Metodicko-pedagogické centrum, Tomášikova 4, Bratislava

Združenie na podporu vzdelávania
EDUKÁCIA
CASIO

Ročník: 8
Číslo: 1
Šk. rok: 2002/2003

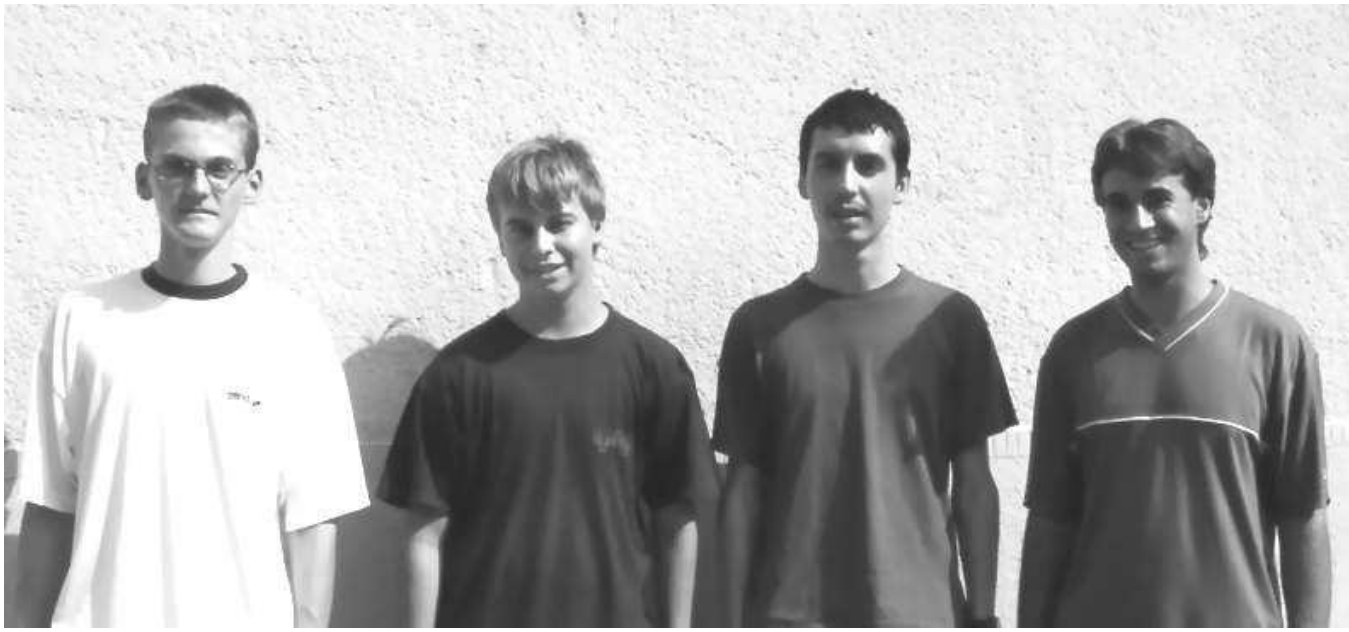
Matematický časopis pre žiakov základných a stredných škôl

MAT MIX

Nezabudnuteľní objavitelia si skoro vždy zaslúžia úctu ...

Hardy o Ramanujanovi
(Podrobnejšie čítajte na s. 1)

Sústredenie MATMIXu
Štúrovo 26. – 30. augusta 2002



Víťazi 7. ročníka korešpondenčnej súťaže MATMIXu – zľava Pavol Hronec (víťaz kategórie Z), Michal Kesely (víťaz kategórie C), Martin Molnár (víťaz kategórie B) a Richard Gál (víťaz kategórií A a π).

Spoločná fotografia (zľava Dárius Gál, Marián Jurík, Pavol Cvik, Pavol Hronec, Katarína Korcsoková, Róbert Birkus, Tomáš Uhrín, Róbert Šoffa, Peter Korcsok, Richard Gál, Ondrej Koreň, Martin Molnár, Veronika Cigáňová, Michal Kesely, Mária Krakovíková, Soňa Podleiszeková a Martin Hriňák)

(Bližšie informácie o sústredení môžete nájsť na strane 8.)

Ramanujan – osobný priateľ každého prirodzeného čísla

Asi hneď mu bolo zrejmé, že $\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\dots}}}}=3$. Vedeli by ste to dokázať?

Rámačandra Ráo, známy indický matematik, prezrel ošúchané zošity ubiedeného mladého muža. Nedokázal hneď posúdiť ich mimoriadnosť. Vytušil však závažnosť ich obsahu i osobnosti predkladateľa. Neskôr podobný úžas zažil *G. H. Hardy* (1877 – 1947), hviezda anglickej matematiky, keď dostal list obsahujúci asi 120 matematických vzorcov bez dôkazov. „*Nikdy predtým som nevidel nič ani v najmenšom podobné… Musia byť pravdivé, pretože keby neboli, nikto by nemal takú predstavivosť, aby ich vymyslel.*“ Niektoré z týchto matematických vzťahov boli známe, niektoré Hardy dokázal až po dosť dlhom čase, niektoré aproximácie neboli dosť presné. Hardy spoznal nečakanú výnimočnosť takého spôsobu vyjadrenia. Príbeh najromantickejšej spolupráce matematikov sa mohol rozvíjať.

Srínivasa Ramanujan (22.12.1887 – 26.4.1920) pochádzal z mestečka Eroda v južnej Indii, z rodiny chudobného brahmínskeho úradníka. Vychodil základnú i strednú školu. Svet matematiky sa mu otvoril po zoznámení sa s knižkou *G. Carra*: *Zhrnutie základných výsledkov teoretickej a aplikovanej matematiky.* Obsahovala 6155 viet bez dôkazov. Mladý Ramanujan sám odhalil *Eulerovu formulu* spájajúcu exponenciálne a trigonometrické funkcie. Potom, keď mu ukázali riešenie kubickej rovnice, on sám našiel svoju metódu na riešenie rovníc štvrtého stupňa. Urobil skúšky na univerzitu v Madráse, ale pre slabé vedomosti z angličtiny neuspel na vysokoškolských nematematických skúškach. Oženil sa (1909), získal miesto účtovníka v prístave.

Napĺňal svoj život matematikou. Svoje výsledky si značil do zápisníkov (tri poznámkové zošity boli preplnené viac ako 4000 pozoruhodnými matematickými vzťahmi), postupne sa stával indickým matematickým géniom, ktorý publikoval v časopise *Indickej matematickej spoločnosti*. Zdalo sa, že poznal to, čo sa učil. Aj známi indickí matematici už spoznali, že bez štipendia môže ochabnúť prirodzená Ramanujanova schopnosť matematického myslenia. Presvedčili ho, aby napísal Hardymu (v liste boli aj slová: „*nemám univerzitné vzdelanie … venoval som celý svoj voľný čas práci v matematike … našiel som si svoju vlastnú cestu … vymýšľam si smer výskumu sám… som chudobný a ak by ste v tom našiel niečo cenné, rád by som to publikoval…*). Ramanujan dostal pozvanie do Anglicka, prekonal aj kastovné ťažkosti s vycestovaním z Indie. Od roku 1914 do roku 1919 bol v Cambridgi.

