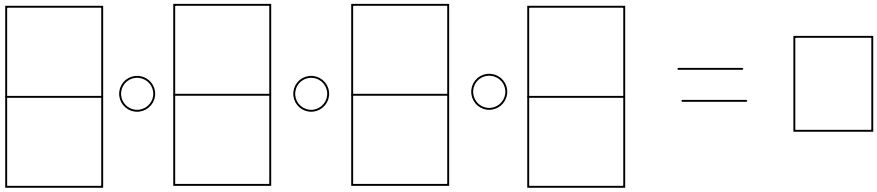
Riešenia súťažných úloh 1. série

1. Usporiadajte kocky domina (1,2), (2,3), (1,4), (5,6) a zapíšte príslušné operácie +, –, ., : tak, aby platila rovnosť:



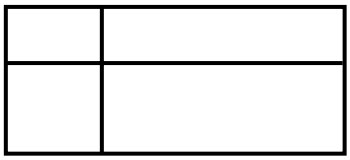
Riešenie: Našli ste principiálne odlišné tieto dve riešenia:

$$\frac{5}{6}+\frac{2}{3}+\frac{4}{1}-\frac{1}{2}=5 \quad \text{a} \quad \frac{5}{6}\cdot\frac{2}{1}+\frac{4}{1}-\frac{2}{3}=5.$$

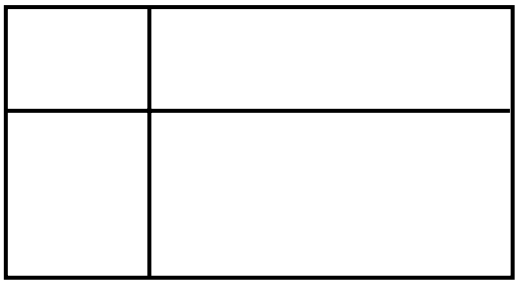
Úloha má viacero riešení, ktoré vzniknú premiestnením jednotlivých zlomkov, resp. zamenením násobenia za delenie prevráteným zlomkom.

Komentár a bodovanie: Úloha vám nerobila väčšie problémy. Za riešenia, ktoré využívali nepovolené zátvorky, ste mohli získať maximálne 3 body.

2. Obdĺžnik je rozdelený podľa obrázka na 4 menšie obdĺžniky, z ktorých tri majú obsah 4, 8, 12. Zistite obsah štvrtého obdĺžnika.



Riešenie: Označme jednotlivé strany obdĺžnikov podľa obrázka a neznámy obsah S:



Potom platí, že $ac=4$, $bc=8$, $ad=12$, $S=bd$. Vydelením prvých dvoch rovníc dostávame, že $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$, teda $b=2a$. Dosadením tohto vzťahu do rovnice pre obsah S dostávame $S=2ad=2\cdot 12=24$, teda hľadaný obsah je 24.

Komentár a bodovanie: Za riešenia, ktoré využívali to, že dĺžky strán obdĺžnikov sú celé čísla alebo rozobratie niekoľkých konkrétnych možností dĺžok strán obdĺžnika, ste mohli získať maximálne 1 bod.

3. Pri delení dvojciferného čísla jeho ciferným súčtom dostaneme podiel 6 a zvyšok 4. Nájdite toto číslo.

Riešenie: Dvojciferné číslo (označme si ho *n*) si môžeme zapísať v tvare

$$n = 10a + b,$$

kde $a \in \{1,2,...,9\}$ a $b \in \{0,1,2,...,9\}$. Potom sa jeho ciferný súčet rovná $a + b$. Ak si zapíšeme zadanie príkladu ako rovnicu, dostávame rovnicu

$$10a + b = 6 \cdot (a + b) + 4.$$

Túto rovnicu ekvivalentne upravíme na tvar

$$a = \frac{5}{4} \cdot b + 1.$$

Keďže a je prirodzené číslo, musí byť b deliteľné štyrmi. Dostávame tak len tri možnosti pre b: 0, 4, 8. V prípade $b = 0$ dostávame $a = 1$, teda $n = 10$. Avšak $10 : 1 = 10$, takže $n = 10$ nie je riešením úlohy. V prípade $b = 4$ dostávame $a = 6$, teda $n = 64$. Keďže $64 : 10 = 6$, zv. 4, tak $n = 64$ je riešením úlohy. V prípade $b = 8$ dostávame $a = 11$, čo nevyhovuje, lebo $a \leq 9$. Vcelku dostávame, že úloha má jediné riešenie $n = 64$.

