaci zapojiť aj neskôr (teda v druhej alebo tretej sérii). Podmienkou zaradenia do súťaže je aj v takomto prípade zaslanie prihlášky spolu s prvými riešeniami, ktoré vypracujú.

Korešpondenčná súťaž je súťažou jednotlivcov, a preto sa do súťaže nemôžu prihlásiť skupiny riešiteľov. V prípade, že nájdete viacero riešení jednej úlohy, stačí, ak nám zašlete jedno. Žiadne ďalšie body za ďalšie riešenia nezískate.

Riešenia súťažných úloh vypracujte sami! V prípade, že zistíme, že nejaká skupina opisovala, *každý* jej člen dostane za danú úlohu 0 bodov, aj keby bolo riešenie správne. Plný počet bodov (5) prislúcha len úplnému riešeniu. Preto treba zdôvodniť všetky tvrdenia, ktoré v riešení použijete. V prípade, že použijete vetu alebo tvrdenie, ktoré nie je všeobecne známe, uveďte aj literatúru, kde sa nachádza jeho dôkaz. Uvedenie iba výsledku nie je postačujúce. Ak niektorá úloha nemá riešenie, treba ukázať, prečo ho nemá.

V prípade, že nie ste spokojní s ohodnotením vášho riešenia, môžete nám poslať reklamáciu s odôvodnením a požadovaným počtom bodov na našu adresu. Vaše riešenie si ešte raz prezrieme a oznámime vám výsledok. Ak máte prístup k elektronickej pošte, používajte ju, prosím, prednostne. Urýchlite tým vybavenie vašej reklamácie.

Veľa zážitkov a krásnych chvíľ pri riešení súťažných úloh vám praje redakčná rada časopisu MATMIX.

Skôr než začnete písať svoje riešenia

Vzhľadom na skúsenosti z minulých rokov sme sa rozhodli uverejniť zopár rád, ktoré vám môžu pomôcť pri písaní vášho riešenia, presnejšie, akých chýb sa máte vyvarovať.

Mnohí z vás používajú pri dokazovaní rovnosti dvoch čísel kalkulačku. Takéto riešenia nikdy nebudú hodnotené ako správne z jednoduchého dôvodu – kalkulačky majú len obmedzenú presnosť, a ak vám vyjde na kalkulačke, že dve čísla sa rovnajú, neznamená to nutne, že sa rovnajú aj v skutočnosti. Možno sa líšia už na prvom nezobrazovanom desatinnom mieste. Kalkulačku teda nemôžete používať na dokazovanie rovností. V prípade dokazovania nerovností ju však už môžete využiť v rozumnej miere – teda pri zisťovaní rozdielov na prvých dvoch – troch desatinných miestach. Napríklad na skonštatovanie, že $\pi^2 < 10$.

K riešeniam pomocou počítača: Je veľa úloh, v ktorých treba vyskúšať veľmi veľa možností, ak človek nenájde šikovnú skratku, ktorá mu počet týchto možností zníži. Preto napríklad riešenie typu „vyskúšame všetky možnosti“, nebude hodnotené ako správne. A to aj v prípade, že by ste v riešení uviedli úvahy o tom, že možností je len konečne veľa a podobne. V prípade, že chcete, aby ste za takéto riešenie získali nenulový počet bodov, tak všetky možnosti musíte vypísať **ručne**, aby ste zistili, že to nie je tá správna cesta.

Taktiež si treba uvedomiť, že ak vypíšete niekoľko možností a pri nich dokážete, že tvrdenie platí, nie je to dôkaz tvrdenia vo všeobecnosti.

V prípade, ak máte dokázať nejaké tvrdenie a postupujete spôsobom, že predpokladáte platnosť tohto tvrdenia a dospejete k pravdivému tvrdeniu, tak ste nedokázali vôbec nič. Uvedieme príklad: Predpokladajme, že $1 = 2$. Vynásobením oboch strán rovnosti nulou dostávame pravdivé tvrdenie $0 = 0$. Môžeme teraz tvrdiť, že sme dokázali platnosť tvrdenia $1 = 2$? Sami vidíte, že sme nič nedokázali... Ak však používame ekvivalentné úpravy, už je to iné. Ale to treba spomenúť.