Jednoduchý, skromný, neskúsený Ind s úžasnou schopnosťou vnímať vzájomné vzťahy medzi číslami, algebraickými vzťahmi a transformáciami nekonečných radov sa stal uznávaným profesionálnym matematikom spolupracujúcim

s Hardym a Littlewoodom. Stal sa členom Trinity College (1914) a neskôr aj Londýnskej kráľovskej spoločnosti (1918). Od roku 1917 bol nevyliečiteľne chorý, vo februári 1919 odcestoval z Anglicka. Zomrel na predmestí Madrásu. Slávny Hardy o ňom povedal: „ ... *naučil som sa od neho viac ako on odo mňa... bol najpozoruhodnejším matematikom, akého som kedy poznal... bol normálnou ľudskou bytosťou a veľkým matematikom... nezabudnuteľní objavitelia si skoro vždy zaslúžia úctu...*“. V roku 1927 vyšli Ramanujanove zobrané spisy, v roku 1957 aj jeho zápisníky. Hardy napísal o ňom knihu (1940). Od roku 1961 udeľuje indická Akadémia vied *Ramanujanovu medailu* za vedecké úspechy vo fyzike, chémii a matematike.

Ilustrujme nezvyčajné schopnosti S. Ramanujana príhodou, ktorú s ním zažil G. Hardy. Pri návšteve svojho chorého priateľa mu oznámil, že pricestoval taxíkom s číslom 1729 (= 7.13.19). Podľa Hardyho číslo bezvýznamné. Ramanujan však bez prípravy spoznal zaujímavú vlastnosť tohto čísla: je to najmenšie číslo, ktoré je dvakrát súčtom dvoch tretích mocnín ($1729 = 10^3 + 9^3 = 12^3 + 1^3$). Hardy sa musel zamýšľať asi pol roka, aby sa o tom presvedčil a vedel to dokázať.

Ramanujan zostane na dlhú dobu najlepším znalcom reťazových zlomkov. Bol prirodzeným matematickým géniom podobne ako Gauss alebo Euler. Mal úžasnú pamäť na čísla a vnímal ich ako duchovných priateľov. Možno je neprekonateľný vo vhľade do algebraických matematických formúl. Napriek formálnym nedostatkom v dôkazových postupoch a presných matematických technikách ovplyvnil rozvoj analytickej teórie čísel, teóriu eliptických funkcií, postupy na sčitovanie divergentných radov, vyčísľovanie určitých integrálov a funkcionálne vyjadrenie dzeta funkcie. Ukázal celý rad pozoruhodných kongruencií i asymptotických odhadov. Mal úžasný vhľad do vlastností čísel. Vymyslel si a vynašiel nezvyčajným spôsobom problémy, ktoré sú ešte stále pre nás nečakaným prekvapením.

Zdroj a povaha Ramanujanových schopností sú tajomné. Jeho predstavy boli zmesou číselných úvah, intuícií a indukcií, ktoré často nedokázal súvislo opísať. Nikto nevie, ako prichádzal na svoje matematické výsledky. Jeho mozog fungoval pre nás úplne nepochopiteľným spôsobom. Asi ešte nikdy sa ľudský duch nepovzniesol tak vysoko s takou malou predbežnou vzdelanostnou podporou. Presvedčil nás o nezvyčajnej ľudskej schopnosti zovšeobecňovať, modifikovať hypotézy, uplatňovať kapacity pamäti, vytušiť vlastnosti matematických formúl. „*Zdá sa, že to bol formalista, ktorý sa zaobišiel bez logiky, experimentátor, ktorý neprihliadal k fyzikálnej realite, prieskumník kráľovstva čísel,*“ povedal o ňom *J. D. Barrow.* Ramanujan zostane asi navždy nenapodobiteľným príkladom budovateľa krásnych matematických formúl.

Dušan Jedinák

Zaujímavé dôkazy

<u>Veta 1:</u> Prvočíselných dvojčiat je nekonečne veľa.
<u>Dôkaz:</u> Pri tomto dôkaze využijeme myšlienku Euklidovho dôkazu nekonečnosti počtu všetkých prvočísel. Predpokladajme, že existuje najväčšie prvočíslo p. Nech $m = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot p + 1$. Potom z Euklidovho dôkazu m musí byť prvočíslo (nemôže mať prvočíselného deliteľa menšieho ako je samo, lebo po delení každým číslom menším ako p dáva zvyšok 1, teda aj po delení každým prvočíslom dáva zvyšok 1), podobne aj $m - 2$ je prvočíslom (tam je spomínaný zvyšok -1). Ak predtým bola najväčšia dvojica prvočísel s rozdielom 2 rovná r a r + 2, tak určite $r < m$, lebo $r < p < m$. Dostali sme spor s predpokladom maximality dvojičiek r a r + 2. Preto existuje nekonečne veľa prvočíselných dvojčiat. □

<u>Veta 2:</u> Strany trojuholníkov ABC a $A_1B_1C_1$ majú po rade dĺžky a, b, c, resp. a_1, b_1, c_1. Ich obvody sú p a p_1. Dokážte, že ak platí $\frac{a}{a_1} = \frac{p}{p_1}$, potom sú tieto dva trojuholníky podobné.

<u>Dôkaz:</u> Ak sú trojuholníky ABC a $A_1B_1C_1$ podobné, tak platí $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$. Potom dostávame:

$$\frac{p}{p_1} = \frac{a+b+c}{a_1+b_1+c_1} = \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}.$$

Keďže strany daných dvoch trojuholníkov sú navzájom úmerné, tak tieto trojuholníky sú podobné, čo sme chceli dokázať. □

<u>Veta 3:</u> π = 0.
<u>Dôkaz:</u> Platí $e^{i\pi} = -1$, teda aj

$$e^{2i\pi} = \left(e^{i\pi}\right)^2 = (-1)^2 = 1.$$

Logaritmovaním tejto rovnice dostaneme, že platí aj

$$2 \cdot i \cdot \pi \cdot \ln \mathrm{e} = 0.$$

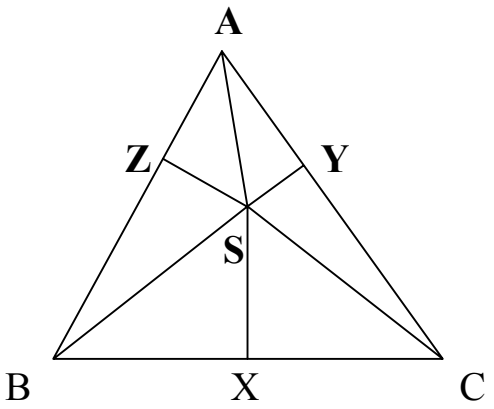
Pretože ln e = 1, dostávame $2i\pi = 0$. Odtiaľ máme, že $\pi = 0$, lebo $i \neq 0$. □

