Riešenia súťažných úloh 3. série

1. Súčin troch za sebou idúcich párnych čísel je v tvare 87.....8. Určte prostredných 5 cifier.

Riešenie:
Označme tri za sebou idúce párne čísla zo zadania x, y, z. Môžu sa končiť na 0, 2, 4, alebo na 2, 4, 6, alebo na 4, 6, 8, alebo na 6, 8, 0, alebo na 8, 0, 2. Ich súčin sa končí na cifru 8 len vtedy, ak sa spomínané tri čísla končia na 2, 4, 6. Ďalej si všimnime, že

$$440 \cdot 442 \cdot 444 = 86\,349\,120 < xyz < 448 \cdot 450 \cdot 452 = 91\,123\,200,$$

z čoho vyplýva, že hľadané číslo x je väčšie ako 440, ale menšie ako 448. Preto musí nutne platiť $x = 442$, $y = 444$, $z = 446$. Prostredné cifry v tomto prípade sú 5, 2, 6, 6, 0, o čom sa presvedčíme vynásobením.

2. Siedmi hráči sa dohovorili, že kto prehrá, zaplatí každému toľko peňazí, koľko každý hráč má. Po siedmich partiách zistili, že každý má 12,80 Sk. Koľko mal na začiatku každý hráč, ak vieme, že každý raz prehral?

Riešenie:
Všetci hráči mali na začiatku spolu $7 \cdot 12{,}80\ \text{Sk} = 89{,}60\ \text{Sk}$. Nech prvý hráč mal na začiatku x Sk. Prvú partiu prehral, a preto zaplatil šiestim hráčom $7 \cdot 12{,}80 - x$. Zostalo mu potom $x - (7 \cdot 12{,}80 - x) = 2x - 7 \cdot 12{,}80$. Po druhej partii mal $2 \cdot (2x - 7 \cdot 12{,}80)$ Sk. Analogickým spôsobom zistíme, že po siedmej partii mal $2^6 \cdot (2x - 7 \cdot 12{,}80)$ Sk. Dostávame tak rovnicu

$$2^6 \cdot (2x - 7 \cdot 12{,}80) = 12{,}80,$$

ktorej riešením dostávame $x = 44{,}90\ \text{Sk}$. Potom druhý hráč mal na začiatku $22{,}50\ \text{Sk}$, tretí mal $11{,}30$ Sk, štvrtý $5{,}70$ Sk, piaty $2{,}90$ Sk, šiesty $1{,}50$ Sk a siedmy $0{,}80$ Sk.

3. V letnom turistickom tábore sa stretlo 5 chlapcov – Slovák, Poliak, Fín, Švéd a Nemec. Zistili nasledujúce skutočnosti:

a) Každý z nich ovláda aspoň jeden cudzí jazyk, ale len tie, ktoré sú materinským jazykom niektorého z ostatných chlapcov.
b) Žiaden z jazykov neovládajú všetci piati.
c) Každá dvojica vždy nájde spoločný jazyk, ktorým sa môže rozprávať.
d) Medzi týmito spoločnými jazykmi sú materinské jazyky všetkých piatich.
e) Zistili, že všetci ovládajú priemerne dva cudzie jazyky.
f) Slovák a Poliak ovládajú tri cudzie jazyky.
g) Keď sa Švéd išiel vykúpať, ostatní štyria hneď našli spoločnú reč – jazyk, ktorí ovládali všetci štyria.
h) Podobná situácia nastala aj vtedy, keď sa Švéd vrátil a Fín sa odišiel člnkovať.
i) Aby sa mohli zhovárať po švédsky, museli by odísť dvaja.

