Metodicko-pedagogické centrum, Tomášikova 4, Bratislava

Európsky sociálny fond

Projekt je spolufinancovaný Európskou úniou.

Ročník: 13
Číslo: 2
Šk. rok: 2007/2008

Matematický časopis pre žiakov základných a stredných škôl

MATMIX

Matematika je zároveň umením i vedou, je to eklektická zmes úžitku a tvorby, empirizmu a intuície.

J. Ewing

Redakčná pošta

Milí čitatelia.

Dostávate do rúk druhé tohtoročné číslo časopisu. Toto neskoršie zaslanie časopisu bolo spôsobené čakaním na riešenia súťažných úloh čitateľov časopisu Mladý vedec, ktorí mali posunutý termín odoslania úloh.

V októbri sa uskutočnil šiesty matboj v Banskej Bystrici a 16. novembra sme ukončili sériu siedmich matbojov matbojom v Košiciach. A ako sa patrí, tento matboj bol aj najväčší zo všetkých – prihlásilo sa naň 69 družstiev s 345 žiakmi. Krátku reportáž z neho odvysielala aj Slovenská televízia – na našej webovej stránke môžete nájsť odkaz na archív STV, v ktorom ju môžete nájsť a pozrieť si ju. Podrobnejšie informácie o matbojoch nájdete v časopise na strane 3.

Ku korešpondenčnej súťaži len pár slov, keďže sa jej tiež venujeme vo vnútri časopisu. Viacerí z vás nám nezaslali kontaktné údaje, preto sme vám nemohli zaslať časopis ani opravené riešenia späť. Preto by sme vás chceli požiadať o zaslanie prihlášky, resp. jej doplnenie. Zároveň si vás dovoľujeme ešte upozorniť na to, aby ste dodržiavali termíny a dávali pozor na adresy, kam svoje riešenia posielate.

Naše Metodicko-pedagogické centrum čaká k 31. 12. tohto roku zásadná organizačná zmena, avšak na vydávanie časopisu by to nemalo mať vplyv. Akonáhle budeme vedieť presné informácie, budeme vás o tom informovať.

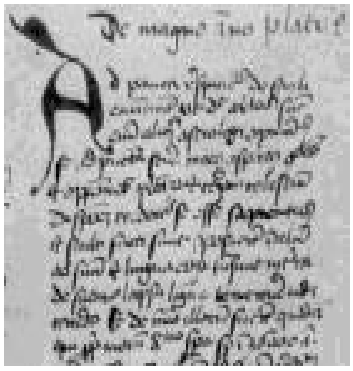
S prianím príjemného prežitia posledného mesiaca v roku sa s vami lúči

vaša redakcia

Mikuláš z Oresme – mních bádajúci aj v matematike

Zakladanie univerzít

Najvplyvnejšia univerzita vrcholného stredoveku bola založená v Paríži v roku 1160 a potvrdená cisárskymi privilégiami bola v roku 1174 na miestach, kde okolo roku 1258 založil Robert de Sorbon prvé študentské domovy. V tom čase už bola univerzita v Bologni (1119) a postupne vznikali ďalšie v Oxforde (1167), v Cambridgi (1209), v Padove (1222), v Neapoli (1224). Neskôr pribudli v Prahe (1348), v Krakove (1364), vo Viedni (1365) a Heidelbergu (1385). Univerzity zohrali dôležitú úlohu aj v rozvoji matematiky, i keď výchova matematikov nebola špeciálnym cieľom univerzít.



Osobnosť a záujmy

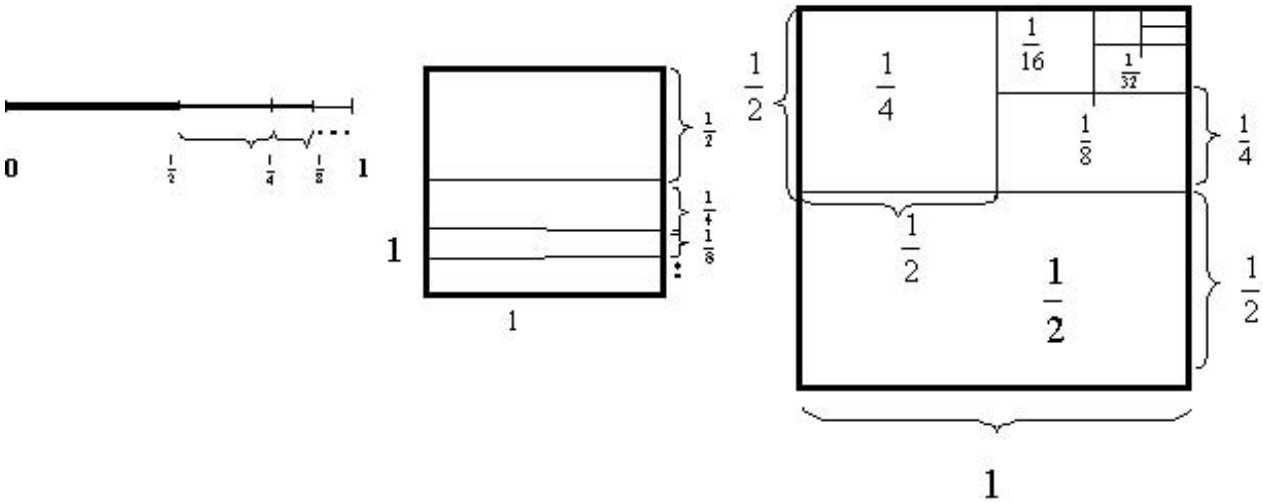
V 14. storočí bol vynikajúcim učencom – matematikom – **Mikuláš z Oresme** (Nicole Oresme, asi 1323 – 1382). V rokoch 1348 až 1361 prednášal na Collége de Navarre v Paríži, prekladal latinské texty do francúzštiny a komentoval ich. Vytváral francúzsku vedeckú terminológiu hlavne v astronómii a geografii. V oblasti matematiky a mechaniky predvídal niektoré pojmy a metódy, ktoré sa uplatnili až v 16. a 17. storočí. V roku 1356 bol vysvätený na kňaza a od roku 1377 bol biskupom v Lisieux v Normandii.

Mikuláš z Oresme sa snažil o matematický opis pohybu, uvažoval o možnosti iných svetov či o rotácii Zeme. V práci *O konfigurácii kvalít* používal geometrické vyjadrenie veličín a ich vzájomné súvislosti. Nad úsečkou znázorňujúcou čas zostrojil „čiaru intenzity pohybu“ a porovnával „formy o premennej šírke“. V podstate išlo o grafy rýchlosti, kde obsah obrazca vyjadroval veľkosť dráhy.

Z diela

V spise *Algorismus proportionum* sa Mikuláš z Oresme zaoberal počítaním s mocninami s lomeným mocniteľom a vedel napríklad, že $8 = 4^{\frac{3}{2}}$ (v našom zápise), pretože $4^3 = 64$ a $64 = 8^2$, t. j. 8 sa nachádza v „poldruhanásobnom pomere“ k 4. V podstate vedel slovne formulovať operácie s mocninami s lomenými exponentmi.

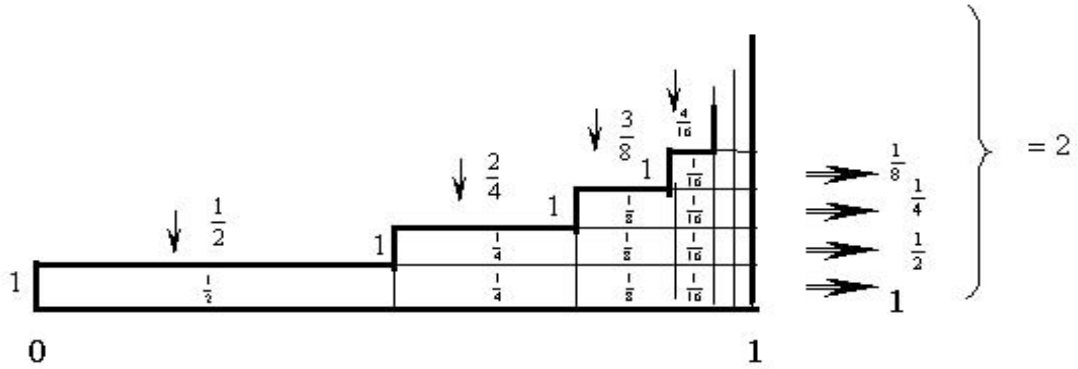
Geometrickou interpretáciou vedel Mikuláš z Oresme určovať aj súčet nekonečných radov. Ukázal, že $^1/_2 + {}^1/_4 + {}^1/_8 + ... = 1$, pretože „pochopil obrázky“:



Vtipne už v roku 1350 predviedol, že harmonický rad $1 + {}^1/_2 + {}^1/_3 + {}^1/_4 + \ldots$ nemôže mať konečný súčet, lebo (v našom zápise)

$$1 + \underbrace{{}^1/_2 + {}^1/_3 + {}^1/_4}_{> {}^1/_4 + {}^1/_4 = {}^1/_2} \underbrace{+ {}^1/_5 + {}^1/_6 + {}^1/_7 + {}^1/_8}_{> {}^1/_8 + {}^1/_8 + {}^1/_8 + {}^1/_8 = {}^1/_2} + \underbrace{{}^1/_9 + \ldots}_{> {}^1/_2} + \ldots,$$

čo znamená súčet blížiaci sa k nekonečnu.
Takýmto obrázkom



vedel určiť súčet ${}^1/_2 + {}^2/_4 + {}^3/_8 + {}^4/_{16} + \ldots = 2$.

Mikuláš z Oresme prispel k stanoveniu závislosti medzi časom a meranou veličinou, grafický záznam priebehu bol už výrazom prírodného zákona. Vytušil úlohu funkčných závislostí (funkcia ako „faustovské číslo“) ako nástroja na skúmanie prírody a jej merateľných zákonov. Patrí k prvým, ktorí sa nezľakli tajomstiev nekonečna a spoznali, že môže existovať nekonečný útvar s konečným obsahom. Vo svojich úvahách obsiahol niekoľko hlbokých myšlienok matematiky premenných veličín, ktoré však museli počkať, pokiaľ sa neobjavil matematický aparát na riešenie konkrétnych reálnych problémov fyziky a ďalších technických i prírodných vied.

