Celoštátne kolo matematickej súťaže SOU a SOŠ

PRAKTICKÁ MATEMATIKA

Školský rok 2004/2005

Príklady kategórií K, L

1. Na obrázku je 5 očíslovaných stoličiek pre maturitnú komisiu, ktorá pozostáva z mužov aj žien.

1	2	3	4	5

Nájdite všetky možné rozsadenia mužov a žien, ak viete, že súčasne platí týchto päť podmienok:
   a) aspoň jedna zo stoličiek 1, 3 patrí žene,
   b) zo stoličiek 2, 5 práve jedna patrí mužovi,
   c) na stoličkách 2, 3 sedia osoby rovnakého pohlavia,
   d) na stoličkách 3, 4 sedia osoby rozličného pohlavia,
   e) najviac jedna zo stoličiek 1, 5 patrí mužovi.

2. Tridsať žiakov písalo písomku, jedenásť z nich dostalo známku dobrý. Priemerná známka z písomky bola 3,00. Známku chválitebný dostalo dvakrát toľko žiakov ako známku výborný, známku dostatočný štyrikrát viac žiakov ako známku nedostatočný. Určte, koľko žiakov dostalo známku výborný, chválitebný, dostatočný a nedostatočný.

3. Je daný trojuholník *ABC* s veľkosťami strán $|AB| = 20\,cm$, $|BC| = 16\,cm$, $|AC| = 12\,cm$ a priamky *p*, *q* rovnobežné s *AB*, ktoré rozdeľujú trojuholník na tri útvary s rovnakým obsahom. Určte vzdialenosť bodu *C* od priamok *p* a *q*.

4. Trávnatá plocha má tvar lichobežníka. Dve rovnobežné strany majú veľkosť 20 m a 10 m, dve rôznobežné strany 10 m a $4\sqrt{5}$ m. Koľko árov má trávnatá plocha?

Príklady kategórií M, N

1. Dielňa vo firme plnila plán na 100%, pričom všetci jej zamestnanci mali ten istý výkon. Keď niekoľko zamestnancov ochorelo na chrípku, ostatní zamestnanci zvýšili pracovný výkon o 20%, ale aj potom plnila dielňa plán len na 90%. Po ochorení ďalších štyroch zamestnancov sa podarilo zostávajúcim zamestnancom dosiahnuť pôvodný výkon, pravda, keď zvýšili svoj už zlepšený výkon o 25%.
   Koľko bolo pôvodne v dielni zamestnancov a koľko ich ochorelo?

2. Medzi čísla 3 a 18 vložte dve čísla tak, aby prvé tri tvorili geometrickú postupnosť a posledné tri aritmetickú postupnosť. (V oboch prípadoch ide o tri za sebou idúce členy postupností.)

3. Polkruh s polomerom 1 dm zvinieme do kužeľového kornútka. Koľko litrov vody sa do neho zmestí?

4. Dĺžky hrán kvádra sú a cm, b cm, c cm. Objem tohto kvádra je T cm^3 a povrch T cm^2. Nájdite aspoň 6 takých trojíc prirodzených čísel $[a, b, c]$, kde $a \leq b \leq c$.

Riešenia úloh

Kategórie K, L

1. Úloha má dve riešenia: ženy sedia na stoličkách 1, 4, 5, muži na stoličkách 2, 3, alebo ženy sedia na stoličkách 1, 2, 3, muži na stoličkách 4, 5.

2. Súčet všetkých známok bol 30 . 3 = 90. Označme si x počet žiakov, ktorí dostali známku výborný, a y počet žiakov, ktorí dostali známku nedostatočný. Potom nastala situácia znázornená v nasledujúcej tabuľke:

Známka	1	2	3	4	5
Počet žiakov	x	2x	11	4y	y

Pre počet žiakov platí: $x + 2x + 11 + 4y + y = 30$
Pre súčet známok platí: $1.x + 2.2x + 3.11 + 4.4y + 5y = 90$
Riešením sústavy dvoch rovníc s dvomi neznámymi

$$3x + 5y + 11 = 30,$$
$$5x + 21y = 57$$

dostávame, že x = 3, y = 2. Známku výborný dostali traja, chválitebný šiesti, dostatočný ôsmi a nedostatočný dvaja žiaci.