Komentár a bodovanie: Vyskytli sa aj riešenia, ktoré obsahovali vypísanie všetkých dvojciferných čísel. Ak ste v nich na žiadne nezabudli, získali ste 5 bodov. Za každé zabudnuté číslo ste stratili 1 bod. Pri riešeniach podobných so vzorovým riešením niektorí z vás zabudli na možnosť $b = 0$. Za takéto riešenia ste strácali 1 bod.

4. Majme číslo *x* a napíšme si jeho ciferný súčet. Túto operáciu opakujme ešte dvakrát. Dostaneme tri rôzne čísla. Nájdite také najmenšie *x*, pre ktoré sa najmenšie z týchto troch čísel rovná 2.

Riešenie: Pri riešení tohto príkladu budeme postupovať od konca. Najprv si dokážeme pomocné tvrdenie: Pre každé prirodzené číslo *m* je jeho ciferný súčet $CS(m)$ menší alebo rovný tomuto číslu. Pre jednociferné čísla nastáva rovnosť. Vo všeobecnosti pre každé celé nezáporné a a k platí, že $a.10^k \geq a$, pretože $10^k \geq 1$. Potom ak máme číslo m zapísané v tvare $m = a_n \cdot 10^n + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$ ($n \in \mathbf{N_0}$, $a_n, \ldots, a_0$ sú cifry, $a_n \neq 0$), tak dostávame nerovnosť

$$m = a_n \cdot 10^n + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0 \geq a_n + \ldots + a_1 + a_0 = CS(m),$$

ktorá dokazuje pomocné tvrdenie. V prípade, že $n \in \mathbf{N}$, nastáva dokonca ostrá nerovnosť. Na základe tohto tvrdenia vidíme, že posledným číslom z troch čísel zo zadania úlohy bolo číslo 2. Ktoré prirodzené čísla majú ciferný súčet 2? Sú to napríklad 11, 20, 101, ... Zaoberajme sa teraz číslom 11. Najmenšie číslo, ktoré má ciferný súčet 11, je 29. A najmenšie prirodzené číslo, ktoré má ciferný súčet 29, je číslo 2999. Ak by sme si miesto 11 zobrali číslo, ktoré má hodnotu aspoň 20, potom najmenšie prirodzené číslo s týmto ciferným súčtom bude aspoň 299, a číslo, ktorého ciferný súčet je aspoň 299, bude mať aspoň 34 cifier, čo je už číslo väčšie ako 2999. Teda najmenšie prirodzené číslo s požadovanou vlastnosťou je číslo 2999.

To, že číslo 2999 je najmenšie s požadovanou vlastnosťou, môžeme overiť aj sporom. Predpokladajme, že existuje také n prirodzené, že $n < 2999$ a má taktiež požadovanú vlastnosť. Potom je jeho ciferný súčet maximálne 28. Prirodzené čísla 1 až 28 majú ciferný súčet v rozmedzí 1 až 10 (možno ľahko overiť vypísaním všetkých možností alebo jednoduchou úvahou). To ale znamená, že buď dostaneme ako tretie číslo v postupnosti ciferných súčtov 1 (ak vezmeme ako druhé číslo číslo s ciferným súčtom 10), alebo sa bude tretie číslo rovnať druhému (ak vezmeme ako druhé číslo číslo s ciferným súčtom menším ako 10). Teda v oboch prípadoch dostávame spor, čo znamená, že číslo 2999 je najmenšie číslo s požadovanou vlastnosťou.

Komentár a bodovanie: Ak ste zabudli na to, že existujú aj iné čísla ako 11 a 20, ktoré majú ciferný súčet rovný dvom, strácali ste 1 bod. Veľmi veľa z vás používalo tvrdenie, že ak $CS(x) > CS(y)$, tak $x > y$. Toto tvrdenie neplatí, môžete si to skúsiť napríklad pre čísla 9 a 10. Za túto chybu ste strácali 1 bod. Ďalší bod ste strácali za nedokázanie prvého pomocného tvrdenia (ak ste ho samozrejme využívali vo svojom riešení).