Dušan Jedinák

Matboje MATMIX-u

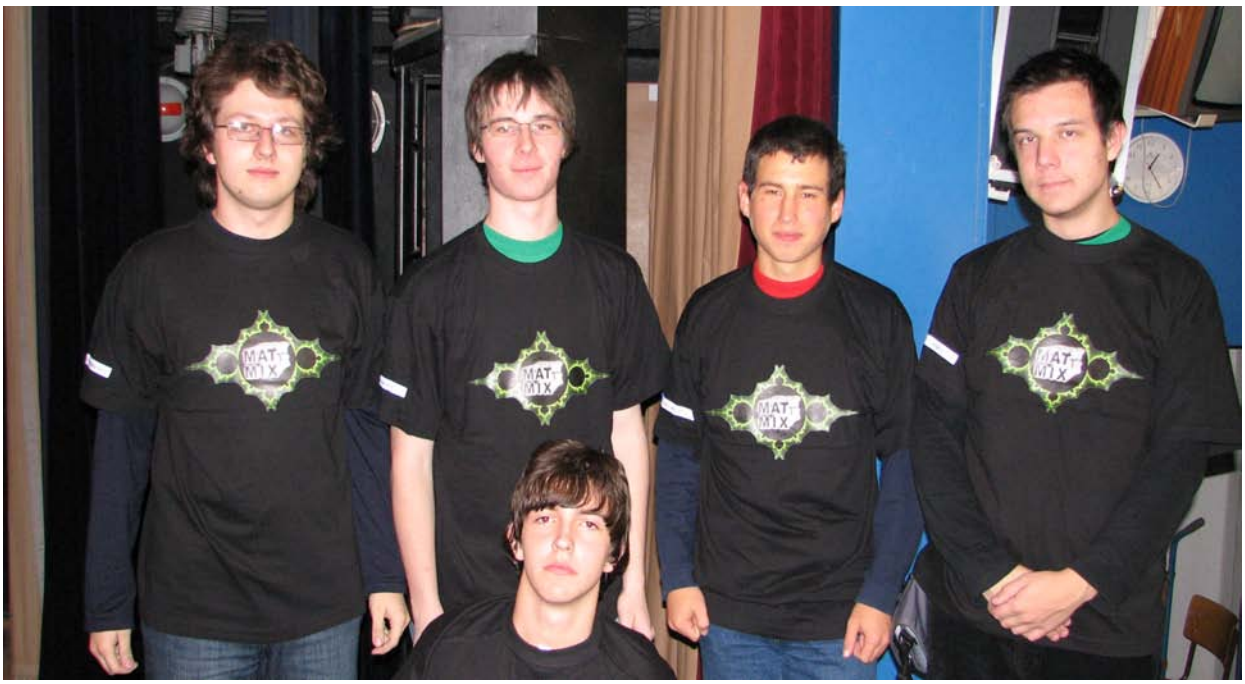
V októbri sa uskutočnil šiesty matboj v Banskej Bystrici na Gymnáziu Andreja Sládkoviča. Súťaže sa zúčastnilo 31 družstiev z 19 škôl. V kategórii Stredné odborné školy zvíťazilo družstvo Mocniny z Obchodnej akadémie v Krupine. V kategórii Gymnáziá zvíťazilo domáce družstvo GJGT 1 z Gymnázia J. G. Tajovského v Banskej Bystrici, ktoré vyriešilo 39 súťažných úloh.

Posledný matboj sa uskutočnil 16. novembra v Centre voľného času Domino v Košiciach. Ako už bolo v úvode spomenuté, išlo o najväčší matboj, ktorý sme organizovali. Do súťaže sa prihlásilo 69 družstiev s 345 účastníkmi z 45 škôl, preto musela súťaž prebiehať v dvoch miestnostiach pre jednotlivé kategórie. Zadania tohto matboja boli oproti predchádzajúcim trochu náročnejšie, preto neboli medzi najlepšími družstvami až také veľké rozdiely. Víťazom sa v kategórii Stredné odborné školy stalo družstvo Delfíni zo Združenej strednej školy J. Andraščíka v Bardejove. V kategórii Gymnáziá zvíťazilo opäť družstvo GJGT 1 z Gymnázia J. G. Tajovského v Banskej Bystrici, ktoré vyhralo až 3 matboje zo siedmich, ktoré sme organizovali.

Zaujímavým javom na košickom matboji boli tri družstvá z Gymnázia v Trebišove – všetky tri vypočítali presne tie isté úlohy. Vidno, že na tejto škole učia žiakov rovnako... Alebo že by to bolo inak?

Celkovo sa našich matbojov zúčastnilo 1390 žiakov, ktorí súťažili v 278 družstvách z takmer 200 škôl.

Martin Hriňák



Družstvo Fukoty z Gymnázia ma Alejovej 1 v Košiciach, ktoré skončilo na 2. mieste.

Korešpondenčná súťaž v školskom roku 2007/2008

1. sériu korešpondenčnej súťaže už máme úspešne za sebou. Opäť sa však vyskytli tradičné chyby, o ktorých sme písali aj v prvom čísle. Veľmi častým dôvodom, kvôli ktorému ste strácali body, bolo, že ste nezdôvodnili svoje výpočty, ale ste len napísali niekoľko rovníc a podobne. Riešenia je potrebné zdôvodňovať tak, aby z nich bolo jasné, o čo sa snažíte.

Z technickej stránky je potrebné upozorniť na to, aby ste riešenia písali na samostatné papiere formátu A4, pretože úlohy opravujú rôzni ľudia, a ak na jeden papier napíšete riešenia štyroch úloh, môže sa stať, že nebudú všetky načas opravené. Zadania súťažných úloh nemusíte prepisovať, stačí, keď vyznačíte, o ktorú úlohu ide.

Bohužiaľ, ani tento rok sme sa nevyhli odpisovačom, pozdravujeme hlavne tradičné odpisovacie bašty ako je Gymnázium J. G. Tajovského v Banskej Bystrici či Gymnázium na Párovskej 1 v Nitre, ale aj nové centrá ako Gymnázium na Mládežníckej 22 v Šahách, Gymnázium na Komenského 13 v Hlohovci, Gymnázium A. Kmeťa v Banskej Štiavnici, Pedagogickú a sociálnu akadémiu v Turčianskych Tepliciach či Cirkevné gymnázium P. U. Olivu v Poprade. Nezostáva nám nič iné, len apelovať na vašu česť, aby ste nekazili dobré meno vašej školy, a dodať, že v ďalšej sérii budeme k odpisovačom pristupovať oveľa prísnejšie, a ak nájdeme niekoho, kto odpisoval, dostane za celú sériu 0 bodov, aj keby odpisoval (či dal odpísať) čo i len v jednej úlohe.

Riešenia 1. série úloh

1. Štyria chlapci majú spolu 157 guľôčok. Každý z nich, okrem najmladšieho, má o 5 guľôčok menej, ako majú jeho mladší kamaráti spolu. Určte, koľko guľôčok má každý chlapec, ak viete, že sa každý narodil v inom roku.

Riešenie: Chlapcov si označme *A*, *B*, *C*, *D* od najmladšieho po najstaršieho. Počet guľôčok chlapca *A* si označme x. *B* má podľa zadania o 5 guľôčok menej ako *A*, lebo *A* je jediný mladší od *B*. Čiže *B* má $x-5$ guľôčok. *C* má o 5 guľôčok menej ako *A* a *B* spolu. Takže *C* má $x+(x-5)-5=2x-10$ guľôčok. *D* má o 5 guľôčok menej ako *A*, *B* a *C* spolu, čiže *D* má $x+(x-5)+(2x-10)-5=4x-20$ guľôčok. Spolu majú všetci štyria 157 guľôčok, čiže platí:

$$\begin{aligned} x+(x-5)+(2x-10)+(4x-20)&=157\\ 8x-35&=157\\ 8x&=192\\ x&=24 \end{aligned}$$

To znamená, že A má 24 guľôčok, B má $24-5=19$ guľôčok, C má $2.24-10=38$ guľôčok a D má $4.24-20=76$ guľôčok.

Komentár (opravovala Katarína Škrovinová): Za správne riešenie ste získali 5 bodov, 1 až 2 body ste mohli stratiť v prípade, keď ste nedostatočne zdôvodnili svoj postup riešenia alebo vám chýbala odpoveď. Ak ste riešenie len uhádli, získali ste 1 bod, za overenie jeho správnosti ste mohli získať tiež 1 bod.

2. Nájdite všetky prirodzené čísla menšie ako 10 000, ktorých ciferný súčet je 11 a sú deliteľné 11.

Riešenie: Hľadajme prirodzené čísla spĺňajúce podmienky zo zadania. Vieme, že každé takéto číslo má byť menšie ako 10 000. Stačí rozobrať možnosti, že toto číslo je:

- Jednociferné:
  Jednociferné prirodzené čísla nie sú deliteľné 11, takže tieto čísla nie sú vyhovujúce.
- Dvojciferné:
  Dvojciferné čísla deliteľné 11 sú len 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99. Tieto čísla majú obidve svoje cifry rovnaké, teda ich ciferný súčet je párne číslo. Číslo 11 je ale nepárne. To znamená, že ani v tomto prípade riešenia nenájdeme.
- Trojciferné:
  Rozobranie možností by si už vyžiadalo viac času a námahy, preto zvoľme iný prístup. Označme hľadané číslo $\overline{abc}$, pričom $a>0$. Vieme, že číslo je deliteľné 11 práve vtedy, keď je rozdiel súčtov cifier na nepárnych miestach a párnych miestach násobkom čísla 11. V našom prípade to znamená:
  $$(a+c)-b=11k,$$
  kde k je nejaké celé číslo. Vieme, že ciferný súčet hľadaného čísla je 11, teda:
  $$a+b+c=11.$$
  Vyjadríme $a+c$ z jednej rovnice a dosadíme do druhej. Dostávame rovnicu:
  $$2b=11(1-k).$$
  Pravá strana rovnosti je deliteľná 11, teda aj výraz $2b$ musí byť deliteľný 11. To znamená, že aj b musí byť deliteľné 11. Keďže b je cifra, tak to môže byť jedine 0. Z toho máme $k=1$ a $a+c=11$. Túto rovnosť spĺňajú tieto usporiadané dvojice cifier (a,c): $(2,9)$, $(3,8)$, $(4,7)$, $(5,6)$, $(6,5)$, $(7,4)$, $(8,3)$ a $(9,2)$. Riešením môžu byť jedine čísla **209, 308, 407, 506, 605, 704, 803, 902**. Ľahko overíme, že tieto čísla sú skutočne riešením.
- Štvorciferné:
  Náš postup bude podobný ako pri trojciferných číslach. Označme hľadané číslo $\overline{abcd}$, pričom $a>0$. Podľa kritéria deliteľnosti číslom 11:
  $$(a+c)-(b+d)=11k,$$
  kde k je opäť nejaké celé číslo. Navyše pre ciferný súčet má platiť:
  $$a+b+c+d=11.$$

Vyjadrením $a+c$ z jednej rovnice a dosadením do druhej dostaneme:

$$2(b+d)=11(1-k).$$

Vidíme, že $b+d$ musí byť deliteľné 11, teda to môže byť 0 alebo 11. Súčet dvoch cifier totiž nemôže byť 22 alebo väčší. Ak by však platilo $b+d=11$, tak by sme dostali $a+c=0$, čo znamená, že $a=0$, $c=0$. Máme však podmienku, že $a>0$. Preto stačí rozobrať prípad $b+d=0$. Potom $a+c=11$. Ako v predošlom prípade trojciferných čísel, túto rovnosť spĺňajú tie isté dvojice cifier (a,c). Hľadané čísla sú **2 090, 3 080, 4 070, 5 060, 6 050, 7 040, 8 030, 9 020**. Ľahko overíme, že aj tieto čísla spĺňajú uvedené vlastnosti.

Riešením je teda týchto 16 čísel: 209, 308, 407, 506, 605, 704, 803, 902, 2 090, 3 080, 4 070, 5 060, 6 050, 7 040, 8 030, 9 020.

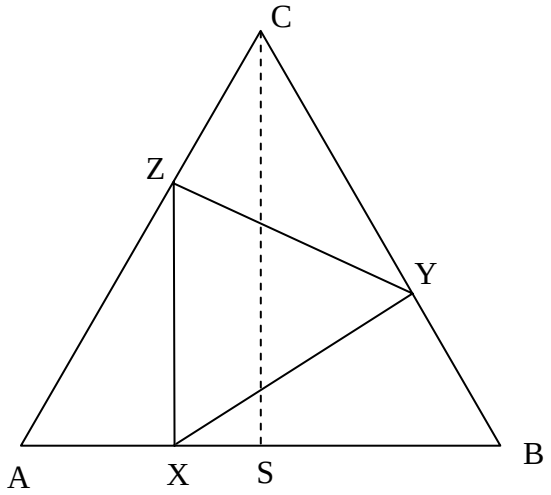
Komentár (opravoval Michal Takács): Problémy vám spôsobovalo väčšinou rozobrať všetky možnosti, na niektoré ste zabúdali. Tí, čo našli všetky riešenia bez zdôvodnenia, dostali 1 bod. Postup nájdenia riešení treba poriadne opísať.

3. Traja hráči sa dohodnú, že ten, ktorý prehrá, zdvojnásobí peniaze dvom zostávajúcim hráčom. Po troch partiách hry, postupne prehraných všetkými tromi hráčmi, má každý hráč 24 peňazí. Koľko mal každý hráč peňazí, než začali hrať?