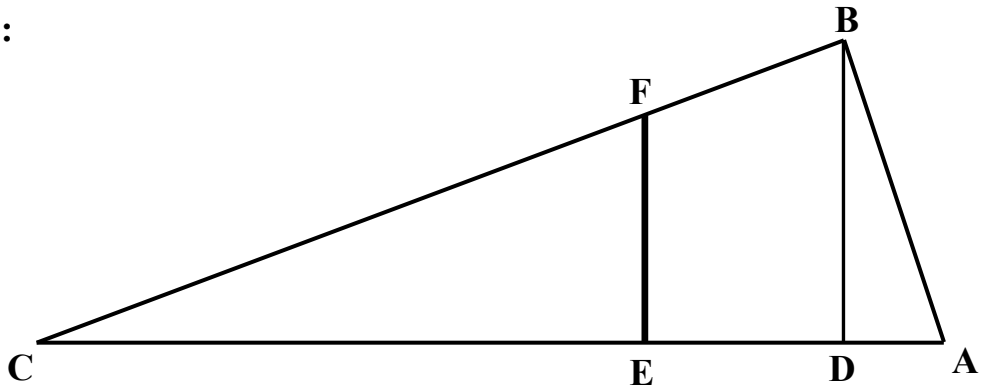
j) Po fínsky a po poľsky vedia spolu len dvaja.
k) Poliak a Fín sa vedia spolu zhovárať v dvoch rečiach, ale nemčina medzi ne nepatrí.
l) Slovák a Švéd môžu vzájomne konverzovať len v jednej reči.

Zistite, kto ovláda ktorý jazyk.

Riešenie:
Na základe e) vieme, že spolu ovládajú 10 cudzích jazykov (každý počítame toľkokrát, koľko ľudí ho ovláda). Jazyk, o ktorom sa hovorí v g), zrejme nemôže byť švédčina. Podľa j) to nie je ani fínčina, ani poľština. Podľa k) to nie je ani nemčina. Teda okrem Slováka aj Poliak, Fín a Nemec vedia po slovensky, ale Švéd slovenčinu neovláda. Potom jazyk, o ktorom sa hovorí v h), nemôže byť slovenčina, podľa j) to nie je ani poľština, ani fínčina, podľa i) ani švédčina. Preto okrem Nemca aj Slovák, Poliak a Švéd musia vedieť po nemecky, ale Fín nemčinu neovláda. Slovák nemôže hovoriť po švédsky, lebo potom by so Švédom ovládali 2 rovnaké jazyky. Keďže Slovák ovláda tri cudzie jazyky, musí ovládať poľštinu a fínčinu. Tieto jazyky Švéd ovládať nemôže. Fínčinu a poľštinu ovládajú len dvaja, teda fínčinu neovládajú Poliak ani Nemec a poľštinu Fín ani Nemec. Poliak ovláda tri jazyky, preto musí ovládať švédčinu. Z k) máme, že Poliak a Fín musia mať ešte jeden spoločný jazyk, a tým už môže byť len švédčina. Vcelku dostávame, že okrem svojich materinských jazykov Slovák ovláda poľštinu, fínčinu a nemčinu, Poliak ovláda slovenčinu, švédčinu a nemčinu, Fín ovláda slovenčinu a švédčinu, Švéd ovláda nemčinu a Nemec ovláda slovenčinu. Skúškou overíme, že toto rozdelenie jazykov vyhovuje zadaniu.

4. Uvažujme trojuholník ABC, v ktorom výška BD dĺžky 4 delí stranu AC na dve časti, ktoré sú v pomere 1 : 8. Vypočítajte dĺžku úsečky EF rovnobežnej s výškou, ktorá delí trojuholník na dve obsahom rovnaké časti.

Riešenie:



Bez ujmy na všeobecnosti nech je $\frac{|AD|}{|DC|}=\frac{1}{8}$. Potom obsah trojuholníka BCD je $\frac{8}{9}$ obsahu trojuholníka ABC (majú rovnakú výšku BD a $\frac{|CD|}{|CA|}=\frac{8}{9}$). Z podobnosti

trojuholníkov *CEF* a *CDB* dostávame

$$\frac{|EF|^2}{|BD|^2} = \frac{S_{\Delta CEF}}{S_{\Delta CDB}} = \frac{\frac{1}{2}S_{\Delta ABC}}{\frac{8}{9}S_{\Delta ABC}} = \frac{9}{16},$$

odkiaľ $|EF|^2 = |BD|^2 \cdot \frac{9}{16} = 16 \cdot \frac{9}{16} = 9$. Preto $|EF| = 3$.