3. Trojuholník je pravouhlý s odvesnami 12 a 16 *cm*. Jeho obsah je

$$S = \frac{1}{2} \cdot 12\,cm \cdot 16\,cm = 96\,cm^2.$$

Vieme, že pre dĺžku základne trojuholníka *ABC* platí $|AB| = 20\,cm$. Potom veľkosť výšky je $9{,}6\,cm$. Tretina obsahu trojuholníka je $S_1 = 32\,cm^2$. Jedna z troch častí, na ktoré je trojuholník rozdelený priamkami *p*, *q* je trojuholník. Ak jeho stranu rovnobežnú s *AB* označíme *x* a príslušnú výšku na ňu v_1, potom platí

$$S_1 = \frac{1}{2} x v_1. \qquad (1)$$

Z podobnosti tohto trojuholníka s trojuholníkom *ABC* vyplýva, že

$$\frac{x}{20} = \frac{v_1}{9{,}6},$$

odkiaľ po úprave dostávame, že platí

$$v_1 = \frac{12}{25} x.$$

Po dosadení do (1) dostávame

$$32 = \frac{1}{2} x \cdot \frac{12}{25} x.$$

Táto kvadratická rovnica má jediné kladné riešenie $x = \frac{20}{3} \cdot \sqrt{3}$. Potom $v_1 = \frac{48}{15} \cdot \sqrt{3}$.

V druhom prípade zoberieme do úvahy trojuholník s obsahom $S_2 = 64\,cm^2$, ktorého stranu rovnobežnú s *AB* si označíme *y* a výšku na ňu v_2. Opäť využijeme podobnosť tohto trojuholníka s trojuholníkom *ABC*. Dostaneme rovnicu

$$64 = \frac{1}{2} y \cdot \frac{12}{25} y,$$

odkiaľ

$$y = \frac{20}{3} \cdot \sqrt{6},\ v_2 = \frac{16}{5} \cdot \sqrt{6}.$$

Hľadané vzdialenosti sú $v_1 = \frac{48}{15} \cdot \sqrt{3}$ a $v_2 = \frac{16}{5} \cdot \sqrt{6}$.

4. Označme si lichobežník zo zadania *ABCD*, pričom *AB* bude dlhšia základňa. Dlhšia základňa má veľkosť 20 m, kratšia 10 m, ramená 10 m a $4\sqrt{5}$ m. Výšku lichobež-

níka označme v. Z bodov C a D spustíme na základňu AB kolmice. Ich päty označme E, F. Označme $|AF| = x$. Potom

$$|BE| = |AB| - |CD| - |AF| = 20 - 10 - x = 10 - x.$$

Potom v pravouhlých trojuholníkoch AFD a BCE platí Pytagorova veta. Na jej základe si vyjadríme dĺžky $|DF|$ a $|CE|$:

$$10^2 - x^2 = |DF|^2 = |CE|^2 = \left(4\sqrt{5}\right)^2 - (10 - x)^2.$$

Riešením tejto kvadratickej rovnice pre x dostávame, že $x = 6$ a $v = 8$. Teraz už ľahko vypočítame obsah lichobežníka:

$$S = \frac{10 + 20}{2} \cdot 8 = 120.$$

Obsah lichobežníka je 120 metrov štvorcových, čo je 1,2 árov.

Kategórie M, N

1. Označme počet zamestnancov pred prvým ochorením x a počet výrobkov vyrobených jedným zamestnancom v. Po prvom ochorení y zamestnancov ostalo $x - y$ zamestnancov pracovať. Keďže zvýšili svoj výkon o 20%, vyrobili spolu $1{,}2 \cdot v \cdot (x - y)$ výrobkov. Po druhom ochorení ich ostalo už len $x - y - 4$ a vyrobili spolu $1{,}25 \cdot 1{,}2 \cdot v \cdot (x - y - 4)$ výrobkov. Vzhľadom na to, že po prvom ochorení pracovali na 90% pôvodného výkonu a po druhom na 100%, dostávame nasledujúcu sústavu rovníc:

$$1{,}2 \cdot v \cdot (x - y) = 0{,}9 \cdot v \cdot x,$$
$$1{,}25 \cdot 1{,}2 \cdot v \cdot (x - y - 4) = v \cdot x.$$