Riešenie: Pozrime sa na situáciu tesne pred koncom hry – ako musela skončiť 3. partia, aby mali hráči na konci 24 peňazí? Vieme, že ten, ktorý prehral, zdvojnásobil ostatným hráčom ich peniaze. Keďže mali potom 24, tak pred začiatkom 3. hry museli mať po 12 peňazí. Ten hráč, ktorý im ich zdvojnásobil, to musel zaplatiť zo svojho, teda musel mať $24+12+12=48$ peňazí. Keďže tento hráč už raz prehral, v 1. a 2. hre musel vyhrať. V druhej hre musel prehrať jeden z hráčov, ktorý mal po jej skončení 12 peňazí. Keďže zdvojnásoboval peniaze ostatným dvom, tak zvyšní dvaja hráči museli mať 6 a 24 peňazí. To ho stálo $24+6=30$ peňazí. Preto mal pred touto hrou $30+12=42$ peňazí. No a pred prvou hrou bola situácia podobná. Prehrať musel ten hráč, ktorý mal po jej skončení 6 peňazí. Keďže zdvojnásoboval peniaze ostatným dvom, títo dvaja museli mať polovicu toho, čo po 1. hre, teda 12 a 21 peňazí. Prehra ho stála $12+21=33$ peňazí, a teda na začiatku hry mal $33+6=39$ peňazí. Na začiatku hry preto mali hráči 39, 21 a 12 peňazí.

Komentár (opravoval Martin Hriňák): Najčastejšou chybou vo vašich riešeniach bolo, že ste overovali dosiahnuté riešenie, teda ste urobili len skúšku správnosti vášho riešenia a nedokázali ste, že žiadne iné riešenie nemôže existovať. Za takéto riešenia ste mohli získať maximálne 2 body. Častým nesprávnym riešením bolo riešenie, že všetci mali na začiatku 6 peňazí. Toto riešenie vychádzalo z toho, že ste zabudli na to, že ak niekto prehrá, tak zdvojnásobovanie peňazí ostatných hráčov musí zaplatiť z jeho vlastných peňazí – predsa len sa peniaze nevytvárajú len tak zo vzduchu...

4. Rovnostranný trojuholník so stranou dĺžky 6 cm rozdeľte troma úsečkami na štyri trojuholníky, z ktorých jeden je opäť rovnostranný trojuholník a zvyšné tri sú zhodné pravouhlé trojuholníky. Vypočítajte dĺžky strán všetkých vzniknutých trojuholníkov.



Riešenie: Základným krokom v tejto úlohe bolo nájdenie správneho rozmiestnenia trojuholníkov. Zvoľme si označenie v súlade s obrázkom, pričom bod *S* je pätou výšky z vrcholu *C* na stranu *AB*. Trojuholník *AXZ* zvoľme tak, aby *XZ* bolo kolmé na *AB*. Trojuholník *AXZ* je podobný s trojuholníkom *ASC* na základe vety *uu* (uhol pri vrchole *A* je spoločný a uhly *AXZ* a *ASC* sú pravé). Preto platí

$$|AZ|:|AX| = |AC|:|AS| = 6:3 = 2:1.$$

Aby boli trojuholníky *AXZ*, *CZY* a *AYX* zhodné, musí platiť $|AX| = |CZ| = |BY|$. Potom

$$|AC| = |AZ| + |CZ| = 2|AX| + |AX| = 3|AX|.$$

Keďže $|AC| = 6$ cm, tak $|AX| = 2$ cm a $|AZ| = 4$ cm. Preto ak v bode *Z* urobíme kolmicu na *AC*, pretne úsečku *BC* v bode *Y* a kolmica v bode *Y* na stranu *BC* pretne stranu *AB* opäť v bode *X*, čo sme chceli.

Keďže sú trojuholníky *AXZ*, *CZY* a *BYX* zhodné, bude trojuholník *XYZ* rovnostranný. Teraz už len vypočítame dĺžku strany $|XZ|$ na základe Pytagorovej vety:

$$|XZ| = \sqrt{|AZ|^2 - |AX|^2} = \sqrt{16-4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

Strany pravouhlých trojuholníkov sú 2 cm, 4 cm, $2\sqrt{3}$ cm a rovnostranný trojuholník má dĺžky strán $2\sqrt{3}$ cm.

Komentár (opravoval Martin Hriňák): Za rozdelenie trojuholníka na požadované trojuholníky ste mohli získať 1 bod. Za zdôvodnenie, že ide o korektné rozdelenie, ste mohli získať ďalšie 2 body. Táto časť vám robila najväčšie problémy – využívali ste to, čo ste chceli dokázať – napr. pri dôkaze, že ide o pravouhlé trojuholníky ste využívali goniometrické funkcie, ktoré už sami v sebe obsahujú predpoklad pravého uhla. Za výpočet dĺžky strany rovnostranného trojuholníka ste mohli získať 2 body. Za numerické riešenia ste strácali 1 bod – ak je to možné, riešenia hľadajte vždy presne. V tejto úlohe sa plne prejavil kolektívny duch riešiteľov zo Šiah, ktorí ako jediní využívali vo svojich riešeniach Talesovu kružnicu.

5. Na strednej škole učia traja učitelia: Kocian, Havran a Jedlička – každý z nich učí práve dva predmety. Učia slovenčinu, ruštinu, angličtinu, matematiku, dejepis a zemepis.

a) Kocian pozval svojich kolegov – učiteľa matematiky a učiteľa slovenčiny – na oslavu svojich narodenín.
b) Učiteľ zemepisu býva neďaleko ruštinára.
c) Všetci traja – Jedlička, učiteľ slovenčiny a učiteľ ruštiny – chodia spolu na výlety.
d) Učiteľ matematiky je lepším športovcom ako Kocian a učiteľ angličtiny.

Čo učí ktorý učiteľ?

Riešenie: Na základe bodov a) a c) môžeme usúdiť, že Havran učí slovenčinu, pretože Kocian to nemôže byť na základe a) a Jedlička na základe c). Potom na základe a) vieme, že Jedlička učí matematiku. Na základe d) potom vieme, že angličtinu musí učiť Havran. Na základe c) vieme, že ruštinu učí Kocian. Na základe b) vieme, že zemepis musí učiť Jedlička, pretože Havran už má pridelené dva predmety a ruštinu učí Kocian. Nakoniec dostávame, že dejepis učí Kocian, pretože ostatným dvom sme už priradili predmety, ktoré učia. **Zhrnutie:** Kocian učí ruštinu a dejepis, Havran slovenčinu a angličtinu, Jedlička matematiku a zemepis.

Komentár (opravoval Martin Hriňák): Úlohu ste väčšinou zvládli dobre. Vyskytli sa rôzne prístupy k riešeniu úlohy. Za uvedenie rozdelenia predmetov jednotlivým učiteľom ste získavali 1 bod. Za príliš veľké logické skoky vo vašich úvahách alebo pri nedostatočnom zdôvodnení ste mohli stratiť 1 až 2 body (ak to bolo veľmi nedostatočné, tak aj viac ☺). Častokrát sa vyskytlo riešenie typu „vytvorila som si tabuľku, doplnila ju na základe zadania a vyšlo mi riešenie“. V tomto riešení je základný nedostatok v tom, že nie je jasné, v akom poradí ste jednotlivé kroky robili.

6. Určte, koľkými spôsobmi môžeme rozostaviť n veží na šachovnici $n \times n$ tak, aby sa navzájom neohrozovali.

Riešenie: Keďže máme n veží na šachovnici $n \times n$, tak každá musí byť v inom stĺpci aj inom riadku (dve veže, ktoré sú v rovnakom riadku alebo stĺpci, sa navzájom ohrozujú). Ďalej je jasné, že musia obsadiť všetky stĺpce aj riadky. Uvažujme stĺpce: V prvom stĺpci môžeme prvú vežu zvoliť na ľubovoľnom mieste, teda máme n možností. V druhom stĺpci máme na umiestnenie druhej veže už len $n-1$ možností, pretože veža z prvého stĺpca ohrozuje jeden riadok v druhom stĺpci. V treťom stĺpci máme už len $n-2$ možností, pretože veža z prvého stĺpca ohrozuje jeden riadok a veža z druhého stĺpca druhý. Takto môžeme pokračovať v ďalších stĺpcoch, až dospejeme k tomu, že v poslednom stĺpci máme už len 1 možnosť. Celkovo máme na základe pravidla súčinu $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ možností rozostavenia veží.

Komentár (opravoval Martin Hriňák): Viacero z vás našlo len dve možné rozostavenia veží – na diagonálach. Za takéto riešenia ste však získavali 0 bodov, keďže ste na veľmi veľa iných zabudli. Častou chybou bolo aj to, že ste si nakreslili situáciu pre malé hodnoty n a potom ste prehlásili, že rovnako to bude platiť aj pre všeobecné n. To však vôbec nie je také jasné, a preto ste za takéto riešenia mohli získať maximálne 2 body (opäť sa ukázalo, že Gymnázium J. G. Tajovského v Banskej Bystrici či Gymnázium v Hlohovci oplývajú veľmi výrazným kolektívnym myslením...). Veľkú skupinu nesprávnych riešení tvorili riešenia, v ktorých vám vyšlo $(n!)^2$ možností. K týmto riešeniam ste väčšinou dospeli úvahou, že na výber políčka pre prvú vežu máte n^2 možností, na výber políčka pre druhú vežu už len $(n-1)^2$ možností atď. Problém v tomto riešení je však v tom, že každú možnosť ste započítali $n!$-krát, pretože prvou môže byť každá z n veží, druhou každá zo zvyšných atď.

7. Janko tipoval na atletických pretekoch takéto poradie pretekárov: 1. A, 2. B, 3. C, ..., 7. G. V skutočnosti však každý, kto mal iného predbehnúť o dve miesta, zaostal za ním o dve miesta. Dá sa z tejto informácie určiť skutočné poradie v pretekoch?

Riešenie: Zamyslime sa nad pretekármi A, C, E, G. A mal predbehnúť C, ale v skutočnosti skončil 2 miesta za ním. Podobne E skončil o dve miesta pred C a G skončil o dve miesta lepšie ako E. Celkovo to znamená, že G skončil o 6 miest lepšie ako A. Keďže miest je len 7, musel byť A siedmy, C piaty, E tretí a G prvý. Analogicky dostaneme, že D skončil o dve miesta lepšie ako B a F skončil o 2 miesta lepšie ako D, teda F skončil o 4 miesta lepšie ako B. Ostali nám voľné už len 2., 4. a 6. miesto, preto B musel skončiť na 6. mieste, D na štvrtom a F na druhom. Celkovo dostávame, že skutočné poradie bolo opačné: 1. G, 2. F, 3. E, 4. D, 5. C, 6. B, 7. A.

Komentár (opravoval Martin Hriňák): Body ste strácali za nepresné zdôvodnenie toho, že F a G musia byť na prvých dvoch miestach. Problematickým sa ukázalo aj korektné zdôvodnenie spájania dvoch poradí do jedného. Za uvedenie správneho riešenia bez komentára ste mohli získať 1 bod.

8. Dokážte, že pre žiadne n prirodzené nie je číslo $n\cdot(n+1)$ druhou mocninou prirodzeného čísla.

Riešenie: Keďže n je prirodzené číslo, platí $n^2 < n^2 + n < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.
Z toho vidíme, že číslo $n\cdot(n+1)$ leží medzi druhými mocninami dvoch za sebou idúcich prirodzených čísel, a teda nemôže byť druhou mocninou prirodzeného čísla.