<u>Veta 4:</u> Každý trojuholník je rovnostranný.
<u>Dôkaz:</u> Najprv dokážeme, že každý trojuholník je rovnoramenný. Nech ABC je ľubovoľný trojuholník. Ak je trojuholník ABC rovnoramenný so základňou BC, tak sme tvrdenie dokázali. Ďalej predpokladajme, že rovnoramenný nie je. Potom sa os uhla BAC a os strany BC pretínajú v jednom bode. Stred strany BC označme X, priesečník osi uhla BAC s osou strany BC označme S, pätu kolmice z bodu S na stranu AC označme Y a pätu kolmice z bodu S na stranu AB označme Z (obr. 1).
Najprv uvažujme, že bod S leží vnútri trojuholníka ABC. Potom na základe viet o zhodnosti trojuholníkov máme, že

$$\Delta AZS \cong \Delta AYS,$$

lebo tieto dva trojuholníky majú zhodnú stranu a uhly k nej prislúchajúce. Podobne dostávame, že

$$\Delta SXB \cong \Delta SXC.$$



Obr. 1

Z prvej rovnice dostávame, že $|SZ| = |SY|$ a z druhej rovnice, že $|SB| = |SC|$. Potom sú trojuholníky *SBZ* a *SCY* zhodné. Potom platí

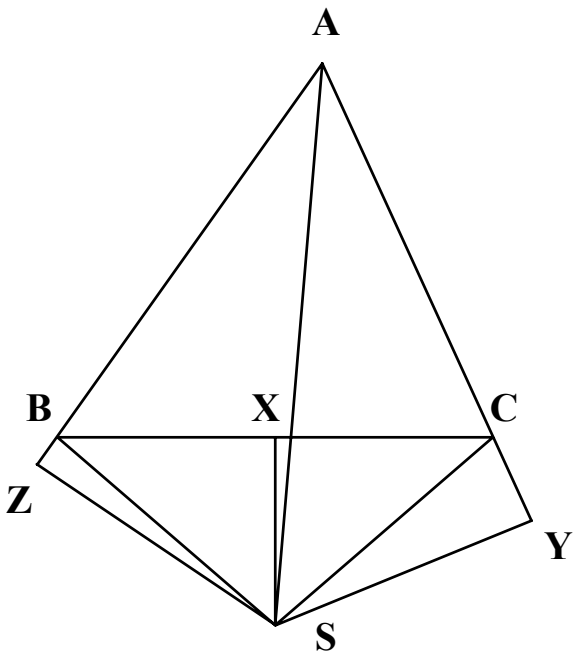
$$|AZ| = |AY|,$$
$$|BZ| = |CY|.$$

Sčítaním týchto dvoch rovností dostávame

$$|AB| = |AC|,$$

teda trojuholník *ABC* je rovnoramenný.

V prípade, že bod *S* leží mimo trojuholníka, nastane situácia ako na obr. 2.



Obr. 2

V tomto prípade môžeme postupovať analogicky. Dostaneme sa tiež k rovnostiam

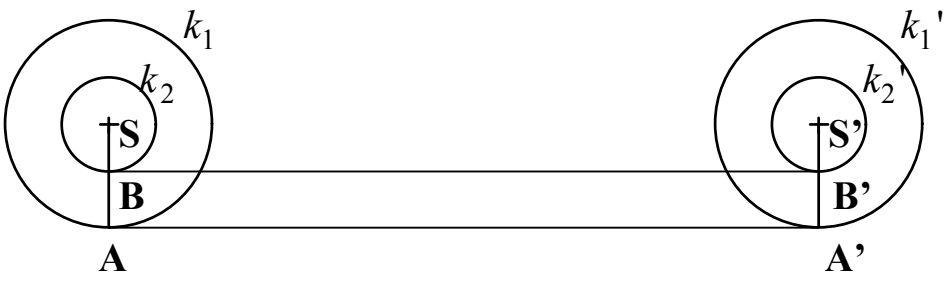
$$|AZ| = |AY|,$$
$$|BZ| = |CY|.$$

Ich odčítaním dostávame

$$|AB| = |AC|,$$

čo znamená, že trojuholník *ABC* je rovnoramenný.
Vzhľadom na to, že sme ukázali, že trojuholník *ABC* je rovnoramenný so základňou *BC*, môžeme ukázať, že je rovnoramenný aj so základňou *AB*. Z toho dostávame, že trojuholník *ABC* je rovnostranný, čo sme chceli dokázať. □

<u>Veta 5:</u> Všetky kružnice majú rovnakú dĺžku.
<u>Dôkaz:</u> Majme dve kružnice $k_1(S_1;r_1)$ a $k_2(S_2;r_2)$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $S \equiv S_1 \equiv S_2$. Nechajme kružnicu k_1 urobiť jedno otočenie z bodu *A* do bodu A' podľa obr. 3.



Obr. 3

Potom bod *B* prejde do bodu B', pričom kružnica k_2 tiež urobí jednu otáčku, teda dĺžka kružnice k_2 je $|BB'|$. Keďže dĺžka kružnice k_1 sa rovná $|AA'|$, dĺžka kružnice k_2 sa rovná $|BB'|$ a $|AA'| = |BB'|$, tak dostávame, že kružnice k_1 a k_2 majú rovnakú dĺžku. □
(*Chyby týchto dôkazov uverejňujeme na strane 15.*)

Martin Hriňák

Čo zatajujú skriptá z planimetrie
alebo
Feuerbachova kružnica na Eulerovej priamke

Úvod

Vyučujem rád. V matematike môžete zažiť veľa zábavy, vidieť a spoznať veľa nového, keď učíte správnu triedu planimetriu. Tak sme sa jedného dňa dostali v mojej kvinte až k Eulerovej priamke a Feuerbachovej kružnici.

V stredoškolských skriptách *Základy planimetrie* (*Boček, Leo, SPN, 1987*) je v 10. kapitole definovaná Eulerova priamka a v 15. kapitole Feuerbachova kružnica

bez uvedenia akéhokoľvek vzájomného vzťahu. Takisto nie je uvedený ani (v skutočnosti veľmi jednoduchý) vzťah na výpočet polomeru Feuerbachovej kružnice. Pôvodne som preto nadobudol dojem, že tieto dva poznatky sú tak zložité, že nie je možné rozprávať o nich prvákom. Tento názor som však po nejakom čase radikálne zmenil, pretože prváci nielenže tieto dva poznatky pochopia, ale ich odvodenie je aj výstižnou aplikáciou (neprávom) nepopulárneho a pre žiakov náročného učiva o rovnoľahlosti. Nakoniec ma k odvodeniu týchto vzťahov vyprovokovali žiaci v diskusii o príkladoch pred písomkou.

Najprv teda pár slov o tom, čo je Eulerova priamka a Feuerbachova kružnica.