V prípade, že by bol výkon pracovníkov nulový ($v = 0$), podmienkam zo zadania vyhovuje ľubovoľný prípustný počet pracovníkov. Ďalej predpokladajme, že v je nenulové. Predelením v a riešením sústavy

$$1{,}2 \cdot (x - y) = 0{,}9 \cdot x,$$
$$1{,}25 \cdot 1{,}2 \cdot (x - y - 4) = x,$$

dostávame, že všetkých zamestnancov (x) bolo 48 a na chrípku z nich ochorelo 12 (y).

2. Označme si kvocient danej geometrickej postupnosti q. Potom prvé tri členy zadanej postupnosti budú 3, $3q$, $3q^2$. Ak si označíme diferenciu danej aritmetickej postupnosti d, tak posledné tri členy zadanej postupnosti budú $18 - 2d$, $18 - d$ a 18.

Teraz porovnáme vyjadrenia pre druhý a tretí člen:

$$3q = 18 - 2d\,,$$

$$3q^2 = 18 - d\,.$$

Vyjadrením q z prvej rovnice dostávame, že platí

$$q = \frac{18-2d}{3}\,.$$

Toto vyjadrenie dosadíme do druhej rovnice a úpravou dostaneme kvadratickú rovnicu pre d

$$4d^2 - 69d + 270 = 0\,.$$

Jej riešením dostaneme dve možné diferencie $d_1 = 6$ a $d_2 = \frac{45}{4}$. Potom prislúchajúce štvorice čísel sú 3, 6, 12, 18, a 3, $-\frac{9}{2}$, $\frac{27}{4}$, 18.

3. Polkruh s krajnými bodmi A, B má polomer $s = 1\,\text{dm}$. Dĺžka oblúka AB je obvod podstavy kužeľa, ktorého polomer je r. Potom pre dĺžku polkružnice AB dostávame, že jej dĺžka sa rovná $\pi \cdot s = \pi\,\text{dm}$. Na druhej strane platí avšak $2\pi r = \pi\,\text{dm}$, odkiaľ $r = 0{,}5\,\text{dm}$. Ak označíme výšku kužeľa v, stranu s, máme pravouhlý trojuholník, kde

$$v = \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Potom pre objem V dostávame, že platí

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot v = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{24} \cdot \pi\,\text{dm}^3.$$

Hľadaný objem je $\frac{\sqrt{3}}{24} \cdot \pi$ litrov.

4. Ak si vyjadríme objem a povrch kvádra pomocou dĺžok jeho hrán, dostaneme rovnosť

$$abc = 2(ab + bc + ca).$$

Zvoľme $a = 3$. Dostávame rovnicu

$$3bc = 2(3b + 3c + bc).$$

Z tejto rovnice si vyjadríme c:

$$c = 6 + \frac{36}{b-6}\,.$$

Ak za b zvolíme postupne čísla 7, 8, 9, 10 a 12, dostaneme c rovné 42, 24, 18, 15 a 12, teda dostaneme usporiadané trojice [3, 7, 42], [3, 8, 24], [3, 9, 12], [3, 10, 15], [3, 12, 12].

Ak zvolíme $a = 4$, dostaneme rovnicu

$$4bc = 2(4b + 4c + bc).$$

Analogicky opäť vyjadríme *c*: $c = 4 + \frac{16}{b-4}$.

Za *b* postupne zvolíme čísla 5, 6 a 8 a dostaneme *c* rovné 20, 12 a 8. Celkovo dostávame usporiadané trojice [4, 5, 20], [4, 6, 12], [4, 8, 8].

Ak zvolíme $a = 5$, dostaneme, že $b = 5$ a $c = 10$.

Ak zvolíme $a = 6$, dostaneme, že $b = c = 6$.