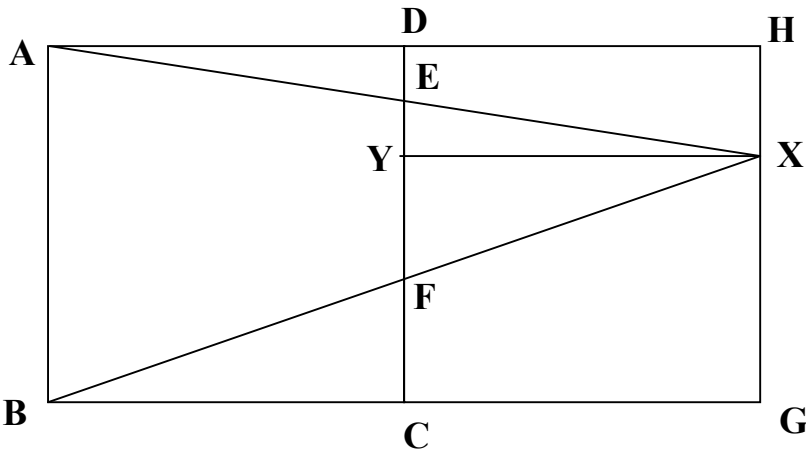
5. Peťo má 28 spolužiakov. Každý z nich má v triede iný počet priateľov. Koľko priateľov má Peťo?

Riešenie: Na začiatku si uvedomíme, čo znamená priateľstvo. Je to pomenovanie nejakého symetrického vzťahu medzi dvomi rôznymi ľuďmi. Keďže v Petrovej triede je 29 žiakov, počet priateľov každého z nich je od 0 po 29. V prípade, že tam je človek, ktorý má 0 priateľov, nemôže tam byť človek, ktorý má 28 priateľov a naopak. Predpokladajme teraz, že tam je človek, ktorý má 0 priateľov. Keďže každý z Petrových spolužiakov má iný počet známych a počet známych je od 0 po 27, tak každý z nich má práve jedno z týchto čísel (sú navzájom rôzne). Peter musí mať už rovnaký počet známych ako niektorý jeho spolužiak. Označme si spolužiakov číslami 0 až 27 podľa počtu priateľov v triede. Žiak 0 sa nepriatelí s nikým, teda ani s Petrom. Žiak 27 sa priatelí so všetkými okrem 0 (inak by nedosiahol počet 27 priateľov), preto sa priatelí aj s Petrom. Žiak 1 sa už priatelí s 27, preto sa nemôže priateliť s Petrom. Žiak 26 sa nepriatelí s 1, preto sa musí priateliť s 3 až 27 a aj s Petrom. Ďalej 2 sa už priatelí s 26, 27, takže sa nemôže priateliť s nikým iným, ani s Petrom. Podobne budeme postupovať z oboch krajov až nakoniec dostaneme, že Peter má 14 spolužiakov, s ktorými sa priatelí. V prípade, že by tam bol človek, ktorý má 28 priateľov, postupovali by sme rovnako a taktiež by sme dostali, že Peter má 14 priateľov.

Komentár a bodovanie: Ak ste ukázali na konkrétnom príklade, že Peter má 14 spolužiakov, mohli ste získať maximálne 3 body. Ďalšie 2 body sa dali získať za dôkaz, že Peter nemôže mať iný počet priateľov. Častou chybou bolo to, že ste predpokladali, že všetci v triede majú iný počet známych. V zadaní sa však hovorí len o Petrových spolužiakoch.

6. Zistite, či sa dá rozdeliť štvorec na 3 časti, z ktorých môžeme zložiť ostrouhlý trojuholník s rôznymi stranami.

Riešenie: Áno, štvorec sa takto rozdeliť dá, jedno z možných riešení je na obrázku.