Označenia

V trojuholníku ABC zavedieme nasledovné označenia:
V – ortocentrum (priesečník výšok)
T – ťažisko
S – stred opísanej kružnice
R – polomer opísanej kružnice
A_1, B_1, C_1 – stredy strán v poradí BC, AC, AB
A_2, B_2, C_2 – päty výšok z vrcholov v poradí A, B, C
A_3, B_3, C_3 – stredy úsečiek v poradí AV, BV, CV
F – stred Feuerbachovej kružnice

Eulerova priamka

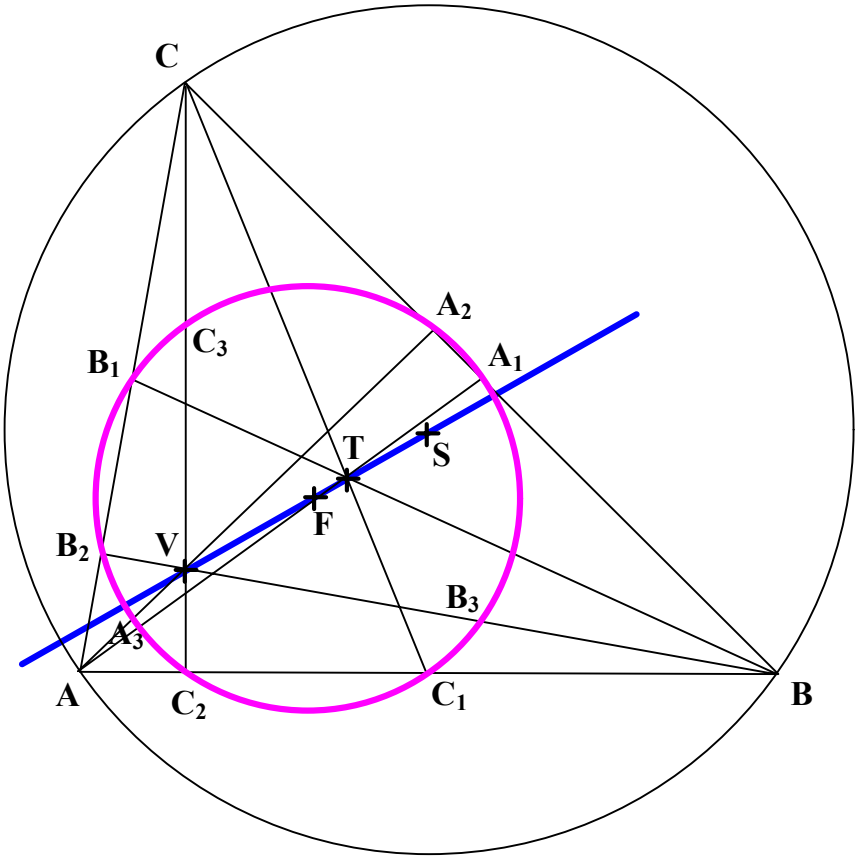
V každom trojuholníku ležia body V, T a S na jednej priamke. Táto priamka sa nazýva *Eulerova*. Hlavnou ideou dôkazu je, že rovnoľahlosť Λ so stredom T a koeficientom –2 zobrazuje stredy strán trojuholníka ABC do vrcholov trojuholníka ABC, t.j. $A_1 \to A$, $B_1 \to B$, $C_1 \to C$. V rovnoľahlosti Λ sa preto osi strán trojuholníka ABC zobrazujú do výšok trojuholníka (zachováva sa totiž rovnobežnosť), a preto sa bod S zobrazí do bodu V. Teda nielenže body V, T, S ležia na jednej priamke v tomto poradí, ale platí aj $|VT| = 2 \cdot |TS|$.

Feuerbachova kružnica (kružnica deviatich bodov)

V každom trojuholníku leží 9 bodov A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3 na jednej kružnici. Táto kružnica sa nazýva *Feuerbachova* (*kružnica deviatich bodov*).

<u>Dôkaz</u>: Najprv dokážeme, že $A_1B_1A_3B_3$ je obdĺžnik. Úsečka A_1B_1 je strednou priečkou trojuholníka ABC a takisto A_3B_3 je strednou priečkou trojuholníka ABV. Úsečky A_1B_1, A_3B_3 sú teda rovnobežné s úsečkou AB a dĺžky obidvoch sa rovnajú polovici dĺžky strany AB. Ďalej úsečka A_1B_3 je strednou priečkou trojuholníka BCV a takisto A_3B_1 je strednou priečkou trojuholníka ACV. Úsečky A_1B_3, A_3B_1 sú teda rovnobežné s úsečkou CV a ich dĺžky sa rovnajú polovici dĺžky tejto úsečky. Navyše platí $A_1B_3 \perp A_1B_1$, lebo $CV \perp AB$. Štvoruholník $A_1B_1A_3B_3$ je teda naozaj obdĺžnik. Jeho uhlopriečky sa navzájom rozpoľujú. Ich priesečník označíme F. Analogicky platí , že $A_1C_1A_3C_3$ a $B_1C_1B_3C_3$ sú tiež obdĺžniky. Uhlopriečka A_1A_3 je spoločná pre dva z týchto obdĺžnikov, t.j. priesečníky uhlopriečok dvoch obdĺžnikov sú totožné a uhlopriečky sú zhodné. Použitím spoločnej uhlopriečky B_1B_3 dokážeme, že bod F je prie-

sečníkom uhlopriečok vo všetkých troch obdĺžnikoch a všetkých 6 bodov A_1, B_1, C_1, A_3, B_3, C_3 leží na kružnici k so stredom F. Pokiaľ $C_1 = C_2$ (to nastane práve vtedy, keď trojuholník ABC je rovnoramenný s ramenami AC, BC), leží bod C_2 na kružnici k. Pokiaľ $C_1 \neq C_2$, tak trojuholník $C_1C_2C_3$ je pravouhlý a jeho prepona C_1C_3 je priemerom kružnice k. Podľa Talesovej vety leží potom bod C_2 na kružnici k. Analogické úvahy platia aj pre body A_2 a B_2, a tým je veta dokázaná.



Špeciálne prípady

Rovnostranný trojuholník

Eulerova priamka nie je jednoznačne určená (body V, T, S splývajú). Je to jediný taký trojuholník, pretože sa dá dokázať, že ak dva z bodov V, T, S splývajú (t.j. podľa vzťahu $|VT| = 2 \cdot |TS|$ splývajú všetky tri), tak trojuholník je rovnostranný. Feuerbachova kružnica je totožná s vpísanou kružnicou.

Pravouhlý trojuholník

Na Eulerovej priamke leží ťažnica na preponu. Ťažnica na preponu je priemerom Feuerbachovej kružnice.

Polomer Feuerbachovej kružnice

Už v dvoch špeciálnych prípadoch sme videli, že polomer Feuerbachovej kružnice sa rovná polovici polomeru R opísanej kružnice. Nie je to náhoda, platí to v každom trojuholníku.

Dôkaz: Feuerbachova kružnica je opísanou kružnicou trojuholníku $A_1B_1C_1$, čo je

trojuholník vytvorený zo stredných priečok trojuholníka *ABC*. Preto má polovičné všetky zodpovedajúce dĺžky vzhľadom na trojuholník *ABC*. Teda aj dĺžku polomeru opísanej kružnice.

Súvislosť Eulerovej priamky a Feuerbachovej kružnice

Ak si bližšie všimneme rovnoľahlosť $\Psi(V,\ k=\frac{1}{2})$, vidíme, že z vlastností rovnoľahlosti vyplýva: stred *S* opísanej kružnice trojuholníku *ABC* sa zobrazí do stredu *F* Feuerbachovej kružnice. Preto body *S*, *F*, *V* ležia na jednej priamke tak, že bod *F* je stred úsečky *SV*. To však znamená, že stred Feuerbachovej kružnice leží na Eulerovej priamke v každom trojuholníku. Navyše body *V*, *F*, *T*, *S* ležia na Eulerovej priamke v tomto poradí a pomer dĺžok úsečiek $|VF|:|TS|:|TF|$ sa rovná $3:2:1$.