5. Určte trojicu najmenších po sebe idúcich prirodzených čísel, pre ktoré platí, že ich súčet je druhou a zároveň treťou mocninou prirodzeného čísla.

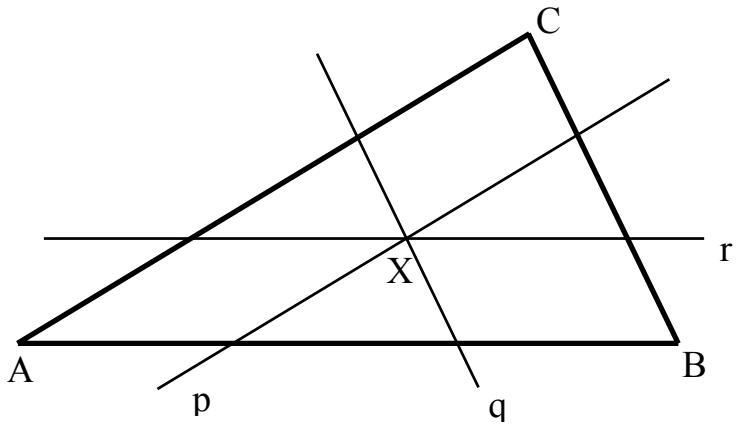
Riešenie:
Hľadané tri čísla označme $x-1, x, x+1$. Potom sa ich súčet rovná

$$x-1+x+x+1 = 3x.$$

Ak je nejaké číslo druhou aj treťou mocninou prirodzeného čísla, exponenty v jeho prvočíselnom rozklade musia byť deliteľné dvoma aj troma, teda každý exponent musí byť deliteľný šiestimi. Keďže číslo $3x$ je deliteľné tromi, musí byť deliteľné aj 3^6. Preto najmenšia hodnota $3x$ je $3^6 = 729$. Z toho vyplýva, že $x = 243$. Hľadané čísla potom sú 242, 243 a 244, čo ľahko overíme skúškou.

6. Dokážte, že v každom trojuholníku *ABC* existuje práve jeden taký bod *X*, že trojuholníky *ABX*, *BCX*, *CAX* majú rovnaký obsah a nájdite ho.

Riešenie:
Uvažujme štandardné označenie v trojuholníku *ABC*. Keďže sa obsahy trojuholníkov *ABX*, *BCX*, *CAX* rovnajú a spolu pokrývajú celý trojuholník *ABC*, potom ich obsahy sú tretinou obsahu trojuholníka *ABC*. Uvažujme trojuholník *ABX*. Ten má s trojuholníkom *ABC* spoločnú stranu *AB*, a preto jeho výška má veľkosť $\frac{1}{3}v_c$. Preto bod *X* musí



ležať na priamke *r*, ktorá je rovnobežná s priamkou *AB* a je od nej vzdialená $\frac{1}{3}v_c$ a ktorá obsahuje aspoň jeden vnútorný bod trojuholníka *ABC*. Podobne bod *X* musí patriť priamkam *q* a *p*, ktoré sú rovnobežné s *BC*, resp. *AC* a ich vzdialenosti od nich sú $\frac{1}{3}v_a$, resp. $\frac{1}{3}v_b$, a obsahujú aspoň jeden vnútorný bod trojuholníka *ABC*. Každá z týchto troch priamok je jednoznačne určená. Prienikom troch priamok môže byť priamka, bod alebo prázdna množina. Keďže strany trojuholníka sú rôznobežné, budú aj tieto tri priamky navzájom rôznobežné. Preto ich prienikom nemôže byť priamka. Potom ich prienik obsahuje maximálne jeden bod, a tak dostávame maximálne jeden

bod X s danou vlastnosťou. Teraz si ukážeme, že taký bod naozaj existuje a je ním ťažisko trojuholníka ABC.