Komentár (opravoval Martin Hriňák): Veľa riešení využívalo dôkaz sporom, avšak problémy ste mali najmä s negáciou kvantifikátorov, resp. niektorí ste na ne zabudli úplne. Kvantifikátory sú však dôležité, pretože pri ich nesprávnom zvolení ste mali dokázať úplne triviálne tvrdenie. Častou chybou bolo riešenie rovnice $n(n+1)=n^2$ – zabudli ste na to, že druhá mocnina môže byť aj z iného čísla ako *n*. Veľkou skupinou riešení boli pokusy pozrieť sa na rovnicu $n(n+1)=m^2$ ako na kvadratickú rovnicu v premennej *n*. Kľúčovým bodom tu bolo prehlásenie, že táto rovnica má celočíselné korene len vtedy, keď je jej diskriminant druhou mocninou nezáporného celého čísla. Ak ste tento prechod nezdôvodnili, strácali ste 1 bod. Pekné odhady sa dali urobiť aj pomocou AG a GH nerovnosti.

A na záver poznámka pre kolektívneho riešiteľa z GJGT: Výrok „*n* musí byť **N**“ je nesprávny, pretože číslo sa nikdy nemôže rovnať množine, takže do budúcnosti si dávajte pozor na to, od koho odpisujete...

9. Dokážte, že medzi ľubovoľnými deviatimi po sebe nasledujúcimi prirodzenými číslami existuje aspoň jedno číslo, ktoré je s ostatnými nesúdeliteľné.

Riešenie: Dve čísla sú nesúdeliteľné práve vtedy, keď nemajú spoločného deliteľa väčšieho ako 1. Deväť po sebe idúcich čísel si môžeme označiť ako n, $n+1$, ..., $n+8$. Aký spoločný deliteľ môžu mať niektoré dve z týchto čísel? Vieme, že ak nejaké číslo *d* delí čísla *a* aj *b*, tak potom *d* delí aj ich rozdiel $a-b$. Rozdiel ľubovoľných dvoch čísel spomedzi deviatich po sebe idúcich čísel môže byť len číslo z množiny $\{1,2,\ldots,8\}$. Preto len tieto čísla môžu byť spoločnými deliteľmi niektorých čísel spomedzi deviatich po sebe idúcich čísel. Nás však zaujímajú len prvočíselné delitele, a tie môžu byť len 2, 3, 5 a 7.

Máme dve možnosti: Buď je *n* párne, alebo nepárne. Rozoberme postupne obe možnosti:

1. *n* je párne:

Potom sú párne aj čísla $n+2$, $n+4$, $n+6$, $n+8$, čiže ani jedno z nich nemôže byť nesúdeliteľné s ostatnými. Zostali nám čísla $n+1$, $n+3$, $n+5$, $n+7$. Aj teraz máme dve možnosti: Buď je $n+1$ deliteľné tromi, alebo nie je. Ak je $n+1$ deliteľné tromi, tak aj $n+7$ je deliteľné tromi. Zostali nám už len čísla $n+3$ a $n+5$. Z nich je najviac jedno deliteľné piatimi. Zostalo už len jedno číslo, označme ho *x*. Ak je *x* deliteľné siedmimi, tak medzi tými deviatimi číslami už nie je žiadne iné číslo deliteľné siedmimi. Číslo *x* nie je deliteľné 2, 3 ani 5, teda nemôže byť súdeliteľné so žiadnym iným spomedzi tých 9 čísel. Teraz rozoberme možnosť, keď $n+1$ nie je deliteľné tromi. Potom medzi číslami $n+1$, $n+3$, $n+5$, $n+7$ je najviac jedno číslo deliteľné 3, najviac jedno číslo deliteľné 5 a najviac jedno číslo deliteľné 7. Zostane teda jedno číslo, ktoré nie je deliteľné 2, 3, 5 ani 7, teda nemôže byť súdeliteľné so žiadnym iným spomedzi tých 9 čísel.

2. *n* je nepárne:

Potom párne čísla sú $n+1, n+3, n+5, n+7$. Zostalo nám 5 čísel, spomedzi ktorých najviac dve sú deliteľné 3, najviac jedno je deliteľné 5 a najviac jedno je deliteľné 7. Takže zostane aspoň jedno číslo, ktoré nie je deliteľné 2, 3, 5 ani 7. Toto číslo bude nesúdeliteľné so všetkými ostatnými.

Komentár (opravovala Katarína Škrovinová): Body ste strácali najčastejšie za to, že ste nerozobrali všetky možnosti.

10. V triede je 30 žiakov, každému je priradené poradové číslo podľa abecedného zoznamu. Učiteľ vyvoláva žiakov podľa tohto pravidla: sčíta poradové čísla dvoch naposledy vyvolaných žiakov, a ak je súčet väčší ako 30, odčíta 30 od tohto súčtu. Výsledok je poradové číslo žiaka, ktorý je vyvolaný. Dokážte, že nemôžu byť bezprostredne za sebou vyvolaní žiaci Horáček, Šebestová, Mach v tomto poradí.

Riešenie: Dokážme tvrdenie zo zadania sporom. Predpokladajme, že boli bezprostredne za sebou vyvolaní žiaci Horáček, Šebestová, Mach v tomto poradí. Označme si poradové číslo Horáčka *a*, poradové číslo Macha *b* a poradové číslo Šebestovej *c*. Potom musí platiť nerovnosť $1 \le a < b < c \le 30$. Môžu nastať dva prípady:

1. $a + c \le 30$

   Vtedy platí $b = a + c$. Lenže $c > b$, čiže aj $a + c > b$. Dostali sme spor.
2. $a + c > 30$

   Potom $b = a + c - 30$, čiže $b + 30 = a + c$. Lenže $a < b$ a $c < 30$, čiže aj $a + c < b + 30$. Znovu sme dostali spor.

Tým sme tvrdenie zo zadania dokázali.

Komentár (opravovala Katarína Škrovinová): Väčšina z vás nemala s touto úlohou problémy.

11. Je daný pravidelný dvanásťuholník $A_1A_2A_3...A_{11}A_{12}$. Vypočítajte obsah lichobežníka $A_1A_2A_4A_5$, ak viete, že polomer kružnice opísanej tomuto dvanásťuholníku sa rovná 12 cm.

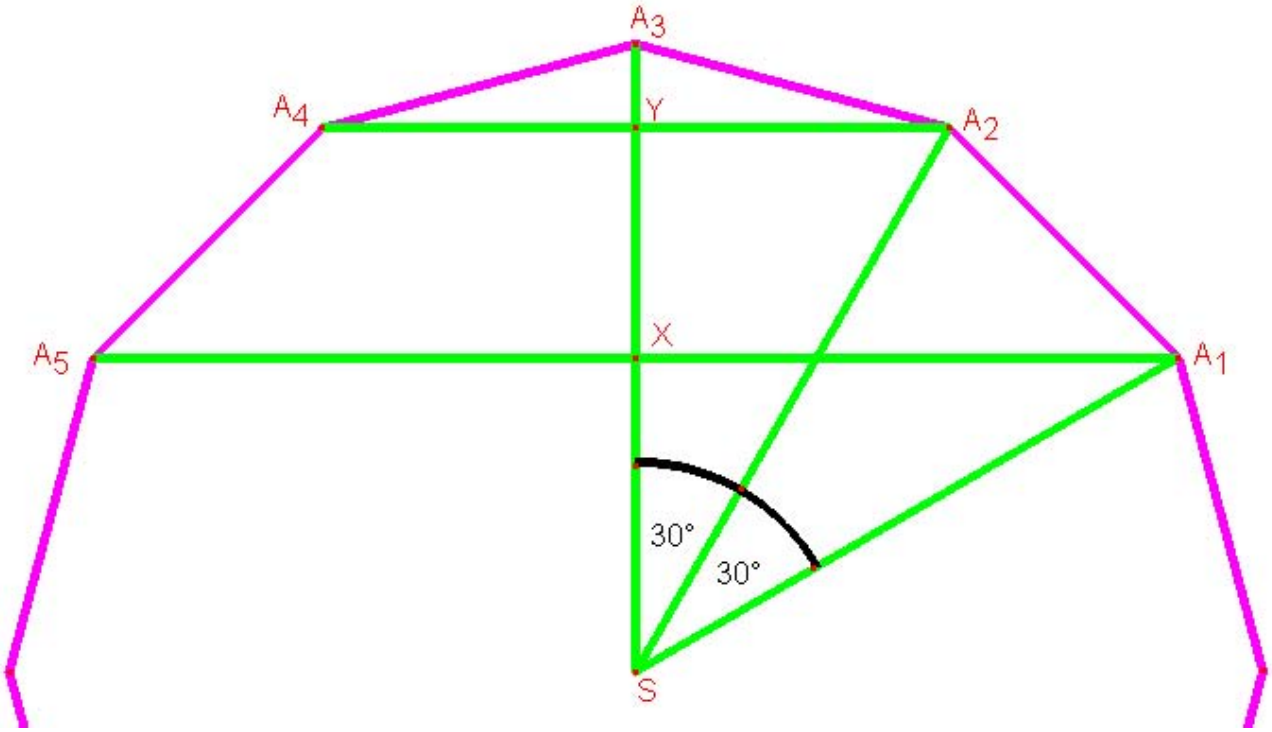
Riešenie: Základom riešenia je dobrý a veľký obrázok. Keďže ide o pravidelný 12-uholník, vieme, že stredový uhol prislúchajúci jednej jeho strane bude $\frac{360°}{12} = 30°$. Vzhľadom na symetriu vieme, že priamka SA_3 je kolmá na priamky A_1A_5 a A_2A_4, teda aj to, že A_1A_5 a A_2A_4 sú rovnobežné. Dá sa to dokázať aj vypočítaním uhla pri vrchole A_1 v trojuholníku SA_1X : Stredový uhol prislúchajúci tetive A_1A_5 je 120°.

Keďže trojuholník SA_1A_5 je rovnoramenný, tak

$$\left|\angle SA_1A_5\right| = \frac{180° - 120°}{2} = 30°.$$

Potom

$$\left|\angle SXA_1\right| = 180° - 60° - 30° = 90°.$$



V pravouhlom trojuholníku SA_1X platí:

$$\left|SX\right| = \left|SA_1\right| \cdot \cos\left|\angle XSA_1\right| = 12 \cdot \cos 60° = 6,$$

$$\left|A_1X\right| = \left|SA_1\right| \cdot \sin\left|\angle XSA_1\right| = 12 \cdot \sin 60° = 6\sqrt{3}.$$

Analogicky dokážeme, že aj trojuholník SA_2Y je pravouhlý. Potom platí:

$$\left|SY\right| = \left|SA_2\right| \cdot \cos\left|\angle YSA_2\right| = 12 \cdot \cos 30° = 6\sqrt{3},$$

$$\left|A_2Y\right| = \left|SA_2\right| \cdot \sin\left|\angle YSA_2\right| = 12 \cdot \sin 30° = 6.$$

Pre obsah lichobežníka $A_1A_2A_4A_5$ dostávame, že platí:

$$S_{A_1A_2A_4A_5} = \frac{\left(\left|A_1A_5\right| + \left|A_2A_4\right|\right) \cdot \left|XY\right|}{2} = \frac{\left(2 \cdot \left|A_1X\right| + 2 \cdot \left|A_2Y\right|\right) \cdot \left(\left|SY\right| - \left|SX\right|\right)}{2} =$$

$$= \left(6\sqrt{3} + 6\right)\left(6\sqrt{3} - 6\right) = 6^2 \cdot 3 - 6^2 = 6^2 \cdot 2 = 72.$$

Hľadaný obsah lichobežníka $A_1A_2A_4A_5$ je preto 72 cm^2.

Komentár (opravoval Martin Hriňák): Body ste strácali za priebežné zaokrúhľovanie a nepresné počítanie – chyby sa postupne naakumulovali a celkový výsledok vám potom vychádzal aj o 0,5 viac či menej.

12. Nech *a*, *b* sú kladné reálne čísla. Dokážte, že rovnica

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+b}=0$$

má dva reálne korene, pričom jeden patrí do intervalu $\left\langle \frac{a}{3},\frac{2a}{3} \right\rangle$ a druhý do intervalu $\left\langle \frac{-2b}{3},-\frac{b}{3} \right\rangle$.