Mgr. Martin Kollár

Sústredenie MATMIXu, 26. – 30. augusta 2002, Štúrovo

Aj tohto roku sa uskutočnilo sústredenie pre najlepších riešiteľov korešpondenčnej súťaže nášho časopisu v Štúrove. Sústredenie sa uskutočnilo za prispenia firmy CASIO, ktorá venovala aj ceny pre víťazov jednotlivých kategórií, a nadácie EDUKÁCIA.

Sústredenia sa zúčastnilo 15 žiakov, ktorí boli rozdelení do 4 družstiev. Navzájom súťažili v rôznych súťažiach – uskutočnili sa turnaje vo futbale a volejbale, počítali MATBOJ, hrali bludiská, macháčka či šarády. Po dobrých skúsenostiach z minulého roku sa aj tentoraz uskutočnili individuálne turnaje v šachu a piškvorkách, na žiadosť účastníkov pribudol aj turnaj v pretláčaní pravou a ľavou rukou. Počasie nám tohto roku prialo. Okrem kúpania na miestnom termálnom kúpalisku niektorí využili aj obnovený most Márie Valérie na návštevu Ostrihomu.

Počas sústredenia odzneli prednášky z rôznych oblastí matematiky – geometrie (Richard Gál – Mocnosť bodu ku kružnici, RNDr. Milan Maxian – Kužeľosečky), teórie grafov (Róbert Šoffa) a algebry (Martin Hriňák – Riešenie rovníc vyšších stupňov). Účastníci sústredenia si počas prednášky PaedDr. Lilly Koreňovej mohli vyskúšať prácu s grafickými kalkulačkami firmy CASIO. Vďaka pani Mgr. Márii Krškovej z miestneho gymnázia sme mali možnosť dvakrát si zasurfovať na internete.

Sústredenie sa všetkým zúčastneným páčilo a dúfame, že aj na budúci rok sa budeme môcť stretnúť s našimi najlepšími riešiteľmi.

Martin Hriňák

43. ročník Medzinárodnej matematickej olympiády (MMO)
18. 07. – 30. 07. 2002, Glasgow

V dňoch 18. 07. – 30. 07. 2002 sa v Glasgowe uskutočnila 43. Medzinárodná matematická olympiáda (MMO), ktorá je vypisovaná pre žiakov stredných škôl. Zúčastnilo sa jej 479 súťažiacich z 84 krajín. Slovensko reprezentovalo šesť žiakov: Radovan Bauer, Peter Bella, Michal Burger, Andrej Osuský, Katarína Quittnerová a Marek Tesař; delegáciu SR viedol vedúci katedry matematiky na F-PEDaS ŽU v Žiline doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., predseda Slovenskej komisie Matematickej olympiády, pedagogický vedúci bol Juraj Földes z FMFI Bratislava.

	1	2	3	4	5	6	Spolu
Bauer Radovan	7	7	1	7	2	0	24
Bella Peter	6	6	1	1	1	0	15
Burger Michal	7	1	0	7	2	0	17
Osuský Andrej	7	0	1	7	5	0	20
Quittnerová Katarína	7	7	0	7	2	0	23
Tesař Marek	5	6	1	7	1	0	20

Boli sme úspešní, lebo všetci naši súťažiaci získali medailu: Bauer a Quittnerová striebornú, ostatní bronzovú. Žiada sa dodať, že pre Katku Quittnerovú to už bola štvrtá medaila z MMO a to je veľmi zriedkavý úspech. Súťaž je totiž zhora vekovo ohraničená a dostať sa na MMO štyrikrát znamená, že žiak sa už ako prvák na strednej škole vedomostne vyrovnal maturantom, pričom výber reprezentačného družstva je viackolový a nekompromisný.

MMO je súťaž jednotlivcov, ale býva zvykom sledovať aj neoficiálne poradie družstiev. V tomto sme skončili so 119 bodmi na veľmi dobrom 25. mieste, len veľmi tesne za Ukrajinou (124), Brazíliou (123), Poľskom (123), Thajskom (123) a Hong Kongom (120). Stačilo teda len veľmi málo k umiestneniu do prvej dvadsiatky. Z európskych krajín skončili pred nami len 2. Rusko, 4. Bulharsko, 8. Rumunsko, 10. Nemecko, 12-13. Maďarsko, 14. Bielorusko, 19. Francúzsko, 20. Ukrajina, 22. Poľsko. V súťaži družstiev vyhrala Čína (212), za ňou tesne nasledovalo Rusko (204), pričom všetci súťažiaci týchto dvoch krajín získali zlaté medaily.

Usporiadateľmi ďalších MMO budú postupne Japonsko, Grécko, Mexiko a Slovinsko.

doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., predseda SKMO

Zadania úloh 43. ročníka MMO

Úloha 1

Nech n je kladné celé číslo a nech T je množina všetkých bodov (x, y) v rovine, kde x a y sú celé nezáporné čísla a $x + y < n$. Každý bod z množiny T je zafarbený na

červeno alebo na modro. Ak bod (x, y) je červený, potom červené sú všetky body $(x', y') \in T$, pre ktoré platí $x' \le x$ a $y' \le y$. Definujme *X*-množinu ako množinu *n* modrých bodov majúcich rôzne *x*-ové súradnice a *Y*-množinu ako množinu *n* modrých bodov majúcich rôzne *y*-ové súradnice. Dokážte, že počet *X*-množín sa rovná počtu *Y*-množín.

Úloha 2

Nech *BC* je priemer kružnice Γ so stredom *O*. Bod *A* leží na kružnici Γ tak, že $0° < |\angle AOB| < 120°$. Nech *D* je stred toho oblúka *AB*, ktorý neobsahuje bod *C*. Priamka vedená bodom *O* rovnobežne s *DA* pretne priamku *AC* v bode *J*. Os úsečky *OA* pretne kružnicu Γ v bodoch *E* a *F*. Dokážte, že bod *J* je stredom kružnice vpísanej trojuholníku *CEF*.

Úloha 3

Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel $m, n \ge 3$ také, že existuje nekonečne veľa kladných celých čísel *a*, pre ktoré je

$$\frac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$$

celé číslo.

Úloha 4

Nech *n* je prirodzené číslo väčšie ako 1. Všetky kladné delitele čísla *n* sú $d_1, d_2, \ldots, d_k$, kde

$$1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n.$$

Položme $D = d_1 d_2 + d_2 d_3 + \cdots + d_{k-1} d_k$.

a) Dokážte, že $D < n^2$.

b) Určte všetky *n*, pre ktoré je číslo *D* deliteľom čísla n^2.

Úloha 5

Nech $\mathbf{R}$ označuje množinu všetkých reálnych čísel. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ také, že

$$(f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz)$$

pre všetky $x, y, z, t \in \mathbf{R}$.

Úloha 6

V rovine sú dané kružnice $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ o polomere 1, kde $n \ge 3$. Ich stredy označme postupne $O_1, O_2, \ldots, O_n$. Predpokladajme, že žiadna priamka nemá spoločný bod s viac ako dvomi z daných kružníc. Dokážte, že

$$\sum_{1 \le i \le j \le n} \frac{1}{|O_i O_j|} \le \frac{(n-1)\pi}{4}.$$

Korešpondenčná súťaž v školskom roku 2002/2003

Redakcia časopisu MATMIX aj v tomto školskom roku vyhlasuje svoju korešpondenčnú súťaž pre žiakov základných a stredných škôl. Zapojiť sa môžu všetci žiaci spomínaných škôl, ktorí majú záujem o matematiku a sú ochotní venovať pravidelne niekoľko minút vypracovaniu riešení.