Nech má strana pôvodného štvorca dĺžku a. V osovej súmernosti podľa priamky CD sa štvorec $ABCD$ zobrazí na štvorec $HGCD$. Nech $X \in \overleftrightarrow{GH}$, $|HX| = \frac{a}{3}$, $|GX| = \frac{2a}{3}$. Nech $E \in \overleftrightarrow{AX} \cap \overleftrightarrow{CD}$, $F \in \overleftrightarrow{BX} \cap \overleftrightarrow{CD}$. Potom hľadanými časťami sú trojuholníky ADE, BCF a štvoruholník $BFEA$. Ich zložením dostaneme trojuholník ABX. To ešte dokážeme. Označme si Y pätu kolmice z bodu X na priamku $\overleftrightarrow{CD}$. Potom sú trojuholníky ADE a XYE zhodné (napríklad na základe vety *usu*: Uhly pri vrchole E sú vrcholové, $|\angle EYX| = |\angle EDA| = 90°$, teda majú rovnaký aj tretí uhol a platí $|AD| = |XY|$). Podobne sú zhodné aj trojuholníky BCF a XYF. To, že je trojuholník ABX rôznostranný, overíme výpočtom:

$$|AB| = a,$$

$$|AX| = \sqrt{|AH|^2 + |XH|^2} = \sqrt{(2a)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{37}}{3}a,$$

$$|BX| = \sqrt{|BG|^2 + |XG|^2} = \sqrt{(2a)^2 + \left(\frac{2a}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{10}}{3}a.$$

To, že trojuholník ABX je ostrouhlý, ľahko nahliadneme letmým pohľadom na obrázok alebo na si základe kosínusovej vety vypočítame jednotlivé vnútorné uhly trojuholníka.

Komentár a bodovanie: Toto riešenie nie je jediné, existuje ich nekonečne veľa – napríklad pri riešeniach tohto typu bod X môžeme zvoliť ľubovoľne vo vnútri úsečky GH okrem jej stredu. Ak ste vo svojom riešení zabudli overiť rôznostrannosť alebo ste ju overili len pre dve strany, strácali ste 1 až 2 body. Ak ste zabudli overiť ostrouhlosť, strácali ste 1 až 2 body. Ak vaše riešenie spočívalo len v nakreslení delenia bez ďalšieho dôkazu, mohli ste získať maximálne 2 body. Časť riešení spočívala

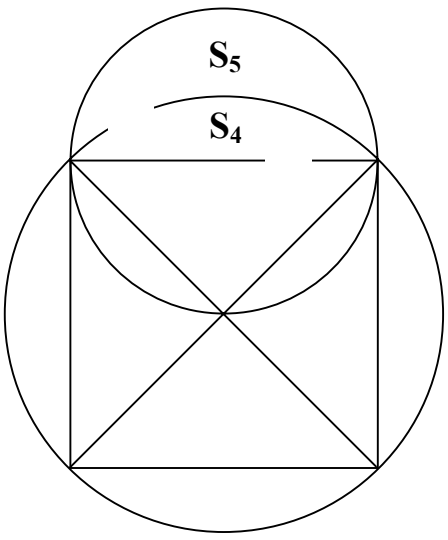
v priamom hľadaní bodov E a F. Ak ste zabudli na to, že pre ne musí platiť podmienka $|EF| = \frac{1}{2}a$, strácali ste 1 bod.

7. Papierový trojuholník s uhlami 20°, 20°, 140° rozrežeme pozdĺž osi jedného jeho vnútorného uhla na dva trojuholníky. Jeden z nich opäť rozrežeme rovnakým spôsobom atď. Môžeme takýmto spôsobom po niekoľkých rezoch dostať trojuholník podobný pôvodnému?