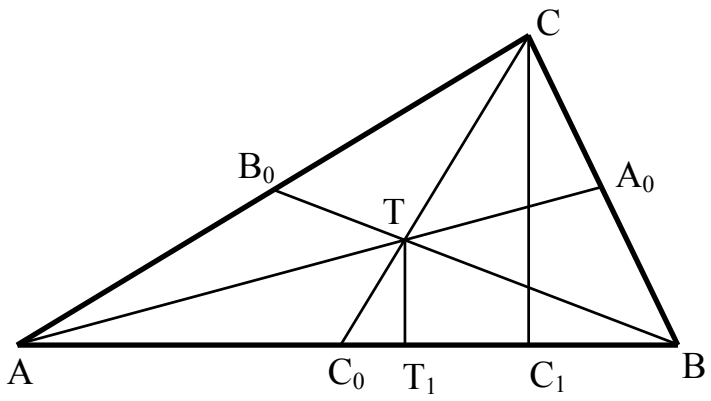
Z vlastností ťažiska vieme, že platí $|CC_0| = 3 \cdot |TC_0|$. Nech T_1 je päta kolmice z bodu T na stranu AB. Trojuholníky TT_1C_0 a CC_1C_0 sú podobné podľa vety uu. Preto $\frac{|TT_1|}{|CC_1|} = \frac{|TC_0|}{|CC_0|} = \frac{1}{3}$, a teda $|CC_1| = 3 \cdot |TT_1|$. Potom pre obsah trojuholníka ABT dostávame

$$S_{\Delta ABT} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |TT_1| = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot \frac{1}{3} \cdot |CC_1| = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CC_1| \right) = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC}.$$

Analogicky dostaneme aj

$$S_{\Delta BCT} = S_{\Delta ACT} = \tfrac{1}{3} S_{\Delta ABC}.$$

Preto ťažisko T vyhovuje podmienkam zo zadania. Tým sme tvrdenie úlohy dokázali.



7. Jeden člen Klubu našiel 7 diamantov. Jeden si nechal a dvom ďalším členom Klubu zaslal anonymne po troch diamantoch s odkazom, aby si jeden nechali a zvyšné dva poslali iným dvom členom Klubu. Určte, koľko mal Klub členov, ak vieme, že pravdepodobnosť rozdelenia diamantov medzi práve 6 osôb sa rovná pravdepodobnosti rozdelenia diamantov medzi 7 osôb.

Riešenie:

Zrejme ak bude počet členov Klubu 3, 4 alebo 5, tak dané pravdepodobnosti sú rovné nule, a teda sa rovnajú. V prípade 6 členov je pravdepodobnosť, že diamanty budú rozdelené medzi 7 osôb nulová, ale pravdepodobnosť ich rozdelenia medzi 6 osôb je nenulová. Preto Klub nemohol mať 6 členov. Označme si počet členov Klubu m. Stačí nám teraz uvažovať $m \geq 7$. Nech A je nálezca diamantov, B a C nech sú členovia Klubu, ktorí dostali diamanty od A. Bez ujmy na všeobecnosti B posiela diamanty ako prvý. Nech $P(k)$ je počet možností rozdelenia 7 diamantov medzi k osôb. Pri rozdelení diamantov medzi 7 osôb B posiela diamanty dvom z $m-3$ osôb, C potom dvom zo zvyšných $m-5$ ľudí, teda

$$P(7) = \binom{m-3}{2} \cdot \binom{m-5}{2}.$$

Pri rozdelení medzi 6 osôb práve jedna z nich dostane 2 diamanty. Tu môžu nastať dve možnosti:

1. B posiela jeden diamant A alebo C a druhý niekomu z $m-3$ ľudí, C potom posiela diamanty dvom z $m-4$ ľudí. Tu dostávame $2\cdot\binom{m-3}{1}\cdot\binom{m-4}{2}$ možností.