Riešenie: Je zrejmé, že rovnica v zadaní nemá zmysel pre $x \in \{0,a,-b\}$. Predpokladajme preto ďalej, že $x \notin \{0,a,-b\}$. Prenásobením všetkými menovateľmi dostávame kvadratickú rovnicu

$$3x^2+2(b-a)x-ab=0.$$

Jej diskriminant sa rovná $4\left(b^2+ab+a^2\right)$, čo je určite kladné číslo, pretože vieme, že *a*, *b* sú kladné reálne čísla. Preto má táto rovnica dva rôzne reálne korene. Vypočítajme ich:

$$x_1=\frac{a-b+\sqrt{a^2+ab+b^2}}{3},$$

$$x_2=\frac{a-b-\sqrt{a^2+ab+b^2}}{3}.$$

Teraz využijeme, že platia nasledujúce odhady:

$$a^2+ab+b^2<a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$

$$a^2<a^2+ab+b^2,$$

$$b^2<a^2+ab+b^2.$$

Na základe nich dostávame pre x_1 a x_2 tieto odhady:

$$\frac{a}{3}=\frac{a-b+\sqrt{b^2}}{3}<x_1<\frac{a-b+\sqrt{(a+\mathrm{b})^2}}{3}=\frac{2a}{3},$$

$$-\frac{2b}{3}=\frac{a-b-\sqrt{(a+b)^2}}{3}<x_2<\frac{a-b-\sqrt{a^2}}{3}=-\frac{b}{3}.$$

Tým sme dokázali tvrdenie zo zadania (dokonca sme dokázali silnejšie tvrdenie).

Komentár (opravoval Martin Hriňák): Aj keď bol v minulom čísle uverejnený článok o tom, ako máte písať svoje riešenia, väčšina z vás si ho asi neprečítala, a tak pri dôkaze tvrdenia vychádzala z jeho platnosti. No a za takéto pseudodôkazy ste mohli získať maximálne 1 bod.

13. Dĺžky strán trojuholníka tvoria aritmetickú postupnosť s diferenciou d a jeho obsah sa rovná S. Určte dĺžky strán tohto trojuholníka pomocou d a S. Určte tieto strany pre $d = 1$, $S = 6$.

Riešenie: Keďže strany trojuholníka tvoria členy aritmetickej postupnosti, tak ich vieme zapísať ako $a - d$, a, $a + d$. Z Herónovho vzorca pre obsah výpočtu trojuholníka vieme, že

$$S = \sqrt{s(s-(a-d))(s-a)(s-(a+d))},$$

kde s je polovica obvodu trojuholníka, teda

$$s = \frac{(a-d)+a+(a+d)}{3} = \frac{3a}{2}.$$

Po umocnení rovnice a dosadení s dostávame:

$$S^2 = \frac{3a}{2}\left(\frac{a}{2}+d\right)\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}-d\right),$$

po úprave máme:

$$3a^4 - 12d^2a^2 - 16S^2 = 0.$$

Z tejto rovnice chceme vypočítať a. Pre zjednodušenie zavedieme označenie $t = a^2$. Dostávame kvadratickú rovnicu

$$3t^2 - 12d^2t - 16S^2 = 0,$$

korene tejto rovnice sú

$$t_{1,2} = \frac{12d^2 \pm \sqrt{144d^4 + 192S^2}}{6} = \frac{6d^2 \pm 2\sqrt{9d^4 + 12S^2}}{3}$$

Keďže $t = a^2$, tak t musí byť kladné. Platia odhady

$$6d^2 = 2\sqrt{9d^4} < 2\sqrt{9d^4 + 12S^2}.$$

Teda koreň t „s mínusom“ je záporný a nás zaujíma leň koreň

$$a^2 = t = \frac{6d^2 + 2\sqrt{9d^4 + 12S^2}}{3}.$$

Odmocnením dostávame dĺžku jednej strany trojuholníka:

$$a = \sqrt{\frac{6d^2 + 2\sqrt{9d^4 + 12S^2}}{3}}.$$

Dĺžky zvyšných dvoch strán sú:

$$a - d = \sqrt{\frac{6d^2 + 2\sqrt{9d^4 + 12S^2}}{3}} - d,$$

$$a + d = \sqrt{\frac{6d^2 + 2\sqrt{9d^4 + 12S^2}}{3}} + d.$$

Po dosadení hodnôt $d = 1$, $S = 6$ zistíme, že dĺžky strán trojuholníka sú 3, 4 a 5.

Komentár (opravoval Michal Takács): Niektorí z vás nespomenuli, že druhý koreň je záporný, a preto ho nemusíme uvažovať. Toto vás stálo 1 bod.

14. Dokážte, že $\{(m,n)\in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z} : 17 \mid (2m+3n)\} = \{(m,n)\in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z} : 17 \mid (9m+5n)\}$.

Riešenie: Ako sa dá dokázať rovnosť dvoch množín? Napríklad tak, že ukážeme, že prvá množina je podmnožinou druhej množiny a zároveň druhá množina je podmnožinou prvej množiny. Teda treba ukázať, že pre každú dvojicu celých čísel m,n, pre ktorú platí $17 \mid (2m+3n)$, platí aj $17 \mid (9m+5n)$ a aj naopak.

Pre všetky celé čísla *a*, *k* platí, že ak $17 \mid a$, tak $17 \mid k\cdot a$. Preto ak $17 \mid (2m+3n)$, tak $17 \mid 9\cdot(2m+3n)$, čiže $17 \mid (18m+27n)$. Pre všetky celé čísla *a*, *b* platí, že ak $17 \mid a$ a $17 \mid b$, tak $17 \mid (a+b)$. Ďalej platí $17 \mid 17n$. Preto ak $17 \mid (18m+27n)$, tak $17 \mid ((18m+27n)-17n)$, čiže $17 \mid (18m+10n)$, čo je to isté ako $17 \mid 2\cdot(9m+5n)$. Keďže 17 nie je deliteľom čísla 2, tak musí platiť, že $17 \mid (9m+5n)$. Tým sme dokázali jednu implikáciu; ešte potrebujeme dokázať aj implikáciu opačným smerom. Ak $17 \mid (9m+5n)$, tak $17 \mid 2\cdot(9m+5n)$, čiže $17 \mid (18m+10n)$. Potom aj $17 \mid ((18m+10n)+17n)$, teda $17 \mid (18m+27n)$, takže $17 \mid 9\cdot(2m+3n)$. Keďže 17 nie je deliteľom čísla 9, tak musí platiť, že $17 \mid (2m+3n)$. Tým sme dokázali aj opačnú implikáciu, čiže aj tvrdenie zo zadania.

Iné riešenie:
Položme $N = 2m+3n$, $M = 9m+5n$. Ak $17 \mid N$, tak aj $17 \mid (13N - 17(m+2n)) = M$. Na druhej strane, ak $17 \mid M$, tak $17 \mid (4M - 17(2m+n)) = N$, čím sme dokázali tvrdenie zo zadania.

Komentár (opravovala Katarína Škrovinová): Ak ste dokázali len implikáciu jedným smerom, získali ste 3 body. V takom prípade ste dokázali len to, že každá usporiadaná dvojica celých čísel (m,n) patriaca do prvej množiny patrí aj do druhej množiny. Ale nedokázali ste to, že neexistuje žiadna usporiadaná dvojica celých čísel (m,n), ktorá patrí do druhej množiny, ale nepatrí do prvej množiny.

Výsledkové listiny po 1. sérii úloh

Kategória Z

Por.	Priezvisko	Meno	Trieda	Škola	1	2	3	4	M	Spolu
1	Uhlárová	Laura	prima	G Mládežnícka 22, Šahy	5	4	5	4		18
2	Papcúnová	Barbora	8. C	ZŠ Mierová 134, Svit	5	3	5	4		17
2	Peniaško	Filip	IX. A	ZŠ Želiezovce	5	2	5	5		17
4	Hornyáková	Viktória	tercia	G P. Pázmáňa, Nové Zámky	5	3	4	3		15
4	Sirotiar	Matej	IX. A	ZŠ s MŠ Oravské Veselé	5	3	5	2		15
6	Černáková	Barbora	sekunda	G Mládežnícka 22, Šahy	5	1	5	3		14
6	Pavčo	Jakub	kvarta	G A. Vrábla, Levice	4	2	5	3		14
6	Víťazková	Daniela	IX. B	ZŠ Sečovská Polianka	5	2	5	2		14

9	Čierna	Angelika	kvarta	G A. Kmeťa, Banská Štiavnica	5	1	5	2		13
9	Chudá	Fatima	9.	SCŠ Marianum	3	1	5	4		13
9	Jacečko	Michal	8. A	ZŠ Duchnovičova, Medzilaborce	5	1	5	2		13
12	Szabó	Tomáš	IX. A	ZŠ Želiezovce	5	2	2	3		12
13	Beznák	Samuel	9. A	ZŠ s MŠ C1, Dubnica n. Váhom	5	3	0	3		11
13	Sučík	Samuel			5	1	5	0		11
15	Falis	Matúš	kvarta	G A. Vrábla, Levice	5	1	0	4		10
16	Kožehubová	Ivona	7. A	ZŠ E. M. Šoltésovej, Krupina	4	1	3	1		9
17	Dudáková	Zuzana	kvarta	G A. Kmeťa, Banská Štiavnica	5	1	2	0		8
17	Kopálová	Katarína	kvarta	G A. Kmeťa, Banská Štiavnica	2	0	4	2		8
17	Perešíni	Martin	7. D	ZŠ Radvanská, Banská Bystrica	4	0	4	0		8
20	Dolník	Matej	kvarta	G A. Vrábla, Levice	5	2	0	0		7
21	Balogh	Tamás	2. C	G P. Pázmáňa, Nové Zámky	3	0	2	0		5
21	Druska	Juraj	8. A	ZŠ s MŠ Liptovská Teplá	4	1	0	0		5
21	Mózerová	Barbora	kvarta	G A. Kmeťa, Banská Štiavnica	4	1	0	0		5
21	Vitál	Jaroslav	kvarta	G A. Vrábla, Levice	4	1	0	0		5
25	Brandýs	Matúš	8. B	ZŠ s MŠ Oravské Veselé	2	1	0	2	1	4
25	Kiss	Andrej	2. C	G P. Pázmáňa, Nové Zámky	0	1	3	0		4
25	Melošová	Veronika	tercia	G J. Chalupku, Brezno	2	2	0	0		4
25	Petríková	Michaela	VIII.	ZŠ Lehota	2	1	0	1		4
29	Kollárová	Katarína	9.	ZŠ Nesvady	0	2	1	0		3
30	Kordíková	Katarína	kvarta	G A. Kmeťa, Banská Štiavnica	0	1	1	0		2
30	Kubánek	Dominik	VIII. B	ZŠ s MŠ Oravské Veselé	1	1	0	0		2
32	Biela	Dominika	kvarta	G A. Kmeťa, Banská Štiavnica	0	1	0	0		1
32	Bukovcová	Marcela	sekunda	G J. Chalupku, Brezno	0	1	0	0		1
34	Koscelanský	Samuel	tercia	G Snina	0	0	0	0		0
34	Šuľová	Marianna	6.A	ZŠ Postupimská 37, Košice	2	0	0	0	6	0
34	Skrip	Marián	sekunda	G Snina	0	0	0	0		0
34	Šatková	Slávka	7. B	ZŠ Hugolína Gavloviča, Pruské	0	0	0	0		0
34	Zorvan	Peter	kvarta	G A. Kmeťa, Banská Štiavnica	0	0	0	0		0

M označuje meškanie v dňoch.