Riešenie: Predpokladajme, že sme po niekoľkých rezoch dostali trojuholník, ktorý je podobný s pôvodným. To znamená, že jeho uhly majú tiež veľkosti 20°, 20°, 140°. Začnime teraz vykonávať operáciu rezania v opačnom smere, teda akési „zväčšovanie“. Ak máme trojuholník s uhlami α, β, γ a operáciu vykonávame na uhle α, tak z neho môžeme dostať trojuholník s uhlami $2\alpha, \beta, \gamma - \alpha$ alebo trojuholník s uhlami $2\alpha, \beta - \alpha, \gamma$, pričom musíme dávať pozor na to, aby vzniknuté uhly boli z intervalu $(0°, 180°)$. Všimnime si, že ak vychádzame z uhlov veľkosti 20°, 20°, 140°, tak každý z nich je deliteľný 20. Sčítavaním a odčítavaním sa nám deliteľnosť zachováva, takže ľubovoľným opakovaním operácie zväčšovania dostaneme veľkosti uhlov deliteľné 20. Ak sa teraz vrátime k rezaniu, tak prvým rezaním trojuholníka s vnútornými uhlami 20°, 20°, 140° dostaneme buď jeden vnútorný uhol veľkosti 10° alebo 70°, čo znamená, že deliteľnosť 20 bola porušená, a teda už nikdy nedostaneme ako výsledok rezania trojuholník podobný pôvodnému. To je spor s predpokladom, že sme po niekoľkých rezoch dostali trojuholník, ktorý je podobný s pôvodným. Preto nikdy nedostaneme ako výsledok rezania trojuholník podobný pôvodnému.

Komentár a bodovanie: Väčšina z vás odhalila princíp, na ktorom je riešenie založené. Horšie to však bolo so zdôvodňovaním. Intuitívna predstava tu už nestačí. Ďalšia časť riešení spočívala taktiež v obrátenom postupe, len s tým rozdielom, že sa našla konečná množina všetkých možných trojuholníkov, ktoré sa dajú opačným spôsobom dostať z trojuholníka s vnútornými uhlami 20°, 20°, 140°.

8. Je daný štvorec, ktorému je opísaná kružnica. Nad každou jeho stranou je zostrojená jedna kružnica podľa obrázka. Určte pomer obsahu štvorca a štyroch mesiačikov, ktoré vzniknú ako časti polkruhov opísaných nad stranami, z ktorých odoberieme časť prekrývajúcu sa s kruhom opísaným štvorcu.



Riešenie: Označme si dĺžku strany štvorca a. Obsah S_1 polkruhu nad jeho stranou je

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{8}.$$

Obsah S_4 malých mesiačikov vypočítame ako rozdiel obsahu S_2 štvrťkruhu s polomerom $a\frac{\sqrt{2}}{2}$ a obsahu S_3 štvrtiny štvorca so stranou a:

$$S_2 = \frac{1}{4}\cdot\pi\left(a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{8},$$

$$S_3 = \frac{a^2}{4},$$

$$S_4 = S_2 - S_3 = \frac{a^2}{4}\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

Potom pre obsah S_5 jedného veľkého mesiačika dostávame vzťah

$$S_5 = S_1 - S_4 = \frac{\pi a^2}{8} - \frac{a^2}{4}\left(\frac{\pi}{2}-1\right) = \frac{a^2}{4}.$$

Celkovo majú štyri mesiačiky obsah $S_m = a^2$. Keďže pre obsah štvorca platí $S_š = a^2$, tak hľadaný pomer obsahov sa rovná jednej, presnejšie $1{:}1$.

Komentár a bodovanie: Za spísanie vzorcov bez vysvetlenia označenia a komentára ste mohli získať maximálne 3 body. Ak ste si zvolili dĺžku strany štvorca konkrétne číslo a s tým ste ďalej počítali, mohli ste získať maximálne 1 bod. Za to, že ste použili nepravdivé tvrdenie $\pi = 3{,}14$, ste strácali 1 bod. Častou terminologickou chybou bolo používanie spojenia „obsah kružnice“.

9. Nech $a+b+c>0$, $ab+bc+ca>0$, $abc>0$. Dokážte, že $a>0$, $b>0$, $c>0$.

Riešenie: Z tretej nerovnosti máme, že buď sú všetky tri čísla kladné, čo sme mali dokázať, alebo sú záporné práve dve z nich. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $a, b<0$. Potom z prvej rovnice máme $c>-(a+b)$, pričom čísla na oboch stranách nerovnosti sú kladné. Druhú nerovnosť si upravíme a dosadíme do nej vzťah $c>-(a+b)$:

$$ab>-(a+b)\cdot c>\left[-\left(a+b\right)\right]^2 = a^2+2ab+b^2.$$

Táto nerovnosť je ekvivalentná s nerovnosťou

$$0>a^2+ab+b^2.$$

Keďže však na ľavej strane máme súčet troch kladných čísel, dostávame spor s predpokladom, že sú záporné práve dve z čísel a,b,c. Preto sú kladné všetky tri čísla, čo sme mali dokázať.