2. B posiela diamanty dvom z $m-3$ ľudí – označme si ich D, E. Potom C posiela jeden diamant niekomu zo štvorice A, B, D, E a druhý niekomu zo zvyšných $m-5$ ľudí. Pri tejto druhej možnosti dostávame $\binom{m-3}{2}\cdot 4\cdot\binom{m-5}{1}$ možností.

Vcelku dostávame, že

$$P(6)=2\cdot\binom{m-3}{1}\cdot\binom{m-4}{2}+\binom{m-3}{2}\cdot 4\cdot\binom{m-5}{1}=3\cdot(m-3)(m-4)(m-5).$$

Keďže $P(6)=P(7)$, dostávame rovnicu

$$\frac{(m-3)(m-4)}{2}\cdot\frac{(m-5)(m-6)}{2}=3\cdot(m-3)(m-4)(m-5).$$

Jej riešením dostávame štyri riešenia: 3, 4, 5, a 18. V Klube mohli byť 3, 4, 5 členovia (triviálne riešenia) alebo Klub mohol mať 18 členov (netriviálne riešenie).

8. Nájdite všetky trojuholníky ABC, v ktorých pri štandardnom označení platí

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma\,.$$

Riešenie:
Na základe toho, že súčet vnútorných uhlov v trojuholníku je 180° a vlastností funkcie tangens máme, že platí

$$\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}(180°-\alpha-\beta)=-\operatorname{tg}(\alpha+\beta).$$

Funkcia tangens je na intervale $(0°;180°)$ definovaná pre všetky hodnoty okrem 90°. Preto nutnou podmienkou pre trojuholník ABC je $\alpha,\beta,\gamma\neq 90°$. Ak $\gamma\neq 90°$, potom $\alpha+\beta\neq 90°$, a teda $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ je definovaný. Potom

$$\operatorname{tg}\gamma=-\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=-\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}\,.$$

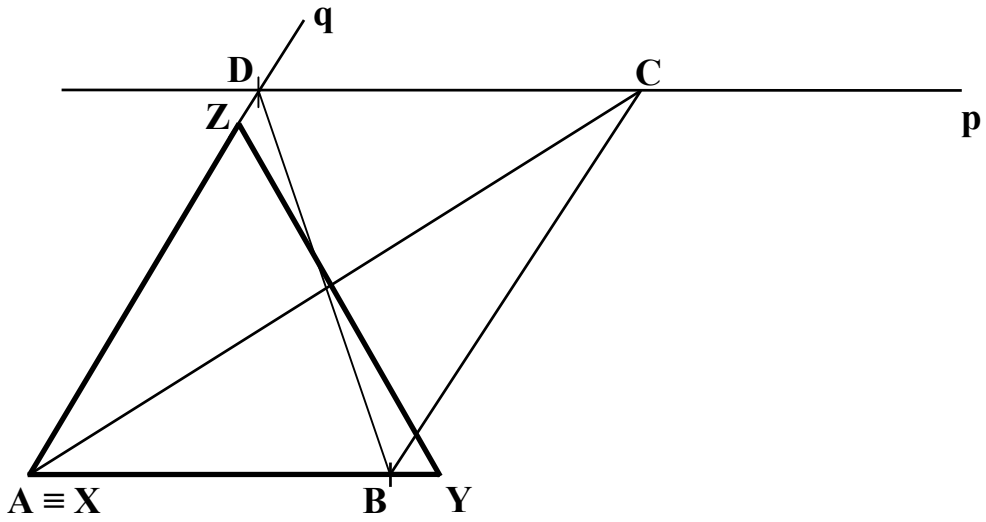
Prenásobením oboch strán tejto rovnosti výrazom $1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$ (je nenulový, lebo $\alpha+\beta\neq 90°$) a postupnými úpravami dostávame

$$\operatorname{tg}\gamma\cdot(1-tg\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta)=-(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta),$$
$$\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma=-\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta\,,$$
$$\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma\,.$$

Vidíme, že tvrdenie platí pre všetky prípustné hodnoty α,β,γ. Rovnosť zo zadania teda spĺňajú všetky nepravouhlé trojuholníky.