Kategória C

Por.	Priezvisko	Meno	Škola	3	4	5	6	Spolu
1	Durila	Michal	G Komenského 13, Hlohovec	5	4	5	5	19
2	Kordová	Zuzana	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	5	3	5	5	18
3	Benkö	Henrich	G P. Pázmáňa, Nové Zámky	4	4	5	4	17
4	Žabková	Zuzana	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	5	0	5	5	15
4	Makuch	Matej	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	5	3	5	2	15
4	Búlik	Martin	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	5	3	5	2	15
4	Rešutík	Peter	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	5	3	5	2	15
4	Gazdarica	Matej	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	5	3	5	2	15
4	Fodorová	Jana	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	5	3	5	2	15
10	Maťúšová	Veronika	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	5	0	5	4	14
10	Majláth	Erik	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	5	4	5	0	14
10	Kšenzuliak	Filip	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	5	2	5	2	14
10	Povalová	Radoslava	G A. Bernoláka, Námestovo	5	4	5	0	14
10	Hrubják	Karol	G A. Bernoláka, Námestovo	5	4	5	0	14
10	Oszlík	Alexandra	G P. Pázmáňa, Nové Zámky	3	3	4	4	14
10	Leššová	Lívia	G Párovská 1, Nitra	5	3	3	3	14
10	Štrbová	Silvia	G Párovská 1, Nitra	5	0	5	4	14

18	Jacková	Dominika	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	3	3	5	2	13
18	Sochová	Eva	G A. Bernoláka, Námestovo	5	3	5	0	13
18	Bódiová	Zuzana	G Párovská 1, Nitra	5	0	5	3	13
18	Magyarová	Eva	G Párovská 1, Nitra	5	0	5	3	13
18	Rybár	Andrej	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	5	3	5	0	13
23	Lehotský	Juraj	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	5	3	2	2	12
23	Adler	Filip	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	5	3	4	0	12
23	Lászlóova	Brigita	G Mládežnícka 22, Šahy	5	3	1	3	12
26	Kandra	Jakub	G A. Prídavka, Sabinov	2	3	5	1	11
27	Róžová	Alexandra	G A. Vrábla, Levice	5	3	2	0	10
27	Bakošová	Katarína	G Púchov	5	0	5	0	10
29	Černay	Rastislav	G Komenského 13, Hlohovec	2	3	2	2	9
30	Chomutová	Radka	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	4	0	2	2	8
30	Steuer	Max	G M. R. Štefánika, Šamorín	0	3	5	0	8
32	Banášová	Zuzana	G Komenského 13, Hlohovec	4	0	3	0	7
33	Černák	Adam	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	2	0	2	1	5
33	Gulai	Imrich	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	0	0	5	0	5
33	Leitner	Matej	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	5	0	0	0	5
33	Marochnič	Ján	SOUE Banská Bystrica	5	0	0	0	5
33	Dzúrik	Tomáš	SOUE Banská Bystrica	5	0	0	0	5
33	Chytilová	Daniela	G A. Kmeťa, Banská Štiavnica	0	0	5	0	5
33	Čimová	Veronika	G Párovská 1, Nitra	0	0	5	0	5
40	Černák	Ján	OA Šurany	0	0	4	0	4
40	Janšíkova	Daša	G A. Vrábla, Levice	0	0	4	0	4
40	Jančovičova	Adela	G Párovská 1, Nitra	0	3	1	0	4
43	Kaštan	Marek	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	0	0	3	0	3
43	Budinská	Lucia	G A. Kmeťa, Banská Štiavnica	0	0	3	0	3
45	Budáčová	Lucia	PaSA Turčianske Teplice	0	0	2	0	2
46	Godorová	Alica	G Šurany	0	0	1	0	1
46	Montilla	Elys	G A. Kmeťa, Banská Štiavnica	0	0	1	0	1
46	Talafús	Ľuboš	PaSA Turčianske Teplice	0	0	1	0	1
46	Letrich	Andrej	PaSA Turčianske Teplice	0	0	1	0	1
46	Ševčík	Lukáš	PaSA Turčianske Teplice	0	0	1	0	1

Kategória B

Por.	Priezvisko	Meno	Škola	5	6	7	8	Spolu
1	Sliačanová	Veronika	BSG D. Tatarku, Poprad	5	5	5	5	20
1	Uher	Brian	G Párovská 1, Nitra	5	5	5	5	20
3	Tonhauserová	Ivana	G Párovská 1, Nitra	5	4	5	5	19
3	Sládek	Filip	G A. Bernoláka, Námestovo	5	4	5	5	19
5	Matejovský	Vladimír	G bl. P. P. Gojdiča, Prešov	5	5	4	4	18
5	Čellár	Matúš	G Párovská 1, Nitra	5	5	4	4	18
7	Kontárová	Ildikó	G A. M. Szencziho, Senec	5	5	2	5	17
8	Hornyák	Zsolt	G P. Pázmáňa, Nové Zámky	2	4	5	5	16
9	Chovancová	Katarína	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	5	0	5	4	14
9	Žilka	Patrik	G A. H. Škultétyho, Veľký Krtíš	5	4	5	0	14
11	Benedeková	Martina	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	5	3	5	0	13
11	Kutnár	Marek	G Párovská 1, Nitra	5	5	3	0	13
13	Chrien	Kristián	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	5	2	5	0	12
13	Balogh	Bence	G P. Pázmáňa, Nové Zámky	2	4	1	5	12
15	Kučerová	Monika	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	5	2	4	0	11
15	Vidličková	Eva	G A. Merici, Trnava	5	4	2	0	11
15	Melo	Adrián	G Párovská 1, Nitra	3	5	3	0	11

18	Maláčová	Lýdia	G Párovská 1, Nitra	5	0	5	0	10
18	Prešinský	Ján	G Párovská 1, Nitra	0	5	5	0	10
20	Godová	Lucia	G Komenského 13, Hlohovec	5	4	0	0	9
20	Hriagyelová	Alexandra	G Mládežnícka 22, Šahy	5	1	3	0	9
20	Kotry	Lukáš	G Párovská 1, Nitra	0	5	4	0	9
20	Mitro	Juraj	G J. A. Raymana, Prešov	5	0	0	4	9
20	Svatý	Lukáš	G Párovská 1, Nitra	4	1	4	0	9
25	Piovarči	Tomáš	G Komenského 13, Hlohovec	2	2	3	0	7
26	Mačicová	Veronika	G Komenského 13, Hlohovec	5	0	1	0	6
26	Ifka	Patrik	G Komenského 13, Hlohovec	5	0	1	0	6
28	Bejdová	Vladimíra	G Medzilaborce	5	0	0	0	5
28	Kralovič	Ján	SPŠE Piešťany	5	0	0	0	5
28	Kenkovová	Marieta	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	4	0	1	0	5
28	Múčka	Roman	SPŠE Piešťany	5	0	0	0	5
28	Semancová	Veronika	G bl. P. P. Gojdiča, Prešov	2	0	3	0	5
28	Kovácsová	Mária	G Mládežnícka 22, Šahy	5	0	0	0	5
34	Vajdová	Zlatica	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	4	0	0	0	4
34	Mazúch	Ján	SOUE Banská Bystrica	4	0	0	0	4
34	Lohinská	Jana	G bl. P. P. Gojdiča, Prešov	4	0	0	0	4
34	Balónová	Barbora	G Komenského 13, Hlohovec	4	0	0	0	4
34	Petrán	Štefan	G Komenského 13, Hlohovec	2	0	2	0	4
34	Kollárová	Zuzana	G M. R. Štefánika, Šamorín	4	0	0	0	4
40	Ráciková	Monika	G Komenského 13, Hlohovec	3	0	0	0	3
41	Zbojeková	Natália	G Komenského 13, Hlohovec	1	1	0	0	2
41	Líšková	Monika	G Komenského 13, Hlohovec	2	0	0	0	2
43	Müllerová	Lenka	ZSŠOaS, Nové Mesto nad Váhom	1	0	0	0	1
44	Štefanková	Patrícia	G Medzilaborce	0	0	0	0	0
44	Kramárová	Katarína	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	0	0	0	0	0
44	Múková	Katarína	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	0	0	0	0	0
44	Zábranský	Martin	G Párovská 1, Nitra	0	0	0	0	0

Kategória A

Por.	Priezvisko	Meno	Trieda	Škola	7	8	9	10	Spolu
1	Herencsár	Albert	7. G	G Z. Kodálya, Galanta	5	5	5	5	20
1	Korcsok	Peter	oktáva	G Mládežnícka 22, Šahy	5	5	5	5	20
1	Moravčík	Matej	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	5	5	5	5	20
1	Polačko	Martin	septima A	OG Alejová 1, Košice	5	5	5	5	20
5	Vítek	Radovan	septima	G Párovská 1, Nitra	5	5	3	5	18
6	Boža	Vladimír	4. C	G D. Tatarku, Poprad	5	5	1	5	16
6	Kobza	Vladimír	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	5	5	1	5	16
6	Živčáková	Andrea	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	5	4	2	5	16
9	Gago	Štefan	3. B	G Šurany	5	5	0	5	15
9	Hujer	Peter	septima	G Párovská 1, Nitra	2	5	3	5	15
9	Perešíni	Ondrej	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	5	5	0	5	15
12	Kucbel	Maroš	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	5	4	0	5	14
12	Liščinský	Miroslav	septima B	OG Alejová 1, Košice	5	4	0	5	14
14	Alberty	Roman	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	4	5	0	4	13
14	Cehlárik	Dávid	septima A	G A. Merici, Trnava	5	3	0	5	13
14	Ivanecký	Jakub	septima B	OG Alejová 1, Košice	5	3	0	5	13
14	Plank	Martin	septima A	G A. Merici, Trnava	5	3	0	5	13
18	Vrbovská	Mária	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	5	4	0	3	12
19	Flimmel	Samuel	septima	G Púchov	3	0	3	5	11

20	Jursa	Jakub	septima A	OG Alejová 1, Košice	5	5	0	0	10
20	Majláth	Martin	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	5	0	0	5	10
20	Sliačan	Jakub	5. A	EG Tisovec	5	5	0	0	10
20	Slovík	Lukáš	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	5	0	0	5	10
24	Bukvaj	Ivan	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	4	5	0	0	9
25	Pajkoš	Peter	3. B	G Medzilaborce	4	0	0	3	7
25	Sásková	Jana	septima	G Ľ. Štúra, Trenčín	0	2	0	5	7
27	Blesák	Viktor	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	0	0	0	5	5
27	Kapustová	Katarína	3. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	5	0	0	0	5
27	Konôpková	Júlia	3. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	5	0	0	0	5
27	Kucsera	Viktor	septima	G Mládežnícka 22, Šahy	5	0	0	0	5
27	Szabo	Martin	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	0	0	0	5	5
32	Mazalová	Martina	septima A	G M. R. Štefánika, Šamorín	4	0	0	0	4
32	Zubnárová	Katarína	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	4	0	0	0	4
34	Bratinková	Nikoleta	septima	G Mládežnícka 22, Šahy	3	0	0	0	3
34	Oravcová	Zosia	3. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	0	3	0	0	3
36	Hlavatá	Lucia	septima A	G M. R. Štefánika, Šamorín	2	0	0	0	2
36	Žársky	Mário	septima	G Púchov	2	0	0	0	2
38	Dobrota	Tomáš	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	0	0	0	0	0
38	Dunda	Peter	4. A	G Medzilaborce	0	0	0	0	0
38	Gajdoš	Tomáš	4. A	G Medzilaborce	0	0	0	0	0
38	Mišianiková	Lucia	4. B	CG P. U. Olivu Poprad	0	0	0	0	0
38	Nerer	Juraj	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	0	0	0	0	0
38	Petrík	Martin	4. A	CG P. U. Olivu Poprad	0	0	0	0	0
38	Pitoňáková	Iveta	4. A	CG P. U. Olivu Poprad	0	0	0	0	0
38	Repiščáková	Jana	4. B	CG P. U. Olivu Poprad	0	0	0	0	0
38	Szanislo	Tomáš	3. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	0	0	0	0	0

Kategória π

Por.	Priezvisko	Meno	Trieda	Škola	11	12	13	14	Spolu
1	Boža	Vladimír	4. C	G D. Tatarku, Poprad	5	5	5	5	20
2	Polačko	Martin	septima A	OG Alejová 1, Košice	5	5	5	3	18
2	Szanislo	Tomáš	3. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	5	3	5	5	18
4	Hornyák	Zsolt	sexta C	G P. Pázmáňa, Nové Zámky	5	2	4	3	14
4	Sládek	Filip	sexta B	G A. Bernoláka, Námestovo	5	5	4	0	14
6	Marák	Károly	2. A	G H. Selyeho, Komárno	4	1	3	5	13
7	Kobza	Vladimír	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	5	1	5	0	11
8	Bukvaj	Ivan	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	3	3	0	0	6
9	Ivanecký	Jakub	septima B	OG Alejová 1, Košice	4	0	0	0	4
10	Vrbovská	Mária	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	3	0	0	0	3
10	Rybár	Andrej	1. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	3	0	0	0	3
10	Kapustová	Katarína	3. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	3	0	0	0	3
10	Konôpková	Júlia	3. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	3	0	0	0	3
10	Alberty	Roman	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	2	1	0	0	3
15	Zubnárová	Katarína	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	0	0	1	0	1
16	Blesák	Viktor	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	0	0	0	0	0

Zadania 2. série úloh korešpondenčnej súťaže v školskom roku 2007/2008

1. Šejk prišiel do hotela, kde dostal izbu označenú dvojmiestnym číslom. Všimol si, že toto číslo je rozdielom štvorcov dvoch cifier, z ktorých menšia je dvojnásobkom cifry označujúcej počet jednotiek v čísle izby. Zistite, aké číslo mohla mať izba.

