Zaujímavé dôkazy

<u>Veta 1:</u> Prvočíselných dvojčiat je nekonečne veľa.
<u>Dôkaz:</u> Pri tomto dôkaze využijeme myšlienku Euklidovho dôkazu nekonečnosti počtu všetkých prvočísel. Predpokladajme, že existuje najväčšie prvočíslo p. Nech $m = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot p + 1$. Potom z Euklidovho dôkazu m musí byť prvočíslo (nemôže mať prvočíselného deliteľa menšieho ako je samo, lebo po delení každým číslom menším ako p dáva zvyšok 1, teda aj po delení každým prvočíslom dáva zvyšok 1), podobne aj $m - 2$ je prvočíslom (tam je spomínaný zvyšok -1). Ak predtým bola najväčšia dvojica prvočísel s rozdielom 2 rovná r a $r + 2$, tak určite $r < m$, lebo $r < p < m$. Dostali sme spor s predpokladom maximality dvojičiek r a $r + 2$. Preto existuje nekonečne veľa prvočíselných dvojčiat. □

<u>Veta 2:</u> Strany trojuholníkov ABC a $A_1B_1C_1$ majú po rade dĺžky a, b, c, resp. a_1, b_1, c_1. Ich obvody sú p a p_1. Dokážte, že ak platí $\frac{a}{a_1} = \frac{p}{p_1}$, potom sú tieto dva trojuholníky podobné.

<u>Dôkaz:</u> Ak sú trojuholníky ABC a $A_1B_1C_1$ podobné, tak platí $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$. Potom dostávame:

$$\frac{p}{p_1} = \frac{a+b+c}{a_1+b_1+c_1} = \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}.$$

Keďže strany daných dvoch trojuholníkov sú navzájom úmerné, tak tieto trojuholníky sú podobné, čo sme chceli dokázať. □

<u>Veta 3:</u> π = 0.
<u>Dôkaz:</u> Platí $e^{i\pi} = -1$, teda aj

$$e^{2i\pi} = \left(e^{i\pi}\right)^2 = (-1)^2 = 1.$$

Logaritmovaním tejto rovnice dostaneme, že platí aj

$$2 \cdot i \cdot \pi \cdot \ln \mathrm{e} = 0.$$

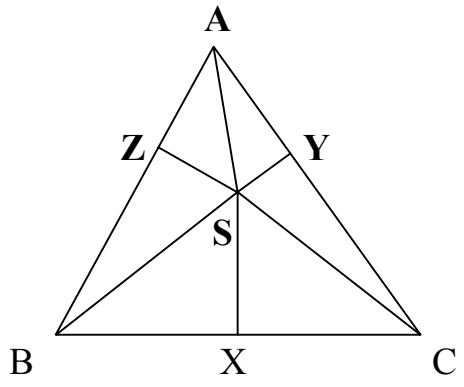
Pretože ln e = 1, dostávame $2i\pi = 0$. Odtiaľ máme, že $\pi = 0$, lebo $i \neq 0$. □

<u>Veta 4:</u> Každý trojuholník je rovnostranný.
<u>Dôkaz:</u> Najprv dokážeme, že každý trojuholník je rovnoramenný. Nech ABC je ľubovoľný trojuholník. Ak je trojuholník ABC rovnoramenný so základňou BC, tak sme tvrdenie dokázali. Ďalej predpokladajme, že rovnoramenný nie je. Potom sa os uhla BAC a os strany BC pretínajú v jednom bode. Stred strany BC označme X, priesečník osi uhla BAC s osou strany BC označme S, pätu kolmice z bodu S na stranu AC označme Y a pätu kolmice z bodu S na stranu AB označme Z (obr. 1).
Najprv uvažujme, že bod S leží vnútri trojuholníka ABC. Potom na základe viet o zhodnosti trojuholníkov máme, že

$$\Delta AZS \cong \Delta AYS,$$

lebo tieto dva trojuholníky majú zhodnú stranu a uhly k nej prislúchajúce. Podobne dostávame, že

$$\Delta SXB \cong \Delta SXC.$$



Obr. 1

Z prvej rovnice dostávame, že $|SZ| = |SY|$ a z druhej rovnice, že $|SB| = |SC|$. Potom sú trojuholníky *SBZ* a *SCY* zhodné. Potom platí