Komentár a bodovanie: Častou chybou, ktorú ste robili, bolo násobenie nerovností navzájom, prípadne ich násobenie záporným číslom bez zmeny znaku nerovnosti. Ďalej ste často uvažovali, že ak sú dva členy z troch záporné, tak sú to hneď prvé dva (teda a a b). To síce môžeme urobiť bez ujmy na všeobecnosti, ale treba to spomenúť. Našli sa aj vyjadrenia typu $a=-a$, za ktoré ste strácali 1 bod.

10. Dokážte, že rovnica $\sin x = ax$ nemôže mať práve 2004 riešení pre žiadne a.

Riešenie: Keďže funkcia $f(x) = \sin x - ax$ je pre každé a nepárna, tak vieme, že ak nejaké kladné x_0 je jej nulovým bodom (a teda riešením rovnice zo zadania), tak aj záporné číslo $-x_0$ je jej nulovým bodom (a teda je taktiež riešením rovnice zo zadania). Takto vieme „popáriť“ kladné a záporné riešenia. Navyše však platí $f(0) = 0$, a teda 0 je riešením rovnice zo zadania. Preto má táto rovnica vždy nepárny počet riešení, a teda ich nemôže mať 2004.

Komentár a bodovanie: Ak ste svoje riešenie zakončili bez dôkazu iba tvrdením, že obe strany rovnice sú nepárne funkcie, a teda rovnica môže mať len nepárny počet riešení, mohli ste získať maximálne 3 body. Ak ste riešenie zakončili tvrdením, že rovnica môže mať len nepárny počet riešení, strácali ste 1 bod, pretože bolo treba dokázať, že rovnica nemôže mať 2004 riešení.

11. Zistite posledné dvojčíslie čísla 3^{2004}.

Riešenie: Vypíšme si posledné dvojčíslia jednotlivých mocnín čísla 3: 3, 9, 27, 81, 43, 29, 87, 61, 83, 49, 47, 41, 23, 69, 07, 21, 63, 89, 67, 01, ... Vidíme, že po 20 dvojčísliach sme dostali zase 01. Keďže posledné dvojčíslie čísla 3^n závisí len od posledného dvojčíslia 3^{n-1}, tak vidíme, že každá dvadsiata mocnina čísla 3 končí na to isté dvojčíslie. Preto je posledným dvojčíslom čísla 3^{2004} štvrté dvojčíslie v poradí, teda 81.

Komentár a bodovanie: Vyskytli sa aj riešenia využívajúce kongruencie, ktoré boli správne. Pri odhade periódy opakovania sa posledných dvojčísel sa v niektorých riešeniach vyskytli chyby vyplývajúce z prílišného zovšeobecňovania poznatkov overených len na niektorých konkrétnych prípadoch.

12. V laboratóriu pozorujú 100 vlastností jedného druhu baktérií (danú vlastnosť baktéria buď má, alebo nemá). Dokážte, že skupina, v ktorej sa každé dve baktérie navzájom odlišujú v aspoň 50 vlastnostiach, nemôže obsahovať viac ako 50 baktérií.

Komentár a bodovanie: Do zadania sa nám vlúdila malá chybička a zadanie malo znieť takto:

12A. V laboratóriu pozorujú 100 vlastností jedného druhu baktérií (danú vlastnosť baktéria buď má, alebo nemá). Dokážte, že skupina, v ktorej sa každé dve baktérie navzájom odlišujú vo viac ako 50 vlastnostiach, nemôže obsahovať viac ako 50 baktérií.