2. Vandal vytrhol z knihy jednu stránku. Súčet čísel strán na zvyšných stranách sa rovná 22 000. Koľko strán mala pôvodne kniha a ktorú stránku vandal vytrhol?

3. Dvaja obchodníci prišli k bráne Paríža. Jeden mal 64 a druhý 20 okovov vína. Nemali však dosť peňazí na vyplatenie cla. Chýbajúce peniaze nahradili vínom. Prvý platil 40 frankov a ešte 5 okovov vína. Druhý dal 2 okovy vína a dostal naspäť 40 frankov. Koľko stál jeden okov vína a aké bolo clo zaň? Aké by platili clo a koľko by stál jeden okov vína, ak nemuseli platiť clo za víno, ktorým zaplatili clo?

4. Uvažujte štvorciferné číslo. Premiestnite prvú číslicu zľava na koniec čísla. Toto štvorciferné číslo sčítajte s pôvodným číslom. Zistite, aké čísla si mohli myslieť Peter, Petra, Pavol a Pavla, ak im vyšli čísla 8 612, 4 322, 9 493 a 13 859 v tomto poradí.

5. Dokážte, že pre $k < 0$ má rovnica $x - 1 = kx^2$ reálny koreň z intervalu $(0,1)$.

6. Chodec vybehol po schodoch stúpajúceho eskalátora (pohyblivých schodoch) do výšky 10 m a späť za 73 sekúnd. Druhýkrát urobil to isté na rovnakom, ale klesajúcom eskalátore za 4 minúty a 22 sekúnd. Vypočítajte rýchlosť stúpania eskalátora, ak viete, že chodec zbehol dole o 35 % rýchlejšie, ako vybehol hore. Výsledok uveďte v cm/s s presnosťou na dve platné číslice.

7. Nájdite všetky prirodzené čísla *n* s vlastnosťou, že niekoľko prvých cifier čísla n^2 tvorí číslo *n*.

8. Dokážte, že funkcia $\rho(x, y): \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, kde $x = (x_1, x_2)$ a $y = (y_1, y_2)$, definovaná predpisom

$$\rho(x, y) = \left(\sqrt{|x_1 - y_1|} + \sqrt{|x_2 - y_2|}\right)^2$$

spĺňa tzv. trojuholníkovú nerovnosť, t. j. pre všetky $x, y, z \in \mathbf{R}^2$ platí

$$\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z).$$

9. Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla k platí

$$\prod_{n=2}^{k} \frac{n^3-1}{n^3+1} > \frac{2}{3}.$$

10. Rozdeľte pravidelný šesťuholník piatimi priamymi rezmi tak, aby sa z jeho častí dal zostaviť rovnostranný trojuholník.

11. Dokážte, že pre všetky kladné x, y, z platí

$$x+y+z \le 2\left(\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{y+x}\right).$$

12. Majme danú priamku p. Označme na nej žltou farbou všetky tie body, ktoré zodpovedajú číslam tvaru $81x+100y$, kde x a y sú prirodzené čísla. Body na priamke zodpovedajúce ostatným celým číslam označme oranžovou farbou. Zistite, či existuje na priamke taký bod, vzhľadom na ktorý ľubovoľná symetrická dvojica bodov zodpovedajúcich celým číslam je zafarbená rôznymi farbami.

13. Nájdite súčet

$$\sum_{i=0}^{101} \frac{x_i^3}{1-3x_i+3x_i^2},$$

ak $x_i = \dfrac{i}{101}$ pre všetky i.

14. Dokážte, že platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 2^k} \le \pi \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Termín odoslania riešení úloh 2. série: do 14. 12. 2007.

Riešenia zasielajte na adresu:

Metodicko-pedagogické centrum
MATMIX
Ing. Mgr. Martin Hriňák
Tomášikova 4
P. O. BOX 14
820 09 Bratislava 29

MINIMIX – príloha pre žiakov 1. stupňa ZŠ

Pred riešeniami súťažných úloh 1. kola by som chcela poďakovať všetkým riešiteľom za poslané riešenia. Viaceré riešenia úloh boli pekne „okomentované“ – postup riešenia úlohy bol vyznačený aj farebne. Tí, ktorí nenapísali, prečo úlohu riešili „tak a nie inak“, mohli získať len polovičný počet bodov. Ak chýbala odpoveď, získali o bod menej. Dúfam, že vás menší počet bodov neodradí od riešenia úloh 2. kola.

Viera Kolbaská

Riešenia súťažných úloh 1. kola

1. Aká číslica môže byť namiesto písmena *a*?

$$\begin{array}{r} 8\ *\ 0\ 6 \\ \times \qquad\quad * \\ \hline a\ 4\ 7\ 5\ 4 \end{array}$$

Poznámka: Znak x je znakom násobenia.

Riešenie: Riešenie začíname od zisťovania, aké číslice môžu byť namiesto hviezdičiek *. Začíname od hviezdičky v druhom riadku. Hviezdička vynásobená číslom 6 má dať číslo, ktoré sa končí číslicou 4. Násobky čísla 6 jednociferným číslom, ktoré sa končia číslicou 4, sú 24, 54 a 84. V úlohe je v súčine na mieste desiatok a jednotiek 54, takže vhodnou číslicou bude číslica 9 (6 . 9 = 54), pretože na mieste desiatok v čísle na prvom riadku je 0. Máme

$$\begin{array}{r} 8\ *\ \mathbf{0}\ \mathbf{6} \\ \times \qquad\quad \mathbf{9} \\ \hline a\ 4\ 7\ \mathbf{5}\ \mathbf{4} \end{array}$$

Výsledkom súčinu čísla 9 a hviezdičky z prvého riadka má byť číslo, ktoré sa končí číslicou 7. Násobok čísla 9 jednociferným číslom, ktorý sa končí číslicou 7, je len 27. Namiesto hviezdičky v prvom riadku bude teda číslica 3 (3 . 9 = 27).
Máme

$$\begin{array}{r} 8\ \mathbf{3}\ \mathbf{0}\ \mathbf{6} \\ \times \qquad\quad \mathbf{9} \\ \hline a\ 4\ 7\ \mathbf{5}\ \mathbf{4} \end{array}$$

Po vynásobení čísla 8 306 číslom 9 získame číslo 74 754, teda a = 7. **Namiesto písmena *a* má byť číslica 7.**

Komentár: Väčšina z vás nenapísala, ako úlohu riešila, napísala len odpoveď a výsledok násobenia. Za úlohu „bez komentára“ sa dal získať len polovičný počet bodov.

2. Helenka dostala o 4 čokolády menej ako jej kamarátka Janka, ktorá dostala dvakrát viac ako Anka. Anka dostala 5 čokolád. Koľko čokolád dostala každá kamarátka?

Riešenie: Úlohu začneme riešiť „ako rak“, lebo o Anke vieme presne, koľko dostala čokolád. Dostala ich 5. Janka dostala dvakrát viac ako ona, čo je 2 . 5 = 10 čokolád. Helenka dostala o 4 čokolády menej ako Janka, čo je 10 – 4 = 6 čokolád.
Anka dostala 5 čokolád, Janka 10 čokolád a Hanka 6 čokolád.

Komentár: Úlohu ste riešili aj pomocou rovníc:

$$H = J - 4$$
$$J = 2 . A$$
$$A = 5$$

Potom

$$H = 2 . A - 4 = 2 . 5 - 4 = 6$$
$$J = 2 . A = 2 . 5 = 10$$

3. Po vynásobení čísla 30 neznámym číslom dostanem výsledok, ktorý je o 100 väčší ako desaťnásobok čísla 5. Aké bolo neznáme číslo?

Riešenie: Táto úloha sa najlepšie rieši pomocou rovnice. Neznáme číslo si označíme pomocou x. Potom číslo 30 vynásobené neznámym číslom sa dá zapísať ako $30x$.
Desaťnásobok čísla 5 sa rovná 10 . 5 = 50. Potom

$$30 . x = 50 + 100$$
$$30 . x = 150$$
$$x = 150 : 30$$
$$x = 5$$

Ak riešime úlohu rovnicou, musíme robiť aj skúšku: 30 . 5 = 150 a 50 + 100 = 150.
Neznáme číslo je číslo 5.

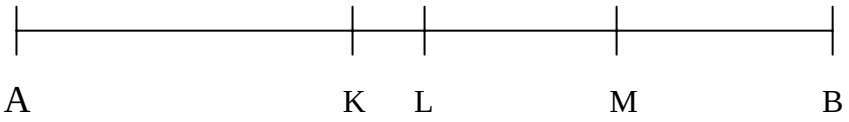
Komentár: Úlohu ste riešili aj jednoduchou úvahou tak, že ste si najprv vypočítali „výsledok“ – hodnotu päťnásobku čísla 10 zväčšeného o 100 (5 . 10 + 100 = 150), a potom ste výsledok vydelili číslom 30 (150 : 30 = 5). Niektorí z vás použili pri riešení úlohy zápis 5 . 10 = 50 + 100 = 150 : 30 = 5. Aj keď sa používa, nie je správny a bez komentára sa dá získať len polovičný počet bodov.

Súťažné úlohy 2. kola

1. Dedko Jedlička mal v novembri narodeniny. Prišli mu gratulovať všetky jeho vnúčatá. Pokúste sa zistiť, v akom poradí mu gratulovali, ak viete, že Janko negratuloval prvý, Danka gratulovala hneď po Helenke, Miško nebol posledný a Ferko gratuloval hneď po Danke.

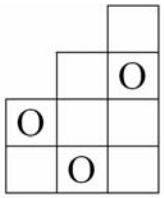
2. Janko sa jedného dňa rozhodol, že pôjde navštíviť svojho nového kamaráta. Janko býval v meste A, kamarát v meste B. Janko si vzal bicykel a vydal sa na cestu (obrázok 1). Orientačná tabuľa v jeho meste ukazovala, že do mesta M je 25 km.

V meste K tabuľa informovala, že do M je 13 km, a v meste L bolo na tabuli, že do M je 8 km a do B je 15 km. Aká je vzdialenosť z A do B? A aké sú vzdialenosti medzi jednotlivými mestečkami?



Obrázok 1

3. Na obrázku 2 je hracia doska. Treba na ňu umiestniť tri figúrky tak, aby v každom stĺpci bola práve jedna figúrka a aby v jednom riadku neboli dve figúrky. Koľko je možných rozmiestnení, ktoré spĺňajú tieto dve podmienky? Jedno zo správnych rozmiestnení uvádzame na obrázku 2.