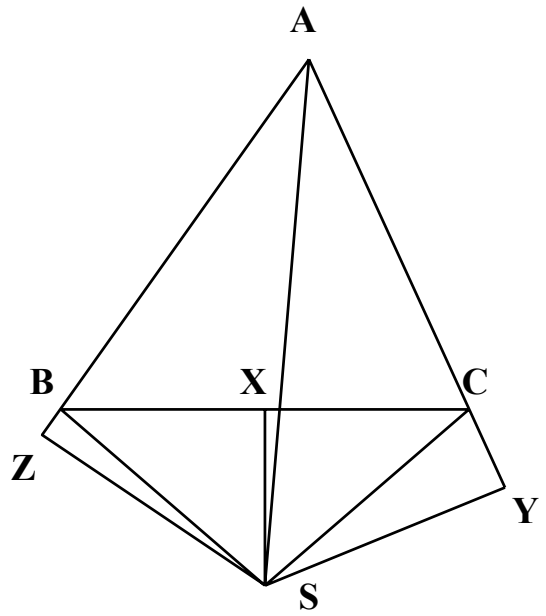
$$|AZ| = |AY|,$$
$$|BZ| = |CY|.$$

Sčítaním týchto dvoch rovností dostávame

$$|AB| = |AC|,$$

teda trojuholník *ABC* je rovnoramenný.

V prípade, že bod *S* leží mimo trojuholníka, nastane situácia ako na obr. 2.



Obr. 2

V tomto prípade môžeme postupovať analogicky. Dostaneme sa tiež k rovnostiam

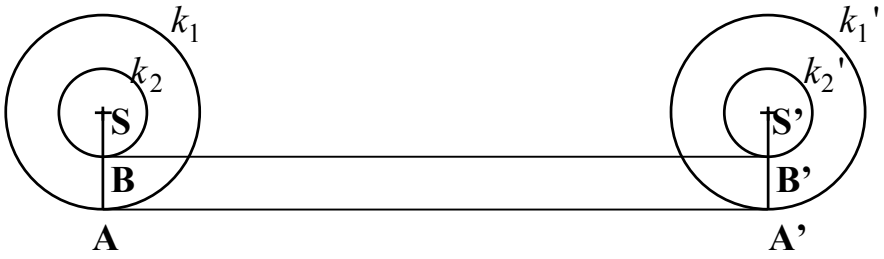
$$|AZ| = |AY|,$$
$$|BZ| = |CY|.$$

Ich odčítaním dostávame

$$|AB| = |AC|,$$

čo znamená, že trojuholník *ABC* je rovnoramenný.
Vzhľadom na to, že sme ukázali, že trojuholník *ABC* je rovnoramenný so základňou *BC*, môžeme ukázať, že je rovnoramenný aj so základňou *AB*. Z toho dostávame, že trojuholník *ABC* je rovnostranný, čo sme chceli dokázať. □

<u>Veta 5:</u> Všetky kružnice majú rovnakú dĺžku.
<u>Dôkaz:</u> Majme dve kružnice $k_1(S_1;r_1)$ a $k_2(S_2;r_2)$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $S \equiv S_1 \equiv S_2$. Nechajme kružnicu k_1 urobiť jedno otočenie z bodu *A* do bodu A' podľa obr. 3.



Obr. 3

Potom bod *B* prejde do bodu B', pričom kružnica k_2 tiež urobí jednu otáčku, teda dĺžka kružnice k_2 je $|BB'|$. Keďže dĺžka kružnice k_1 sa rovná $|AA'|$, dĺžka kružnice k_2 sa rovná $|BB'|$ a $|AA'| = |BB'|$, tak dostávame, že kružnice k_1 a k_2 majú rovnakú dĺžku. □
(*Chyby týchto dôkazov uverejňujeme na strane 15.*)

Martin Hriňák