Zadania 2. série úloh korešpondenčnej súťaže v školskom roku 2007/2008

1. Šejk prišiel do hotela, kde dostal izbu označenú dvojmiestnym číslom. Všimol si, že toto číslo je rozdielom štvorcov dvoch cifier, z ktorých menšia je dvojnásobkom cifry označujúcej počet jednotiek v čísle izby. Zistite, aké číslo mohla mať izba.

2. Vandal vytrhol z knihy jednu stránku. Súčet čísel strán na zvyšných stranách sa rovná 22 000. Koľko strán mala pôvodne kniha a ktorú stránku vandal vytrhol?

3. Dvaja obchodníci prišli k bráne Paríža. Jeden mal 64 a druhý 20 okovov vína. Nemali však dosť peňazí na vyplatenie cla. Chýbajúce peniaze nahradili vínom. Prvý platil 40 frankov a ešte 5 okovov vína. Druhý dal 2 okovy vína a dostal naspäť 40 frankov. Koľko stál jeden okov vína a aké bolo clo zaň? Aké by platili clo a koľko by stál jeden okov vína, ak nemuseli platiť clo za víno, ktorým zaplatili clo?

4. Uvažujte štvorciferné číslo. Premiestnite prvú číslicu zľava na koniec čísla. Toto štvorciferné číslo sčítajte s pôvodným číslom. Zistite, aké čísla si mohli myslieť Peter, Petra, Pavol a Pavla, ak im vyšli čísla 8 612, 4 322, 9 493 a 13 859 v tomto poradí.

5. Dokážte, že pre $k<0$ má rovnica $x-1=kx^2$ reálny koreň z intervalu $(0,1)$.

6. Chodec vybehol po schodoch stúpajúceho eskalátora (pohyblivých schodoch) do výšky 10 m a späť za 73 sekúnd. Druhýkrát urobil to isté na rovnakom, ale klesajúcom eskalátore za 4 minúty a 22 sekúnd. Vypočítajte rýchlosť stúpania eskalátora, ak viete, že chodec zbehol dole o 35 % rýchlejšie, ako vybehol hore. Výsledok uveďte v cm/s s presnosťou na dve platné číslice.

7. Nájdite všetky prirodzené čísla n s vlastnosťou, že niekoľko prvých cifier čísla n^2 tvorí číslo n.

8. Dokážte, že funkcia $\rho(x,y):\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$, kde $x=(x_1,x_2)$ a $y=(y_1,y_2)$, definovaná predpisom

$$\rho(x,y)=\left(\sqrt{|x_1-y_1|}+\sqrt{|x_2-y_2|}\right)^2$$

spĺňa tzv. trojuholníkovú nerovnosť, t. j. pre všetky $x,y,z\in\mathbf{R}^2$ platí

$$\rho(x,y)+\rho(y,z)\geq\rho(x,z).$$

9. Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla k platí

$$\prod_{n=2}^{k} \frac{n^3-1}{n^3+1} > \frac{2}{3}.$$

10. Rozdeľte pravidelný šesťuholník piatimi priamymi rezmi tak, aby sa z jeho častí dal zostaviť rovnostranný trojuholník.

11. Dokážte, že pre všetky kladné x, y, z platí

$$x+y+z \le 2\left(\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{y+x}\right).$$

12. Majme danú priamku p. Označme na nej žltou farbou všetky tie body, ktoré zodpovedajú číslam tvaru $81x+100y$, kde x a y sú prirodzené čísla. Body na priamke zodpovedajúce ostatným celým číslam označme oranžovou farbou. Zistite, či existuje na priamke taký bod, vzhľadom na ktorý ľubovoľná symetrická dvojica bodov zodpovedajúcich celým číslam je zafarbená rôznymi farbami.

13. Nájdite súčet

$$\sum_{i=0}^{101} \frac{x_i^3}{1-3x_i+3x_i^2},$$

ak $x_i = \dfrac{i}{101}$ pre všetky i.

14. Dokážte, že platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\cdot 2^k} \le \pi \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Termín odoslania riešení úloh 2. série: do 14. 12. 2007.

Riešenia zasielajte na adresu:

Metodicko-pedagogické centrum
MATMIX
Ing. Mgr. Martin Hriňák
Tomášikova 4
P. O. BOX 14
820 09 Bratislava 29