Obrázok 2

Termín odoslania riešení úloh 2. série: do 17. 12. 2007.

Svoje riešenia zasielajte na adresu:

Metodicko-pedagogické centrum
MINIMIX – RNDr. Viera Kolbaská
Tomášikova 4
P. O. BOX 14
820 09 Bratislava 29

Výsledková listina po 1. sérii úloh – MINIMIX

Poradie	Priezvisko, meno	Škola	Trieda	1.	2.	3.	Spolu
1	Druska Róbert	ZŠ s MŠ Liptovská Teplá	4. B	10	10	10	30
2	Sládek Samuel	CZŠ sv. Gorazda Námestovo	4. A	10	10	10	30
3	Hanzely Slavomír	ZŠ Ul. 17. novembra, Sabinov	4. B	10	10	10	30
4	Baráth Boris	ZŠ Pohraničná ul., Komárno	4. N	10	10	10	30
5	Liga Jozef	ZŠ Mierová 134, Svit	2. A	10	10	10	30
6	Runák Róbert	ZŠ Pionierska 4, Šaľa	4. A	10	10	10	30
7	Monček Andrej	ZŠ Ul. mieru 134, Svit	4. A	10	10	10	30
8	Kurňavová Kristína	ZŠ Pionierska 4, Šaľa		10	10	10	30
9	Sihlovec Filip	ZŠ s MŠ Ul. sv. Gorazda 1, Žilina	4. C	10	10	10	30
10	Lancová Katka	ZŠ s MŠ Ul. sv. Gorazda 1, Žilina	4. B	10	10	10	30
11	Mihalíková Dáša	ZŠ s MŠ Ul. sv. Gorazda 1, Žilina	4. A	10	10	10	30
12	Sládeček Michal	ZŠ s MŠ Ul. sv. Gorazda 1, Žilina	4. B	10	10	10	30
13	Kormančík Ondrej	ZŠ s MŠ Ul. sv. Gorazda 1, Žilina	4. A	5	10	10	30
14	Šnapko Milan	ZŠ s MŠ Ul. sv. Gorazda 1, Žilina	4. B	10	10	10	30
15	Ondková Nina	ZŠ s MŠ Ul. sv. Gorazda 1, Žilina	4. A	10	10	10	30
16	Líšková Adriana	ZŠ s MŠ Ul. sv. Gorazda 1, Žilina	4. B	10	10	10	30
17	Jefimová Zinaida	ZŠ s MŠ Ul. sv. Gorazda 1, Žilina	4. B	10	10	10	30
18	Komová Andrea	ZŠ s MŠ Ul. sv. Gorazda 1, Žilina	4. B	10	10	10	30
19	Lukáč Michal	ZŠ Krosnianska 4, Košice	3. A	10	10	10	30
20	Örhalmi Max	ZŠ Krosnianska 4, Košice	3. A	10	10	10	30
21	Tóth Tomáš	ZŠ Krosnianska 4, Košice	3. A	10	10	10	30
22	Čulen Peter	ZŠ Krosnianska 4, Košice	3. A	10	10	10	30
23	Masrna Martin	ZŠ Krosnianska 4, Košice	3. B	10	10	10	30
24	Fačko Peter	ZŠ Krosnianska 4, Košice	3. B	10	10	10	30
25	Dubinský Matej	ZŠ Krosnianska 4, Košice	3. A	10	10	10	30

26	Fenčáková Viktória	ZŠ Krosnianska 4, Košice	3. A	10	10	10	30
27	Rajtáková´Roxana	ZŠ Krosnianska 4, Košice	3. A	10	10	10	30
28	Nadzamová Zuzana	ZŠ Krosnianska 4, Košice	3. B	10	10	10	30
29	Seman Martin	ZŠ Krosnianska 4, Košice	3. B	10	10	10	30
30	Jursa Juraj	ZŠ Krosnianska 4, Košice	3. B	10	10	10	30
31	Garlík Richard	ZŠ Krosnianska 4, Košice	4. A	10	10	10	30
32	Koľ Daniel	ZŠ Krosnianska 4, Košice	4. A	10	10	10	30
33	Perešová Lucia	ZŠ Krosnianska 4, Košice	4. A	10	10	10	30
34	Poláček Peter	ZŠ Krosnianska 4, Košice	4. A	10	10	10	30
35	Vaca Franklin Velásquez	ZŠ Krosnianska 4, Košice	4. A	10	10	10	30
36	Vaňo Peter	ZŠ Krosnianska 4, Košice	4. A	10	10	10	30
37	Dzureň Matúš	ZŠ Krosnianska 4, Košice	4. A	10	10	10	30
38	Kurucz Samuel	ZŠ Krosnianska 4, Košice	4. A	10	10	10	30
39	Ivašková Alžbeta	ZŠ Krosnianska 4, Košice	4. B	10	10	10	30
40	Mičko Juraj	ZŠ Krosnianska 4, Košice	4. B	10	10	10	30
41	Skybjak Adam	ZŠ Krosnianska 4, Košice	4. B	10	10	10	30
42	Bernasovská Ivana	ZŠ Krosnianska 4, Košice	4. B	10	10	10	30
43	Horváthová Martina	ZŠ Krosnianska 4, Košice	4. B	10	10	10	30
44	Genči Jakub	ZŠ Krosnianska 4, Košice	4. A	10	10	10	30
45	Sivák Ivan	ZŠ Krosnianska 4, Košice	4. A	10	9	10	29
46	Schmidtová Veronika	ZŠ Krosnianska 4, Košice	4. B	8	10	10	28
47	Horovský Roderik	ZŠ Krosnianska 4, Košice	4. B	8	10	10	28
48	Gaľová Zuzana	ZŠ Krosnianska 4, Košice	3. B	9	8	10	27
49	Brandeburová Karin	ZŠ Krosnianska 4 Košice	4. B	8	9	10	27
50	Štěpánek Michal	ZŠ Krosnianska 4 Košice	4. B	8	10	8	26
51	Mikušová Nikola	ZŠ Ul. Obrancov mieru, Detva	4. A	10	5	10	25
52	Maťo H.	ZŠ Nižná brána, Kežmarok	4. A	5	10	10	25
53	Čerhák Radoslav	ZŠ Pionierska 4, Šaľa		5	10	10	25
54	Sádovská Terézia	ZŠ Pionierska 4, Šaľa	4. C	5	10	10	25
55	Hollá Tereza	ZŠ Pionierska 4, Šaľa		5	10	10	25
56	Kováčová Klaudia	ZŠ Pionierska 4, Šaľa	4. A	5	10	10	25
57	Piala Martin	ZŠ s MŠ Ul. sv. Gorazda 1, Žilina	4. A	5	10	10	25
58	Súkeník Peter	ZŠ s MŠ Ul. sv. Gorazda 1, Žilina	4. B	5	10	10	25
59	Kocián Boris	ZŠ s MŠ Ul. sv. Gorazda 1, Žilina	4. B	10	10	5	25
60	Debnárová Terézia	ZŠ s MŠ Ul. sv. Gorazda 1, Žilina	4. A	5	10	10	25
61	Kunc Jozef	ZŠ Krosnianska 4, Košice	4. B	5	10	10	25
62	Mach Jakub	ZŠ Krosnianska 4, Košice	4. B	5	10	10	25
63	Oswald Samuel	ZŠ Krosnianska 4, Košice	4. B	5	10	10	25
64	Silvo	ZŠ Nižná brána, Kežmarok	4. A	5	10	9	24
65	Glodžák Štefan	ZŠ Nižná brána, Kežmarok	4. A	5	10	9	24
66	Goldiňáková Veronika	ZŠ Nižná brána, Kežmarok	4. A	5	10	9	24
67	Pisoňová Dominika	ZŠ Nižná brána, Kežmarok	4. A	5	10	9	24
68	Kredatusová Klárka	ZŠ Nižná brána, Kežmarok	4. A	5	10	9	24
69	Tomala Michal	ZŠ Nižná brána, Kežmarok	4. A	5	10	9	24
70	Marhefka Martinko	ZŠ Nižná brána, Kežmarok	4. A	5	10	9	24
71	Stranianeková Simona	ZŠ s MŠ Ul. sv. Gorazda 1, Žilina	4. B	4	10	10	24
72	Brix Stela	ZŠ Krosnianska 4, Košice	4. A	10	10	4	24
73	Kyjovský Matej	ZŠ Krosnianska 4, Košice	4. A	4	10	10	24
74	Kuna Peter	ZŠ Tríbečská, Topoľčany	4. B	4	10	9	23
75	Huťková Júlia	ZŠ Nižná brána, Kežmarok	4. A	5	10	5	20
76	Cisko Matej	ZŠ Nižná brána, Kežmarok	4. A	5	10	5	20
77	Kristan Simon	ZŠ Nižná brána, Kežmarok	4. A	5	10	5	20
78	Szucs Samuel	ZŠ Nižná brána, Kežmarok	4. A	5	5	9	19
79	Borik Matús	ZŠ s MŠ Ul. sv. Gorazda 1, Žilina	4. A	5	2	10	17
80	Olejník Filip	ZŠ s MŠ Ul. sv. Gorazda 1, Žilina	4. B	5	2	10	17
81	Žáčiková Erika	ZŠ Nižná brána, Kežmarok	4. A	5	10	0	15
82	Gullyová Zuzana	ZŠ Nižná brána, Kežmarok	4. A	5	5	5	15
83	Hvizdáková Kristína	ZŠ s MŠ Ul. sv. Gorazda 1, Žilina	4. B	5	10	0	15
84	Martančík Boris	ZŠ Nižná brána, Kežmarok	4. A	5	0	9	14
85	Plevková Michaela	ZŠ Pionierska 4, Šaľa	4. C	5	0	5	10

O b s a h

Redakčná pošta ..... 2. strana obálky
Dušan Jedinák: Mikuláš z Oresme – mních bádajúci aj v matematike..... 1
Korešpondenčná súťaž v školskom roku 2007/2008 4
Riešenia 1. série úloh 4
Výsledkové listiny po 1. sérii úloh – kategória Z 15
Výsledkové listiny po 1. sérii úloh – kategória C 16
Výsledkové listiny po 1. sérii úloh – kategória B 17
Výsledkové listiny po 1. sérii úloh – kategória A 18
Výsledkové listiny po 1. sérii úloh – kategória π 19
Zadania 2. série úloh korešpondenčnej súťaže v školskom roku 2007/2008 20
MINIMIX – príloha pre žiakov 1. stupňa ZŠ 22
Riešenia súťažných úloh 1. kola 22
Súťažné úlohy 2. kola 23
Výsledková listina po 1. sérii úloh – MINIMIX 24

MATMIX – matematický časopis pre žiakov základných a stredných škôl, vydáva Metodicko-pedagogické centrum v Bratislave na Tomášikovej ulici s finančnou podporou Európskeho sociálneho fondu ako pomocnú literatúru pre PK matematiky a pre žiakov so záujmom o matematiku.

Šéfredaktor: Ing. Mgr. Martin Hriňák
Redakcia: PhDr. Soňa Hronská, RNDr. Viera Kolbaská
Tlač a väzba: Eduard Rác
Vydavateľ: Metodicko-pedagogické centrum v Bratislave, Tomášikova 4, P. O. BOX 14, 820 09 Bratislava 29
Adresa redakcie: Metodicko-pedagogické centrum, MATMIX, Tomášikova 4, P. O. BOX 14, 820 09 Bratislava 29
Telefóny: 02/ 48 20 94 32, 43 42 22 53, 43 42 57 90 **Fax:** 02/ 43 33 59 46
E-mail: hrinak@matmix.sk
Webová stránka: www.matmix.sk
Registračné číslo MK SR: 3449/2005
ISSN: 1336-7854
Náklad: 1500 ks. Vychádza 4-krát ročne.