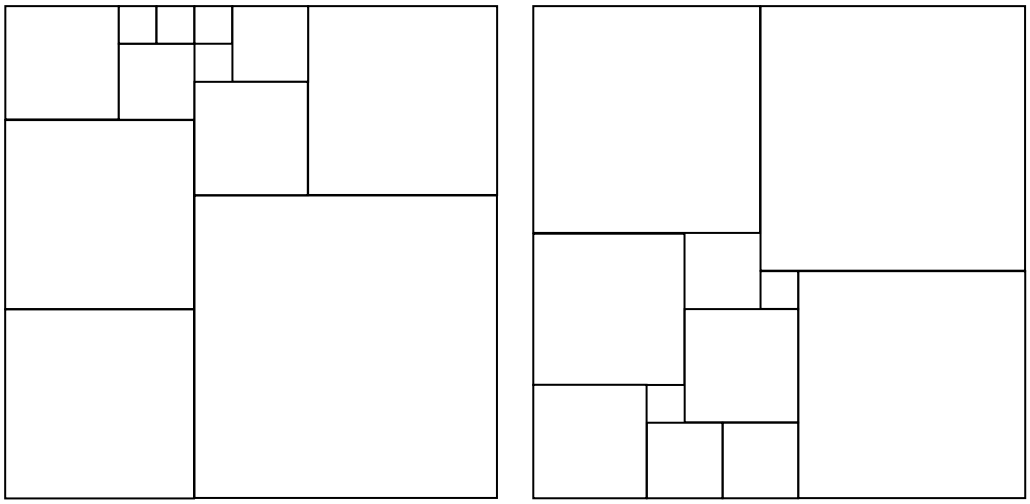
# Riešenia úloh 3. série korešpondenčnej súťaže v školskom roku 2006/2007

**1.** Rozdeľte štvorec $13 \times 13$ na 11 a 12 menších štvorcov s celočíselnými dĺžkami strán.

**Riešenie:** Jedno z možných riešení úlohy je na obrázkoch: vľavo je rozdelenie štvorca na 12 a vpravo na 11 menších štvorcov. Na oboch obrázkoch má najmenší použitý štvorec rozmery $1 \times 1$.



**Komentár** (opravoval Martin Hriňák): Za rozdelenie štvorca na 12 menších štvorcov ste mohli získať 2 body a za rozdelenie na 11 štvorcov 3 body. Prvú časť zvládla väčšina z vás bez problémov, avšak rozdeliť štvorec na 11 štvorcov vás už dokázalo oveľa menej. Niektoré chybné riešenia spočívali na predpoklade, že štvorce musia byť rovnaké, avšak toto tvrdenie sa v zadaní nenachádzalo.

**2.** Peter prešiel autom tretinu cesty, keď mu došiel benzín. Zvyšok cesty musel ísť pešo. Čas, za ktorý prešiel cestu, ktorú šiel pešo, bol dvadsaťkrát dlhší než čas, počas ktorého šiel autom. Koľkokrát rýchlejšie šiel Peter autom než pešo?

**Riešenie:** Peter išiel tretinu cesty autom a zvyšok cesty, čiže dve tretiny, pešo. To znamená, že pešo išiel dvakrát dlhší úsek cesty ako autom. To mu trvalo 20-krát dlhšie ako cesta autom. Teda prejsť jednu tretinu celej cesty pešo mu trvalo 10-krát dlhšie ako úsek rovnakej dĺžky autom. Z toho vyplýva, že Peter šiel autom 10-krát rýchlejšie ako pešo.

**Komentár** (opravovala Katarína Škrovinová): Úloha väčšine z vás nerobila problémy. Niektorým chýbal slovný komentár k úlohe alebo odpoveď na otázku zo zadania. Keď si zvolíte nejaké premenné, mali by ste napísať, ktorá čo znamená, ešte predtým, ako ich začnete používať.

**3.** Na stole leží 11 kartičiek, na ktorých sú všetky prirodzené čísla od 1 do 11. Gustáv si vybral jednu kartičku a svojim kamarátom povedal, že ak by vynásobili počet kartičiek, na ktorých sú menšie čísla ako jeho číslo, počtom kartičiek, na ktorých sú čísla väčšie ako jeho číslo, dostali by rovnaký výsledok, ako keby mal číslo o 2 väčšie. Aké číslo bolo na Gustávovej kartičke?