Riešenie príkladu 12A: Nech *m* označuje počet baktérií v skupine, v ktorej sa každé dve baktérie navzájom odlišujú vo viac ako 50 vlastnostiach. Teraz spočítame dvoma spôsobmi počet *S* vlastností, v ktorých sa odlišujú. Keďže ich je *m*, počet dvojíc, ktoré vytvárajú, je $\frac{m(m-1)}{2}$. Odlišujú sa v aspoň 51 vlastnostiach, preto platí

$$S \geq 51\frac{m(m-1)}{2}.$$

Na druhej strane nech m_i je počet baktérií, ktoré majú *i*-tu vlastnosť. Potom počet párov baktérií, ktoré sa líšia v *i*-tom znaku, je $m_i(m-m_i)$. Preto

$$S = m_1(m-m_1)+m_2(m-m_2)+\ldots+m_{100}(m-m_{100}).$$

Platí

$$m_i(m-m_i)=\frac{m^2}{4}-\left(\frac{m}{2}-m_i\right)^2 \leq \frac{m^2}{4}.$$

Preto

$$S \leq 100\frac{m^2}{4}=25m^2.$$

Vcelku dostávame, že musí platiť nerovnosť

$$25m^2 \geq S \geq 51\frac{m(m-1)}{2},$$

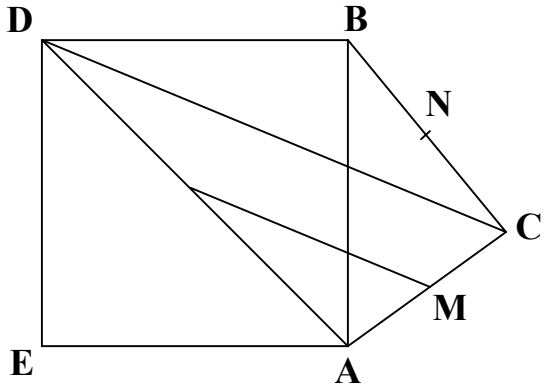
odkiaľ $m \leq 51$. Ak by sa *m* rovnalo 51, tak

$$m_i(m-m_i)<\frac{m^2}{4},$$

pretože *m* je nepárne. Preto $m<51$, odkiaľ dostávame, že $m \leq 50$.

13. Uvažujme trojuholník *ABC*. Nech $|BC|=a$, $|AC|=b$. Označme stredy strán *BC* a *AC* po rade *M*, *N*. Nad stranou *AB* trojuholníka *ABC* zostrojíme zvonku štvorec so stredom *O*. Nájdite maximálnu dĺžku $|OM|+|ON|$ pri meniacom sa uhle *ACB*.

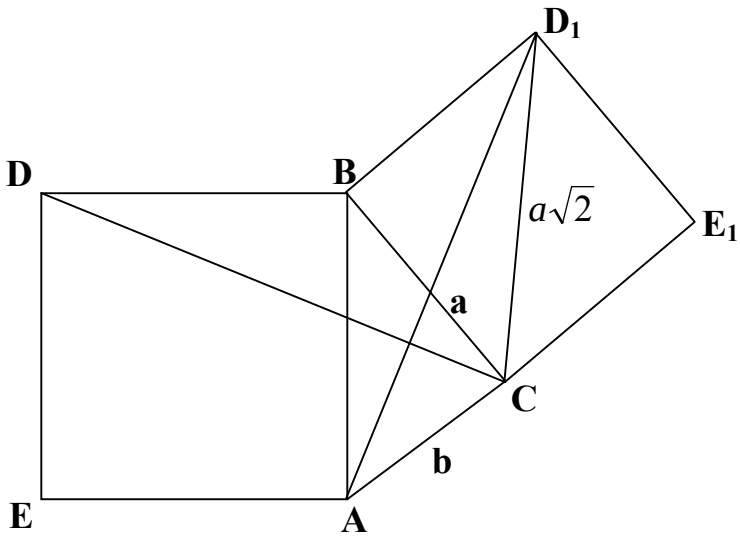
Riešenie: Maximum sa dosahuje pri uhle $|\angle ACB|=135°$ a rovná sa $\frac{1+\sqrt{2}}{2}(a+b)$.