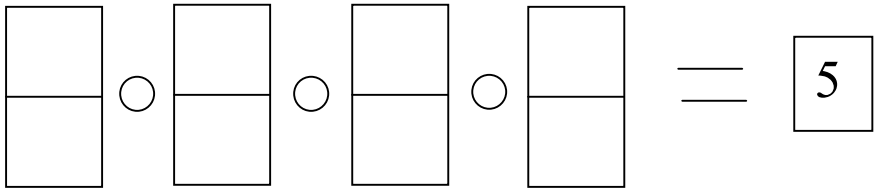
Pri písaní svojich riešení dávajte pozor aj na označenie, aby bolo jasné, čo čo znamená. Pri nesprávnom označení môžete stratiť body, aj keď riešenie je v princípe správne. Ďalej treba dávať pozor aj na to, aby ste na dvoch rôznych miestach neoznačili jedným označením dve rôzne skutočnosti.

Na záver vám odporúčame, aby ste si svoje riešenia nakoniec vždy ešte raz prečítali. Možno sami zistíte, že tomu, čo ste napísali, nerozumiete ani vy sami, lebo opravovatelia sú tvory, ktoré nemajú telepatické schopnosti.

Martin Hriňák

Súťažné úlohy – 1. séria

1. Usporiadajte kocky domina (1,2), (2,3), (1,4), (5,6) a zapíšte príslušné operácie +, –, ., : tak, aby platila rovnica:



2. Obdĺžnik je rozdelený podľa obrázka na 4 menšie obdĺžniky, z ktorých tri majú obsah 4, 8, 12. Zistite obsah štvrtého obdĺžnika.

4	12
8	

3. Pri delení dvojciferného čísla jeho ciferným súčtom dostaneme podiel 6 a zvyšok 4. Nájdite toto číslo.

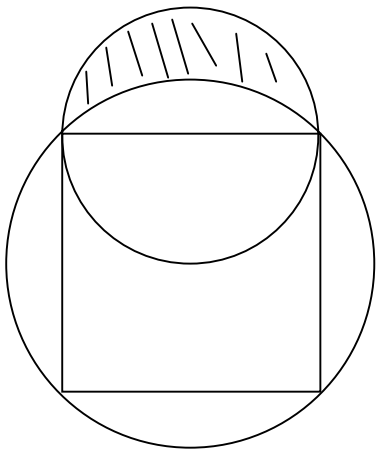
4. Majme číslo x a napíšme si jeho ciferný súčet. Túto operáciu opakujme ešte dvakrát. Dostaneme tri rôzne čísla. Nájdite najmenšie také x, pre ktoré sa najmenšie z týchto troch čísel rovná 2.

5. Peťo má 28 spolužiakov. Každý z nich má v triede iný počet priateľov. Koľko priateľov má Peťo?

6. Zistite, či sa dá rozdeliť štvorec na 3 časti, z ktorých môžeme zložiť ostrouhlý trojuholník s rôznymi stranami.

7. Papierový trojuholník s uhlami 20°, 20°, 140° rozrežeme pozdĺž osi jedného jeho vnútorného uhla na dva trojuholníky. Jeden z nich opäť rozrežeme rovnakým spôsobom atď. Môžeme takýmto spôsobom po niekoľkých rezoch dostať trojuholník podobný pôvodnému?

8. Je daný štvorec, ktorému je opísaná kružnica. Nad každou jeho stranou je zostrojená jedna kružnica podľa obrázka. Určte pomer obsahu štvorca a štyroch mesiačikov, ktoré vzniknú ako časti polkruhov opísaných nad stranami, z ktorých odoberieme časť prekrývajúcu sa s kruhom opísaným štvorcu.



9. Nech $a+b+c>0$, $ab+bc+ca>0$, $abc>0$. Dokážte, že $a>0$, $b>0$, $c>0$.

10. Dokážte, že rovnica $\sin x = ax$ nemôže mať práve 2004 riešení pre žiadne a.

11. Zistite posledné dvojčíslie čísla 3^{2004}.

12. V laboratóriu pozorujú 100 vlastností jedného druhu baktérií (danú vlastnosť baktéria buď má alebo nemá). Dokážte, že skupina, v ktorej sa každé dve baktérie navzájom odlišujú v aspoň 50 vlastnostiach, nemôže obsahovať viac ako 50 baktérií.