**Riešenie:** Označme písmenom $x$ kartičku, ktorú si Gustáv vybral. Počet kartičiek, na ktorých sú menšie čísla ako jeho číslo, je $x-1$. Počet kartičiek, na ktorých sú čísla väčšie, je $11-x$. Preto sa hodnota súčinu týchto dvoch čísel rovná

$$(x-1)(11-x)=-x^2+12x-11.$$

Ak by sme zopakovali to isté pre kartičku s číslom o 2 väčším, dostali by sme súčin

$$(x+2-1)(11-(x+2))=-x^2+8x+9.$$

Preto musí platiť

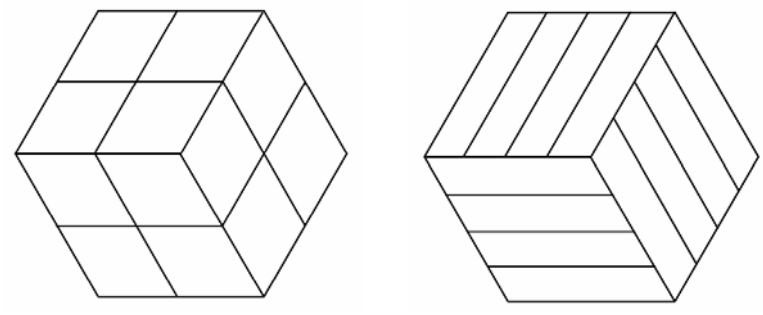
$$-x^2+12x-11=-x^2+8x+9.$$

Po úprave dostaneme lineárnu rovnicu $4x=20$, ktorá má jediné riešenie $x=5$. Skúškou sa môžeme presvedčiť, že toto riešenie naozaj vyhovuje.

**Komentár** (opravoval Martin Hriňák): Inou možnosťou riešenia tejto úlohy bolo preskúšanie všetkých možných čísel na kartičkách.

**4.** Zistite, či sa dá pravidelný šesťuholník rozdeliť na 12 zhodných štvoruholníkov.

**Riešenie:** Úloha má viacero riešení, napr.:



**Komentár** (opravoval Martin Hriňák): Body ste strácali hlavne vtedy, keď ste nedokázali, že časti, na ktoré ste šesťuholník rozdelili, sú zhodné. Za nájdenie správneho riešenia ste mohli získať 2 body. Zvyšné tri body boli za to, ako ste zdôvodnili, že sú tieto časti zhodné.

**5.** Nájdite najmenšiu hodnotu výrazu

$$|x-p|+|x-15|+|x-p-15|,$$

ak viete, že platí $p \le x \le 15$, $0 < p < 15$.

**Riešenie:** Hodilo by sa nám, keby sme sa zbavili absolútnych hodnôt. Ak je výraz v absolútnej hodnote nezáporný, tak absolútnu hodnotu si môžeme „odmysliet“. Naopak, ak je výraz záporný, tak absolútnu hodnotu odstránime, ale pôvodný výraz zmeníme na opačný. Z podmienok v zadaní vieme, že platí $x \ge p$, teda $x-p \ge 0$, čiže platí

$$|x-p| = (x-p).$$

Ďalej platí $x \le 15$, teda $x-15 \le 0$, čiže platí:

$$|x-15| = -(x-15).$$

Od nerovnice $x \le 15$ odpočítame od oboch strán $p$ a dostaneme, že platí

$$x-p \le 15-p.$$

Keďže $p > 0$, tak $15-p < 15$. Celkovo dostávame $x-p < 15$, teda

$$x-p-15 < 0,$$

čiže platí:

$$|x-p-15| = -(x-p-15).$$

Výraz zo zadania vieme napísať takto:

$$(x-p)-(x-15)-(x-p-15) = 30-x.$$

Výraz $30-x$ nadobúda najmenšiu hodnotu, keď je $x$ najväčšie. Preto minimálna hodnota výrazu je pre $x = 15$ a $p$ ľubovoľné. Minimálna hodnota výrazu je 15.

**Komentár** (opravoval Michal Takács): Väčšina z vás úlohu úspešne vyriešila. Body ste mohli stratiť napríklad za to, keď ste uvažovali, že $x$, $p$ sú celé čísla. Riešenia, ktoré sa zakladali na nesprávnej úvahe, boli ohodnotené 1 bodom v prípade, ak bol výsledok správny.

**6.** Dokážte, že ak máme zadaných 9 mrežových bodov v priestore, potom existujú aspoň dva z nich také, že aj stred úsečky nimi určenej je mrežový bod.

**Riešenie:** Mrežový bod v priestore je jednoznačne určený svojimi tromi súradnicami. Každá z nich je buď párna, alebo nepárna. To znamená, že celkovo máme $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ možností, aké môže mať bod súradnice z hľadiska ich parity. Keďže máme bodov 9, na základe Dirichletovho princípu aspoň dva z nich budú rovnakého typu, teda budú mať rovnakú paritu zodpovedajúcich si súradníc. Potom stred úsečky nimi určenej je mrežovým bodom, pretože ak sú obe súradnice párne, napr. $2k$ a $2l$, kde $k$ a $l$ sú celé čísla, potom stred úsečky nimi určenej má zodpovedajúcu súradnicu $k+l$, čo je celé číslo. Ak by boli zodpovedajúce súradnice nepárne, teda napr. $2k+1$ a $2l+1$, kde $k$ a $l$ sú celé čísla, potom stred úsečky nimi určenej má zodpovedajúcu súradnicu $k+l+1$, čo je opäť celé číslo.