Označme si štvorec nad *AB* ako *ABDE*. Veľkosť uhla pri vrchole *C* označme γ. Na základe vedomostí o stredných priečkach v trojuholníku *CAD* vieme, že $|CD|=2|OM|$. Analogicky dostávame $|CE|=2|ON|$. Potom

$$|CD|+|CE|=2(|OM|+|ON|).$$

Nad stranou BC zostrojme zvonku štvorec CBD_1E_1. Potom sú trojuholníky ABD_1 a DBC zhodné na základe vety *sus*. Preto $|CD| = |AD_1|$. V trojuholníku ACD_1 poznáme dve strany a uhol, ktorý je nimi zovretý – $|AC| = b$, $|CD_1| = a\sqrt{2}$ a $|\angle ACD_1| = \gamma + 45°$. Maximálnu dĺžku úsečky AD_1 dosiahneme práve vtedy, keď sa trojuholník zmení na úsečku, teda pre $\gamma = 135°$. Potom $\max|AD_1| = b + a\sqrt{2}$.



Analogicky zostrojíme štvorec ACE_2D_2 nad stranou AC a dostaneme taktiež, že maximum nastáva pre $\gamma = 135°$ je $\max|BE_2| = a + b\sqrt{2}$. Vcelku teda dostávame, že

$$\max\left(|OM| + |ON|\right) = \frac{1}{2}\max\left(|CD| + |CE|\right) = \frac{1}{2}\max\left(|AD_1| + |BE_2|\right) = \frac{1+\sqrt{2}}{2}(a+b).$$

Komentár a bodovanie: Ani tento príklad nikto z riešiteľov nevyriešil. V prípade, že sa rozhodnete takúto úlohu riešiť analyticky, a nedôjdete k riešeniu (riešením býva zvyčajne dosť komplikovaný výraz, pre ktorý sa ťažko hľadajú extrémy), za vypočítanie súradníc niekoľkých bodov vo vami zvolenom súradnicovom systéme nemôžete rátať s vysokým počtom bodov.

14. Dĺžka minimálnej periódy desatinného zápisu čísla A je 6 a čísla B 12. Aká môže byť dĺžka minimálnej periódy desatinného zápisu čísla $A + B$?

Riešenie: Vzhľadom na to, že perióda sa periodicky opakuje, stačí nám uvažovať čísla A a B z intervalu $(0,1)$, pričom nemajú žiadnu predperiódu. Tieto čísla s periódou dĺžky k môžeme charakterizovať zlomkom, ktorý má v menovateli číslo tvaru $10^k - 1$ a naopak. Konkrétne $A = \frac{a}{999999}$, $B = \frac{b}{999999999999}$. Sčítaním týchto dvoch zlomkov dostávame $A + B = \frac{1000001a + b}{999999999999}$. To znamená, že dĺžka periódy čísla $A + B$ bude určite 12. Otázkou už len ostáva, či minimálna perióda nemôže byť kratšia. Dĺžka minimálnej periódy ľubovoľného zlomku sa rovná deliteľovi dĺžky ľubovoľnej jeho periódy (vyplýva to z procesu delenia a nutnosti opakovania sa zvyškov po delení). Keďže perióda čísla $A + B$ je 12, tak jediné možné dĺžky minimálnej periódy čísla $A + B$ sú 1, 2, 3, 4, 6, 12. Avšak ak by bola táto minimálna perióda dĺžky 1, 2, 3 alebo 6, tak dĺžka minimálnej periódy čísla $B = (A + B) - A$ by bola maximálne 6, čo

je v spore so zadaním. Preto nám ostali len 2 možnosti: 4 a 12. Obe tieto možnosti vyhovujú, môžeme sa o tom presvedčiť na nasledujúcich príkladoch:
Perióda dĺžky 12: $A = 0,\overline{000001}$, $B = 0,\overline{000000000001}$, $A + B = 0,\overline{000001000002}$.
Perióda dĺžky 4: $A = 0,\overline{000001}$, $B = 0,\overline{011100110110}$, $A + B = 0,\overline{0111}$.

Komentár a bodovanie: Zo zaslaných riešení bolo len jedno blízko správneho riešenia. Hlavným problémom v tomto príklade bolo to, že pri sčítavaní períod môžu vznikať „zvyšky“ pri sčítavaní po desatinných miestach, ktoré ovplyvňujú celkový výsledok. Za riešenia, v ktorých ste ukázali, že dĺžka minimálnej periódy môže byť 12, ste nezískali žiadne body, pretože je to triviálny prípad.