NEROVNOSTI II.

3. Nerovnosti medzi priemermi

Nech $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}^+$.

Kvadratickým priemerom čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sa nazýva číslo

$$K(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}.$$

Aritmetickým priemerom čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sa nazýva číslo

$$A(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Geometrickým priemerom čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sa nazýva číslo

$$G(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Harmonickým priemerom čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sa nazýva číslo

$$H(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$

Veta (KAGH nerovnosť):

Nech $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}^+$. Potom pre všetky $n \in \mathbf{N}$ platí

$$K(a_1, a_2, \ldots, a_n) \geq A(a_1, a_2, \ldots, a_n) \geq G(a_1, a_2, \ldots, a_n) \geq H(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Rovnosť nastáva práve vtedy, keď $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Dôkaz*: AG nerovnosť*:

$$A(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = G(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

Nerovnosť je homogénna, teda stačí zvoliť také $a_1, a_2, \ldots, a_n$, že $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$. Treba už len dokázať

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq 1.$$

Pre $n = 1$ je tvrdenie zrejmé. Majme ďalej daných $n+1$ kladných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$, pre ktoré $a_1 a_2 \ldots a_{n+1} = 1$ a predpokladajme, že tvrdenie platí pre n. Zvoľme

$$y_1 = a_1, \ \ldots, \ y_{n-1} = a_{n-1}, \ y_n = a_n a_{n+1}.$$

Potom $y_1 y_2 \ldots y_n = 1$, čo znamená, že

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n \geq n,$$

teda

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n a_{n+1} \geq n.$$

Potrebujeme dokázať, že platí

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1} \geq n+1 .$$

Na to zrejme stačí, aby platilo

$$a_n + a_{n+1} \geq a_n a_{n+1} + 1 ,$$

tj.

$$(a_n - 1)(a_{n+1} - 1) \leq 0 .$$

To z predpokladu $a_1 a_2 \ldots a_{n+1} = 1$ všeobecne neplynie, s ohľadom na symetriu však možno čísla $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ vopred usporiadať tak, aby platilo $a_n \leq a_i \leq a_{n+1}$ pre $i = 1,2,\ldots,n-1$. Potom platí

$$a_n^{n+1} \leq a_1 a_2 \ldots a_{n+1} \leq a_{n+1}^{n+1},$$

tj.

$$a_n \leq 1 \leq a_{n+1},$$

odkiaľ plynie

$$(a_n - 1)(a_{n+1} - 1) \leq 0 .$$

Tým je nerovnosť

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1} \geq n+1$$

dokázaná. Ak nastáva rovnosť, znamená to, že

$$(a_n - 1)(a_{n+1} - 1) = 0$$

a

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = a_n a_{n+1} = 1,$$

odkiaľ priamo plynie $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = 1$. Z prvej podmienky dostávame, že $a_n = 1$ alebo $a_{n+1} = 1$. Dosadením do druhej podmienky dostávame, že $a_{n+1} = 1$ resp. $a_n = 1$. Vcelku dostávame, že $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n+1} = 1$.

GH nerovnosť:

$$G(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} = H(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

Pri dokazovaní tejto nerovnosti využijeme AG nerovnosť:

$$H(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{1}{A\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_n}\right)} \leq \frac{1}{G\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_n}\right)} = G(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Rovnosť nastáva práve vtedy, keď $\frac{1}{a_1} = \frac{1}{a_2} = \ldots = \frac{1}{a_n}$, tj. $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

KA nerovnosť:

$$K(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = A(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Nerovnosť je homogénna, preto stačí uvažovať $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n$. Chceme dokázať, že platí $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} \geq \sqrt{n}$.

Pre $n=1$ tvrdenie triviálne platí. Označme $x_k = a_k - 1,\ k = 1,2,\ldots,n$. Potom platí $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$.

Lema: (Bernoulliho nerovnosť)
Nech $x \geq -1$. *Ak* $0 < \alpha < 1$, *potom platí* $(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$. *Ak* $\alpha < 0$ *alebo* $\alpha > 1$, *potom platí* $(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$. *Rovnosť v oboch prípadoch nastáva len pre* $x = 0$.

Keďže $x_k > -1$ a $2 > 1$, platí podľa Bernoulliho nerovnosti

$$a_k^2 = (1 + x_k)^2 \geq 1 + 2x_k,\ 1 \leq k \leq n.$$

Sčítaním týchto nerovností pre všetky $k = 1,2,\ldots,n$ dostávame

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geq n + 2(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = n,$$

čo sme chceli dokázať. Rovnosť nastane len vtedy, keď

$$a_k^2 = 1 + 2x_k,\ \ k = 1,2,\ldots,n,$$

čo po dosadení za x_k dáva

$$a_k^2 = 2a_k - 1.$$

To je ekvivalentné s $(a_k - 1)^2 = 0$, teda $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$.
Tým je dôkaz *KAGH nerovnosti* skončený. □

Príklad 3.1. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbf{N}_0$ platí nerovnosť

$$n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

a zistite, kedy nastáva rovnosť.

Riešenie: Použitím AG nerovnosti pre čísla $1,2,\ldots,n$ dostávame

$$n! = \left(\sqrt[n]{1.2.\ldots.n}\right)^n \overset{GA}{\leq} \left(\frac{1+2+\ldots+n}{n}\right)^n = \left(\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n}\right) = \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Rovnosť nastáva práve vtedy, keď $1 = 2 = \ldots = n$. Ak je však $n \geq 2$, rovnosť nastať nemôže. Preto nastáva rovnosť len pre $n = 1$. □

Príklad 3.2. Dokážte pre všetky $n \in \mathbf{N}$:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$$

a zistite, kedy nastáva rovnosť.

Riešenie: Použitím GH nerovnosti pre čísla 1, 2, …, n dostávame

$$\sqrt[n]{1.2.\ldots.n} \overset{GH}{\geq} \frac{n}{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}.$$

Po vynásobení oboch strán nerovnosti kladným výrazom $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$ a predelení nenulovým číslom $\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ dostávame požadované tvrdenie. Rovnosť nastáva práve vtedy, keď $1=2=\ldots=n$. Ak $n\geq 2$, rovnosť nastať nemôže. Preto nastáva rovnosť len pre $n=1$. □

Príklad 3.3. Dokážte pre všetky $k\in\mathbf{N}$:

$$1^1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot\ldots\cdot k^k\geq\left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}k(k+1)}$$

a zistite, kedy nastáva rovnosť.

Riešenie: Uvažujme $\frac{1}{2}k(k+1)$ čísel: 1 × 1, 2 × $\frac{1}{2}$, 3 × $\frac{1}{3}$, ..., k × $\frac{1}{k}$. Ich súčet sa rovná k, preto platí na základe AG nerovnosti

$$1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{k}\right)^k\overset{GA}{\leq}\left(\frac{k}{\frac{1}{2}k(k+1)}\right)^{\frac{1}{2}k(k+1)}=\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{2}k(k+1)}.$$

Prevrátením tejto nerovnosti dostávame požadované tvrdenie. Rovnosť nastáva len pre $n=1$ (postupujeme analogicky ako v predchádzajúcich dvoch príkladoch). □

Martin Hriňák