V školskom roku 2002/2003 vyjdú 4 čísla časopisu a korešpondenčná súťaž bude mať tri série. Zadania úloh budú uverejnené v číslach 1, 2 a 3, riešenia úloh spolu s výsledkovými listinami v číslach 2, 3 a 4.

Žiakom prvého stupňa základných škôl je určená kategória E, ktorej úlohy budú zverejnené v rubrike MINIMIX. Riešenia úloh tejto kategórie zasielajte na adresu:

MINIMIX
Metodicko-pedagogické centrum
Tomášikova 4
P. O. BOX 14
820 09 Bratislava 29

Pre žiakov druhého stupňa základnej školy a žiakov prímy až kvarty osemročných gymnázií je určená kategória Z. Pre nich sú určené úlohy č. 1 až 4. Pre prvákov stredných škôl a žiakov kvinty osemročných gymnázií je určená kategória C. Riešitelia tejto kategórie riešia úlohy 3 až 6. Pre druhákov stredných škôl a žiakov sexty osemročných gymnázií je určená kategória B s úlohami 5 až 8. Pre tretiakov a štvrtákov stredných škôl a žiakov septimy a oktávy osemročných gymnázií je určená kategória A s úlohami 7 až 10.

Pre žiakov, ktorí majú záujem o náročnejšie úlohy, je určená kategória π. Pre túto kategóriu sú v každej sérii určené úlohy 11 a 12.

Vzhľadom na prelínanie sa kategórií A, B, C a Z, ako aj vzhľadom na naše obmedzené možnosti, **môže každý žiak súťažiť len v jednej z týchto kategórií** (môže však ešte súťažiť aj v kategórii π).

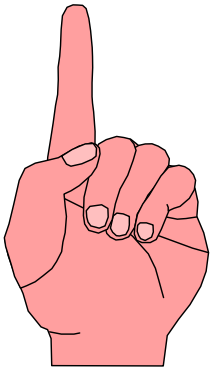
Riešenia zasielajte do uvedeného termínu pre každú sériu. Rozhoduje pečiatka na obálke. Ak pošlete riešenia po tomto termíne, strhneme vám za každý deň omeškania jeden bod (pod 0 bodov však klesnúť nemôžete). Riešenia posielajte na adresu:

MATMIX
Metodicko-pedagogické centrum
Tomášikova 4
P. O. BOX 14
820 09 Bratislava 29

V prípade, že máte nejasnosti v zadaní alebo máte iné otázky, môžete svoje pripomienky adresovať na uvedenú adresu alebo na e-mail *hrinak@host.sk*.

Prihlášku do korešpondenčnej súťaže nám pošlite spolu s prvou sériou vašich riešení na osobitnom papieri formátu A6 podľa nasledujúceho vzoru. V prípade, že chcete riešiť aj kategóriu π, zašlite nám prihlášku pre obe kategórie.

Priezvisko: ……..... Meno: …… Kategória: …..
Škola: …… Trieda: ……
Adresa domov: ……
Telefón: …… E-mail: ……
Meno učiteľa alebo ďalších, ktorí vás vedú v matematike: ……



Súťažiacich upozorňujeme, aby **riešenia písali <u>čitateľne</u> na papiere formátu A4** (tzv. kancelársky papier) a na každé riešenie napísali **hlavičku – svoje meno, číslo úlohy a kategóriu**. V prípade, že sa riešenie jednej úlohy nachádza na viacerých papieroch, zopnite ich spolu, alebo na jednotlivé papiere napíšte hlavičku a očíslujte ich. Na jednom papieri nemôžu byť napísané riešenia viacerých úloh. **Hodnotiť budeme len také riešenia, ktoré spĺňajú spomínané kritériá.**

Do súťaže sa môžu žiaci zapojiť aj neskôr (teda v druhej alebo tretej sérii). Podmienkou zaradenia do súťaže je aj v takomto prípade zaslanie prihlášky spolu s prvými riešeniami, ktoré vypracujú.

Korešpondenčná súťaž je súťažou jednotlivcov, a preto sa do súťaže nemôžu prihlásiť skupiny riešiteľov. V prípade, že nájdete viacero riešení jednej úlohy, stačí, ak nám zašlete jedno. Žiadne ďalšie body za iné riešenia nezískate.

Riešenia súťažných úloh si vypracujte sami! V prípade, že zistíme, že nejaká skupina opisovala, *každý* jej člen dostane za danú úlohu 0 bodov, aj keby bolo riešenie správne. Plný počet bodov (5) prislúcha len úplnému riešeniu. Preto treba zdôvodniť všetky tvrdenia, ktoré v riešení používate. V prípade, že používate vetu, ktorá nie je všeobecne známa, uveďte aj literatúru, kde sa nachádza jej dôkaz. Uvedenie iba výsledku preto nie je postačujúce. Ak niektorá úloha nemá riešenie, treba ukázať, prečo ho nemá.

V prípade, že nie ste spokojní s ohodnotením vášho riešenia, môžete poslať svoju reklamáciu s odôvodnením a požadovaným počtom bodov na uvedenú adresu MC. Vaše riešenie si ešte raz prezrieme a oznámime vám výsledok. Ak máte prístup k elektronickej pošte, používajte ju, prosím, prednostne. Urýchlite tým vybavenie vašej reklamácie.

Veľa zážitkov a krásnych chvíľ pri riešení súťažných úloh vám praje redakčná rada časopisu MATMIX.

Súťažné úlohy – 1. séria

1. Povedzte kamarátovi, nech si myslí číslo. Nech ho vynásobí číslom, ktoré si ľubovoľne zvolíte a poviete mu ho, a nech k súčinu pričíta ďalšie vami zvolené ľubovoľné číslo. Súčet nech vydelí tretím číslom, ktoré mu zadáte. Vydeľte si druhé číslo, ktoré ste mu zadali, tretím vybraným číslom. Kamarátovi povedzte, aby od podielu, ktorý dostal, odčítal pôvodne myslené číslo toľkokrát, koľko vám vyšlo pri vašom výpočte. Dokážte, že dosiahnutý výsledok nezávisí od čísla, ktoré si kamarát zvolil.

2. Dedko sa narodil v minulom storočí. Práve keď oslavoval svoje narodeniny, zistil, že je sedemkrát starší ako jeho najmladší vnuk, šesťkrát starší ako jeho najmladšia vnučka, štyrikrát starší ako jeho najstarší vnuk a trikrát starší ako jeho najstaršia vnučka. Určte, ktoré narodeniny dedko oslavoval.

3. Nahraďte hviezdičky číslicami tak, aby platilo naznačené násobenie:

```
          * * * 7
          x * * *
        * * * * 6
    * * 2 0 3
  * 3 7 * *
  -----------
  * * * * * * *
```

4. Anna, Beáta a Cecília sú zvláštne dievčatá. Dve z nich sú nadpriemerne inteligentné, dve nadpriemerne krásne, dve mimoriadne talentované na matematiku a dve sú veľmi vtipné. Žiadna z nich nemá viac ako tri z týchto vlastností. O Anne vieme, že ak je nadpriemerne inteligentná, je aj veľmi vtipná. O Beáte, ako aj Cecílii, platí, že ak je nadpriemerne krásna, je aj mimoriadne talentovaná. O Anne a Cecílii ďalej môžeme povedať, že ak sú veľmi vtipné, tak sú aj mimoriadne talentované. O ktorej z nich môžeme povedať, že určite nie je veľmi vtipná?