13. Uvažujme trojuholník ABC. Nech $|BC|=a$, $|AC|=b$. Označme stredy strán BC a AC po rade M, N. Nad stranou AB trojuholníka ABC zostrojíme zvonku štvorec so stredom O. Nájdite maximálnu dĺžku $|OM|+|ON|$ pri meniacom sa uhle ACB.

14. Dĺžka minimálnej periódy desatinného zápisu čísla A je 6 a čísla B 12. Aká môže byť dĺžka minimálnej periódy desatinného zápisu čísla $A+B$?

Termín odoslania 1. série: do **15. 11. 2004**

Riešenia úloh zasielajte na adresu:

Metodicko-pedagogické centrum
MATMIX
Tomášikova 4
P. O. BOX 14
820 09 Bratislava 29

Fragmenty z histórie matematiky

Stredoveká zbierka úloh

Ani v „temnom“ stredoveku nebola matematika mŕtva. Na dvore Karola Veľkého v Aachene okolo roku 775 sa používala jedna z prvých zbierok zaujímavých úloh z matematiky s podnetným názvom *Úlohy na cibrenie umu mladých*. Jej autorom bol učiteľ, filozof i básnik *Alcuin z Yorku* (asi 735 – 804, pôvodným keltským menom Alh-win, t.j. priateľ chrámu). Už v tejto učebnici sa vyskytuje známa úloha o pltníkovi, vlkovi, koze a kapuste. Skúste zdokonaliť svoje myslenie vyriešením úlohy: Ako rozdeliť 100 mincí medzi 100 osôb, aby muži dostali po troch, ženy po dvoch a každé dve deti spolu po jednej minci? Už v tej dobe vzdelanec Alcuin vedel: „*Rozumne sa pýtať znamená vyučovať*.“

Harmonický rad a nekonečno

V rokoch 1348 až 1361 v Collége de Navarre v Paríži prednášal *Mikuláš z Orezmu* (okolo 1323 – 1382, roku 1356 vysvätený za kňaza a od 1373 biskup z Lisieux), pozoruhodná osobnosť vtedajšej doby. Vytvoril aj obdivuhodné matematické práce. Sformuloval pravidlo o súčte klesajúceho geometrického radu, vedel ukázať, že harmonický rad $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$ diverguje („má nekonečný súčet“) (vtipne ukázal, že pre každé prirodzené $k>1$ platí

$$\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^k}>\frac{1}{2}),$$

naznačoval geometrické obrazce s nekonečným obvodom a konečným obsahom. Mikuláš z Orezmu ponúkal niekoľko hlbokých myšlienok, ktoré však bez dôslednejšieho matematického aparátu museli počkať na príhodnejšiu dobu.

Gödel, K.: Filozofické eseje. Praha, Oikoymenh 1999.

Od tridsiatych rokov nášho storočia sú myšlienky *Kurta Gödela* (1896 – 1978) podnetné pre mnohých matematikov a logikov. Od štyridsiatych rokov sa tento významný logik a matematik zaoberal filozofiou. Uvedená publikácia obsahuje všetky známe Gödelove eseje z filozofie matematiky a logiky: *O nerozhodnuteľných vetách* (1931), *Súčasná situácia v základoch matematiky* (1933), *Russelova matematická logika* (1944), *Čo je Cantorov problém kontinua?* (1947/1964), *Niektoré fundamentálne vety o základoch matematiky a ich filozofické dôsledky* (1951), *Je matematika syntaxou jazyka?* (1953), *Moderný vývoj základov matematiky vo svetle filozofie* (1961). Osudy týchto prác sú priblížené v poznámke prekladateľa J. Fialu v závere knižky.