9. Daný je trojuholník ABC. Zostrojte rovnostranný trojuholník XYZ, ktorý má rovnaký obsah ako trojuholník ABC.

Riešenie:



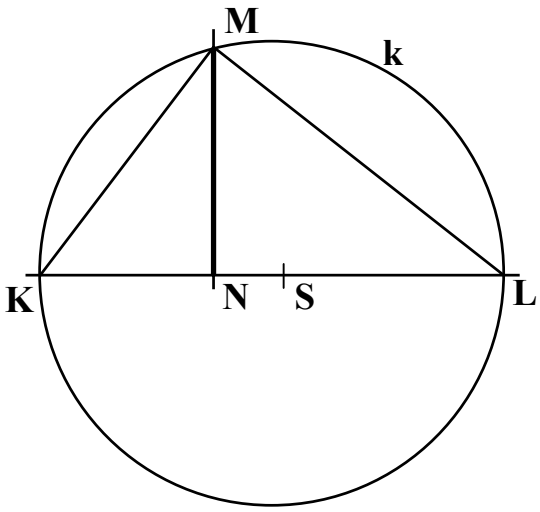
Najprv zostrojme trojuholník ABD taký, že uhol pri vrchole *A* je 60° a tento trojuholník má rovnaký obsah ako trojuholník ABC. Bod *D* zostrojíme tak, že bodom *C* budeme viesť rovnobežku *p* s priamkou AB. Bod *D* nájdeme ako prienik polpriamky *q* s krajným bodom *A*, ktorá zviera uhol 60° s úsečkou AB. Trojuholníky ABC a ABD majú rovnaký obsah vďaka tomu, že majú spoločnú stranu AB a rovnakú výšku na túto stranu. Využitím vzorca na výpočet obsahu trojuholníka dostávame

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2}|AB||AD|\sin|\angle BAD| = \frac{\sqrt{3}}{4}|AB||AD|.$$

Keďže máme nájsť taký rovnostranný trojuholník XYZ, ktorý má rovnaký obsah ako trojuholník ABC, musí platiť

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta XYZ} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2,$$

kde *x* je dĺžka strany trojuholníka XYZ. Porovnaním dostávame, že musí platiť $x = \sqrt{|AB| \cdot |AD|}$. Úsečku s takouto dĺžkou vieme zostrojiť napríklad pomocou Euklidovej vety o výške – zostrojíme si úsečku KL s dĺžkou $|AB| + |AD|$ a bod N patriaci tejto úsečke, pre ktorý platí $|KN| = |AB|$.



Zostrojíme kružnicu *k* nad priemerom *KL*. Potom zostrojíme bod *M* patriaci kružnici *k* a kolmici na úsečku *KL* prechádzajúcu bodom *N*. Potom

$$|MN| = \sqrt{|KN| \cdot |NL|} = \sqrt{|AB| \cdot |AD|} = x.$$

Keďže máme danú vzdialenosť *x*, vieme trojuholník *XYZ* zostrojiť.

10. Pre ľubovoľné $a,b,c \in \mathbf{R}^+$ rozhodnite, ktoré z čísel

$$A = 3 + (a+b+c) + \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) + \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right),\ B = 3\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{abc+1}$$

je väčšie.