5. Dokážte, že v každom trojuholníku ABC a pre každý bod D strany AC platí nerovnosť

$$|AB| + |BC| < 2 \cdot |BD| + |AC| .$$

6. Kváder s rozmermi $5 \times 4 \times 3$ sa skladá z 60 jednotkových kociek. Koľko z nich je preťatých telesovou uhlopriečkou tohto kvádra?

7. Je daný rovnoramenný trojuholník ABC, kde $|\angle BAC| = 100°$. Os uhla $\angle ABC$ pretína stranu AC v bode D. Dokážte, že $|AD| + |DB| = |BC|$.

8. Peter si zvolil 5 reálnych čísel x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 (nie nutne rôznych). Potom na 10 kartičiek napísal súčty všetkých dvojíc $x_i + x_j$ pre $1 \le i < j \le 5$ a dal nám ich. Dokážete z nich určiť, ktoré čísla si Peter zvolil?

9. Dokážte, že v každom trojuholníku ABC pri štandardnom označení platí:

$$t_a + t_b + t_c > \frac{1}{2}(a + b + c).$$

10. Rozhodnite, či existuje také prirodzené číslo x, pre ktoré platí nasledujúce tvrdenie: Množina $\{x, x+1, x+2, x+3, x+4, x+5\}$ sa dá rozdeliť na dve disjunktné trojprvkové množiny A a B tak, aby bol súčin čísel v obidvoch množinách A a B rovnaký.

11. V trojuholníku ABC platí

$$\frac{c-b}{a} + \frac{a-c}{b} + \frac{b-a}{c} = 0.$$

Čo môžeme tvrdiť o uhloch v tomto trojuholníku?

12. Nech M je konečná $n-$ prvková množina. Určte počet všetkých dvojíc množín A, B takých, že $A \subseteq B \subseteq M$.

Termín odoslania 1. série: **25. 10. 2002**

Riešenia úloh zasielajte na adresu:

MATMIX
Metodicko-pedagogické centrum
Tomášikova 4
P. O. BOX 14
820 09 Bratislava 29

Vysvetlenia k Zaujímavým dôkazom (s. 3 – 5)

1. V dôkaze sme dokázali len to, že prvočísel je nekonečne veľa. Použili sme tvrdenie, že ak máme konečne veľa prvočíselných dvojičiek, tak máme aj konečne veľa prvočísel, pričom toto tvrdenie sme nedokázali.

2. V tomto dôkaze sme urobili mylný predpoklad, keď sme predpokladali, že platí

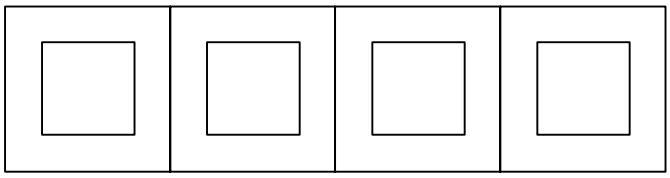
$$\frac{a+b+c}{a_1+b_1+c_1}=\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}.$$

Toto tvrdenie vo všeobecnosti neplatí, o čom sa môžeme presvedčiť napríklad dosadením $a=1=b_1$, $b=2=c_1$, $c=3=a_1$.

2. Problém nastal na mieste, kde sme z toho, že platí $e^{2i\pi}=1$, usúdili, že $2\cdot i\cdot\pi\cdot\ln e=0$. To by platilo len vtedy, ak by $2\cdot i\cdot\pi$ bolo reálne číslo, lebo použitá úprava logaritmov je ekvivalentnou úpravou len na reálnych číslach. Ale $2\cdot i\cdot\pi$ nie je reálne číslo, teda túto úpravu nemôžeme použiť.

3. V tomto dôkaze sme sa nechali zmiasť obrázkom. Problém je v tom, že nenastane prípad, kedy by oba body *Z* a *Y* padli naraz do jednej polroviny určenej priamkou *AB*, ako sme predpokladali v oboch možnostiach. Vždy jeden z bodov *Y* a *Z* padne dovnútra príslušnej úsečky *AC*, resp. *AB* a druhý mimo nej.

4. V tomto dôkaze je problém v tom, že malá kružnica pri otáčaní „prešmykuje“. Lepšie si to uvedomíme na príklade otáčania štvorca:



Vidíme, že pri otáčaní sa veľký štvorec otočil o celý svoj obvod, pričom malý štvorec sa nielenže otočil o celý svoj obvod, ale ešte aj o niečo navyše. Pri kružnici to nie je také zrejmé, lebo je „hladká“ a pri otáčaní sa táto zmena deje spojito bez toho, aby sme ju mohli pozorovať.

Martin Hriňák

****

MINIMATIK - malý lexikón matematiky základnej školy - vyjde v nakladateľstve EDITOR, objednávky a informácie na tel.č. 02- 55415410, Borovcová

M I N I M I X - príloha časopisu MATMIX pre žiakov 1. stupňa ZŠ

Milí naši tretiaci a štvrtáci (prípadne aj ešte mladší),
vážené pani učiteľky a páni učitelia na prvom stupni ZŠ,

na základe záujmu mladších žiakov o riešenia zaujímavých matematických problémov, o prípravu na druhý stupeň základnej školy, prípadne o prípravu na prijímacie skúšky do prímy osemročného gymnázia, otvárame aj v tomto školskom roku túto pravidelnú prílohu pre žiakov prvého stupňa ZŠ . Radi by sme takto pomáhali aj učiteľom na prvom stupni ZŠ pri práci s deťmi, ktoré majú osobitné vlohy a záujem o matematiku.

V tomto ročníku našej celoštátnej korešpondenčnej súťaže ponúkneme žiakom prvého stupňa **tri série po dvoch úlohách, spolu 6 úloh**. Úlohy uverejníme po dvoch v prvom, druhom a treťom čísle, ich riešenia a poradie riešiteľov aj s menami ich učiteľov budú uverejnené v druhom, treťom a štvrtom čísle. **Za každú správne a úplne vyriešenú úlohu dostane žiak 10 bodov**. Žiaci sa môžu do súťaže zapojiť aj neskôr a nemusia riešiť všetky úlohy, stačia tie, ktoré sa im páčia a ktoré vedia vyriešiť. Niektoré zo správnych riešení vyberie redakcia časopisu na zverejnenie.

Radi privítame príspevky pre našich najmenších od učiteľov a iných pracovníkov, ktorí sa zaoberajú vyučovaním matematiky na prvom stupni ZŠ. Budeme sa snažiť čo najviac takýchto príspevkov v plnej alebo skrátenej forme publikovať. Radi tiež privítame **námety, pripomienky, úlohy do súťaže, prípadne vaše skúsenosti z práce pri vyučovaní matematiky na prvom stupni a všetko, čo by pomohlo iným, najmä začínajúcim učiteľom.**

Podobne ako hlavnú súťaž, sponzoruje aj túto časť firma **CASIO**. Žiak, ktorý skončí na prvom mieste, získa **kalkulačku značky CASIO.** Učiteľ žiaka, ktorý skončí na prvom mieste, získa predplatné časopisu **MATMIX** na ďalší školský rok. Každý účastník súťaže, ktorý získa aspoň **31 bodov**, dostane **diplom** nášho časopisu za úspešné riešenie súťaže.