„*Každý formálny systém s konečne veľa axiómami, ktorý obsahuje aritmetiku prirodzených čísel, je neúplný.*“ Táto dokázaná veta ukončila bezbrehú pýchu niektorých matematikov na svoju vedu. Nemôže existovať žiadny dôkaz bezospornosti formálneho systému, ktorý by sa dal vyjadriť na základe tohto samotného systému. Gödel ukázal ilúziu o možnosti úplnej formalizácie nášho poznania.

Matematická logika obsahuje idey a princípy nachádzajúce sa v základoch všetkých vied. O umocnení schopnosti rozumu vhodným myšlienkovým postupom túžilo už veľa mysliteľov. Význam fundamentálnych viet o základoch matematiky môžete spoznať aj z pera najväčšieho logika 20. storočia K. Gödela v tejto knižke, ktorej čítanie však nie je prechádzkou ružovým sadom. „*Existuje tesný vzťah medzi matematikou a jazykom… Matematika nevyrastá z jazyka, ale jazyk je možný len vďaka matematike.*“

V závere publikácie sa dozviete, že Gödel spoznal význam Husserlovej fenomenológie (ako metódy pre vysvetlenie zmyslu) pre východiská z krízy základov matematiky.

Dušan Jedinák

MINIMIX – príloha pre žiakov prvého stupňa ZŠ

Milí priatelia, žiaci 1. – 4. ročníka!

Podobne ako v minulých rokoch, aj v tomto školskom roku sme vám pripravili celoštátnu korešpondenčnú súťaž v riešení zaujímavých matematických úloh. Vlaňajší víťazi dostali od firmy CASIO pekné kalkulačky, ktoré sme im zaslali poštou na adresu školy. Práve teraz prebiehajú rokovania s firmou CASIO o sponzorovaní na tento školský rok. Učitelia víťazov získali predplatné nášho časopisu na nasledujúci školský rok.

V prvých troch číslach si nájdete po dvoch úlohách, teda spolu ich bude 6. Za správne a úplné riešenie každej úlohy môžete získať najviac 10 bodov. V tomto čísle uverejňujeme úlohy č. 1 a 2. Výsledky a vaše hodnotenie budú uverejnené vždy v nasledujúcom čísle. Podľa našich pravidiel môžete získať spolu najviac 60 bodov. Každý žiak, ktorý získa v našej súťaži viac ako 30 bodov, dostane náš diplom úspešného riešiteľa. Vaše úlohy budú patriť do kategórie E a na **prvú** poslanú úlohu nám napíšte tieto vaše údaje:

Meno a priezvisko
Škola s adresou a trieda
Meno a priezvisko vášho učiteľa – učiteľky matematiky
Na každú ďalšiu úlohu stačí napísať iba vaše meno.

Súťažné úlohy 1. kola

E1: Maťka sa rada hrá s kockami. Má presne 35 rovnakých kociek a chce z nich zložiť presne dve kocky. Ako to má urobiť, aby jej žiadna kocka neostala, ani nechýbala? Poraďte Maťke a nakreslite jej obrázok, ako tie kocky budú vyzerať.

E2: Maťko sa rád bicykluje. Na cyklistickej trase sú stĺpikmi vyznačené kilometre. Po každom celom kilometri je na trase stĺpik. Maťko začína svoju cestu pri prvom stĺpiku a ide až po 15. stĺpik, kde sa otočí späť, ale ide iba po druhý stĺpik, kde sa opäť otočí a ide po 14. stĺpik a takto si cestu po otočke skráti vždy o kilometer. Jeho cesta sa teda podľa stĺpikov začína takto:
1-15-2-14-3-13-4-12-5 ..... Po poslednej otočke prejde ešte jeden kilometer a príde k stĺpiku, kde je bufet. Tam si odpočinie, vypije čaj a spočíta si, koľko kilometrov vlastne doteraz prešiel, keď je taký unavený. Pri ktorom stĺpiku je bufet a koľko kilometrov Maťko na tejto ceste prešiel? Ako dlho mu to trvalo, ak prešiel 20 km za jednu hodinu?

Riešenia týchto prvých dvoch úloh nám pošlite na adresu

Metodicko-pedagogické centrum
MINIMIX
Tomášikova 4
P. O. BOX 14
820 09 Bratislava 29

najneskôr do **15. 11. 2004** (rozhoduje dátum poštovej pečiatky).