Riešenie:
Pomocou úpravy na spoločného menovateľa a ekvivalentných úprav dostávame, že platí

$$abc(abc+1)(A-B) = ab(b+1)(ca-1)^2 + bc(c+1)(ab-1)^2 + ca(a+1)(bc-1)^2.$$

Výrazy na pravej strane sú nezáporné, lebo $a,b,c \in \mathbf{R}^+$ a druhé mocniny reálnych čísel sú nezáporné. Preto $A - B \geq 0$, a teda $A \geq B$. Rovnosť $A = B$ nastáva práve vtedy, keď je pravá strana nulová, a teda musí platiť, že všetky tri výrazy na pravej strane sú nulové, a teda $ca = ab = bc = 1$. Vynásobením týchto rovností dostávame $a^2b^2c^2 = 1$, odkiaľ máme vďaka podmienke $a,b,c \in \mathbf{R}^+$ $abc = 1$. Ak sem dosadíme $ab = 1$, dostávame $c = 1$. Analogicky dostaneme aj $b = 1$ a $a = 1$. Platí teda, že $A \geq B$ a rovnosť nastáva práve vtedy, keď $a = b = c = 1$.

11. Dokážte, že pre ľubovoľné prirodzené čísla m,n,p existuje polynóm $Q(x)$ s celočíselnými koeficientmi, pre ktorý platí, že

$$x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2} = \left(x^2 + x + 1\right)Q(x).$$

Riešenie:
Upravme si polynóm $x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2} - x^2 - x - 1$:

$$\begin{aligned} x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2} - x^2 - x - 1 &= x^{3m} - 1 + x\left(x^{3n} - 1\right) + x^2\left(x^{3p} - 1\right) = \\ &= \left(x^3 - 1\right)\left(x^{3m-3} + x^{3m-6} + \ldots + 1\right) + x\left(x^3 - 1\right)\left(x^{3n-3} + x^{3n-6} + \ldots + 1\right) + \\ &+ x^2\left(x^3 - 1\right)\left(x^{3p-3} + x^{3p-6} + \ldots + 1\right) = \left(x^3 - 1\right)\left[\left(x^{3m-3} + x^{3m-6} + \ldots + 1\right) + \right. \\ &\left. + x\left(x^{3n-3} + x^{3n-6} + \ldots + 1\right) + x^2\left(x^{3p-3} + x^{3p-6} + \ldots + 1\right)\right] = (x-1)\left(x^2 + x + 1\right)P(x), \end{aligned}$$

kde sme položili

$$P(x) = \left(x^{3m-3} + x^{3m-6} + \ldots + 1\right) + x\left(x^{3n-3} + x^{3n-6} + \ldots + 1\right) + x^2\left(x^{3p-3} + x^{3p-6} + \ldots + 1\right).$$

Vcelku teda dostávame

$$x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2} = \left(x^2 + x + 1\right)\left[1 + (x-1)P(x)\right] = \left(x^2 + x + 1\right)Q(x),$$

kde sme položili $Q(x) = 1 + (x-1)P(x)$, a teda sme hľadaný polynóm $Q(x)$ našli.

12. Označme a,b,c dĺžky strán trojuholníka a S jeho obsah. Dokážte, že platí nerovnosť

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}\,S$$

a zistite, kedy nastáva rovnosť.

Riešenie:

Podľa Herónovho vzorca platí $S^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$, kde $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Úpravami dostávame, že platí $16S^2 = (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) =$ $= -a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2$. S dokazovanou nerovnosťou je ekvivalentná nerovnosť $\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 \geq 3 \cdot 16 \cdot S^2$. Ak sem dosadíme za $16 \cdot S^2$ z predchádzajúceho vzťahu a upravíme, dostaneme ekvivalentnú nerovnosť

$$a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2 \geq 0,$$

ktorá je ekvivalentná s nerovnosťou

$$\left(a^2-b^2\right)^2 + \left(b^2-c^2\right)^2 + \left(c^2-a^2\right)^2 \geq 0.$$

Posledná nerovnosť platí pre všetky reálne čísla a,b,c, a teda tvrdenie úlohy sme dokázali. Rovnosť v nej nastáva práve vtedy, keď $a=b=c$, teda práve vtedy, keď ide o rovnostranný trojuholník.