Úlohy, ktoré budú zjavne odpisované od iných spolužiakov, nebudeme hodnotiť. Preto vás, žiakov, prosíme, aby ste neodpisovali.

Pri riešení úloh našej súťaže vám želáme veľa pekných chvíľ, a ak sa vám potom bude matematika zdať zábavnejšia a krajšia, budeme sa tešiť spolu s vami, vašimi rodičmi a učiteľmi.

Na riešenia našich žiakov a príspevky učiteľov sa už teraz teší

redakcia časopisu MATMIX

Súťažné úlohy kategórie E (pre žiakov 1. stupňa ZŠ)

Úloha E 1

Janko vraví Mirke: „Všimni si, že v tomto mesiaci majú až tri soboty párny dátum!“ Mirka na to: „A ty si zapamätaj, že 28. v tomto mesiaci mám narodeniny, ale ako vidím, nebude to víkend.“ Deti, zistite, ktorý deň v týždni bude mať Mirka narodeniny a svoje tvrdenie odôvodnite!

Úloha E 2

Nešťastné kráľovstvo už veľa rokov ničil zlý drak, ktorý mal tri hlavy a tri chvosty. Udatný princ, ktorý sa chystal draka poraziť a odseknúť mu všetky tri hlavy, aj všetky tri chvosty dostal od dobrého čarodejníka zázračný meč, ktorým mohol odseknúť drakovi naraz jednu alebo dve hlavy alebo jeden alebo dva chvosty. Ale pozor! Ak odsekne drakovi jednu hlavu, narastú mu ďalšie dve. Ak mu odsekne jeden chvost, narastú mu ďalšie dva. Ak odsekne drakovi dva chvosty, narastie mu jedna hlava, ale ak odsekne drakovi dve hlavy, nenarastie mu nič. Vy, deti, ste teraz princovi poradcovia. Musíte mu napísať poradie, v akom má sekať hlavy a chvosty tak, aby musel sekať čo najmenejkrát. Ešte vám prezradíme, že po desiatich seknutiach sa zázračná moc meča minie a vôbec sa s ním nebude dať bojovať.

Riešenia týchto dvoch úloh nám pošlite do 28.10. 2002. (Rozhoduje dátum na poštovej pečiatke.) Na každý papier napíšte svoje meno a spolu s prvou poslanou úlohou napíšte prihlášku do súťaže, kde uvediete okrem vášho mena školu, triedu a meno vašej p. učiteľky alebo p. učiteľa, ktorý vás učí matematiku. V ďalších úlohách stačí už iba meno - krstné, aj priezvisko.

Adresa:

MINIMIX
Metodicko-pedagogické centrum
P. O. BOX 14
Tomášikova 4
820 09 BRATISLAVA 29

Ak máte záujem, môžete si na tejto adrese objednať časopis iba pre vás, stojí na školský rok 60,- Sk a dostanete všetky 4 čísla.

Otvárame ôsmy ročník MATMIXu

Redakcia nášho časopisu želá všetkým čitateľom MATMIXu šťastlivý nový školský rok 2002-2003. Aj v tomto roku sa chceme venovať priaznivcom matematiky a podobne ako vlani, uverejníme v našom časopise niekoľko portrétov významných matematikov, zaujímavé články a opäť našu korešpondenčnú súťaž. Vzhľadom na veľmi nízky rozpočet sme museli siahnuť v tomto školskom roku k redukcii počtu čísiel ***- vyjdú iba 4 čísla za celý školský rok.*** *S tým súvisí aj redukcia počtu kôl našej súťaže,* ***celá súťaž vo všetkých kategóriách bude mať iba 3 kolá.*** *Jednotlivé čísla vyjdú (ak dodržíme presne náš harmonogram) 25.9., 10.12., 25.2. a 12.5..*

Podobne, ako v predchádzajúcich rokoch, víťazov jednotlivých kategórií ***sponzoruje firma CASIO.*** *Kalkulačky sú od grafickej za 2800 Sk pre kategóriu π po bežnú kalkulačku pre kategóriu E. Druhý žiak v poradí a najlepší účastník mimo gymnazistov získávajú predplatné na ďalší rok. Prvých troch a najlepšieho „negymnazistu" z každej kategórie okrem E pozveme na konci roka na sústredenie. Učiteľom matematiky víťazov všetkých kategórií venujeme predplatné na ďalší rok.*

Dovoľujeme si upozorniť našich priaznivcov internetu, že ***práve vyšlo u nás CD*** *s tematikou využitia internetu v* ***matematike ZŠ a SŠ****. Obsahuje správne adresy, návody, aj veľa ukážok, vhodných na využitie tam, kde je iba počítač bez internetu. Bližšie informácie v redakcii.*

Redakcia aj touto cestou ďakuje za sponzorovanie mimoriadne vydareného sústredenia MATMIXu v auguste 2002 v Štúrove ***OZ EDUKÁCIA a firme CASIO.***

O b s a h

Dušan Jedinák: Ramanujan - osobný priateľ každého prirodzeného čísla 1
Martin Hriňák: Zaujímavé dôkazy 3
Martin Kollár: Čo zatajujú skriptá z planimetrie 5
Martin Hriňák: Sústredenie MATMIXu, 26. - 30. augusta 2002, Štúrovo 8
Vojtech Bálint: 43. ročník Medzinárodnej matematickej olympiády 9
Zadania úloh 43. ročníka MMO 9
Korešpondenčná súťaž v školskom roku 2002/2003 11
Súťažné úlohy - 1. séria 13
Martin Hriňák: Vysvetlenia k zaujímavým dôkazom 15
Minimix - príloha pre 1. stupeň ZŠ 16

MATMIX - matematický časopis pre žiakov základných a stredných škôl, vydáva **Metodicko-pedagogické centrum** v Bratislave na Tomášikovej ul. s **finančnou podporou Ministerstva školstva SR a OZ EDUKÁCIA** ako pomocnú literatúru pre PK matematiky a pre žiakov so záujmom o matematiku. Ceny pre víťazov sponzoruje **CASIO**.

Šéfredaktor: RNDr. Milan Maxian

Redakcia: Tibor Fonód, Dušan Jedinák, PhDr. Katarína Dzúriková, RNDr. Ľudovít Hrdina, CSc., Martin Hriňák, PhDr. Soňa Hronská, RNDr. Viera Kolbaská

Tlač a väzba: Eduard Rác

Adresa redakcie: MATMIX, resp. pre 1. stupeň ZŠ MINIMIX, Metodicko-pedagogické centrum, Tomášikova 4, P.O.BOX 14, 820 09 Bratislava 29

Telefón: 02/ 48 20 94 32, 43 42 22 53, 43 42 57 90 **Fax:** 02/ 43 33 59 46

E-mail: maxian@mctba.sk, pre korešpondenčnú súťaž kategórie A, B, C, Z, π: hrinak@host.sk