**Komentár** (opravoval Martin Hriňák): Väčšina z vás použila práve Dirichletov princíp, ale našli sa aj riešenia, ktoré ho použili v skrytej podobe.

**7.** Daných je $k$ čísel napísaných v riadku. Dokážte, že vždy sa dá nájsť niekoľko čísel idúcich za sebou, ktorých súčet je deliteľný číslom $k$.

**Riešenie:** Uvažujme čísla $a_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, ktoré dostaneme ako súčet prvých $i$ čísel v riadku. Dostali sme $k$ čísel. Z hľadiska deliteľnosti číslom $k$ môžeme dostať len $k$ rôznych zvyškov. Ak je jeden z nich 0, napr. $a_j = 0$, našli sme hľadané čísla – je to prvých $j$ čísel v riadku. Ak sa medzi zvyškami číslo 0 nenachádza, na základe Dirichletovho princípu sa tam nachádzajú dva rovnaké zvyšky, napr. $a_j$ a $a_l$, pričom $j < l$. Potom sú hľadanými číslami čísla, ktoré sú na $(j+1)$-vom až $l$-tom mieste v riadku, pretože ich súčet dáva po delení číslom $k$ zvyšok 0.

**Komentár** (opravoval Martin Hriňák): Úloha bola trochu náročnejšia na uvažovanie. Mnohí z vás sa odvolávali na to, že v zadaní nebolo napísané, o aké čísla ide. Avšak akonáhle sa začne hovoriť o deliteľnosti, je zrejmé, že sa úvahy vzťahujú len na čísla celé či prirodzené.

**8.** Nájdite najmenšie prirodzené číslo *n*, pre ktoré vieme nájsť 15 rôznych prvkov $a_1$, $a_2$,… , $a_{15}$ množiny $\{16, 17, \ldots, n\}$ takých, že $a_k$ je deliteľné číslom *k* pre $k = 1, 2, \ldots, 15$.

**Riešenie:** Aby sme vôbec mohli vybrať 15 rôznych prvkov z množiny $\{16, 17, \ldots, n\}$, tak táto množina musí mať aspoň 15 prvkov, čiže *n* musí byť aspoň 30. Lenže medzi číslami 16 až 30 sú 4 prvočísla: 17, 19, 23, 29. Tie sú deliteľné len jednotkou a samé sebou, čiže jedno z nich môžme použiť ako $a_1$, ale ostatne sú nepoužiteľné, lebo nie sú deliteľné žiadnym z čísel 12 až 15. Preto potrebujeme, aby množina $\{16, 17, \ldots, n\}$ obsahovala aspoň 14 zložených čísel. Takže *n* musí byť aspoň 34, keďže medzi 30 a 33 sa nachádza ešte 1 prvočíslo 31. Týmto sa nám podarilo *n* ohraničiť zdola. Ešte však musíme ukázať, že $n = 34$ naozaj vyhovuje zadaniu, teda nájsť prvky $a_1$ až $a_{15}$ z množiny $\{16,17,\ldots,34\}$ také, že $a_k$ je deliteľné číslom *k*, pre $k = 1,\ldots,15$. To sa dá spraviť napr. nasledujúcim spôsobom: $a_1 = 17$, $a_2 = 34$, $a_3 = 33$, $a_4 = 16$, $a_5 = 25$, $a_6 = 18$, $a_7 = 21$, $a_8 = 32$, $a_9 = 27$, $a_{10} = 20$, $a_{11} = 22$, $a_{12} = 24$, $a_{13} = 26$, $a_{14} = 28$, $a_{15} = 30$. Tým sme dokázali, že najmenšie hľadané *n* je 34.

**Komentár** (opravovala Katarína Škrovinová): V skutočnosti existuje až desať rôznych spôsobov, ako vybrať prvky $a_1$ až $a_{15}$ z množiny $\{16,17,\ldots,34\}$, nám však stačilo nájsť jeden spôsob. Drvivá väčšina z vás prišla k správnemu výsledku. Niektorí si uvedomili nepoužiteľnosť prvočísel, ostatní sa snažili vyberať násobky čísel 1 až 15 tak, aby *n* bolo čo najmenšie. Lenže pri tom druhom type riešenia ste mnohí nedostatočne, resp. vôbec nezdôvodnili fakt, že pri inom spôsobe vyberania prvkov by *n* nemohlo byť menšie, za čo ste strácali 1 bod.

**9.** Členy postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ celých čísel spĺňajú rovnicu

$$a_{n+1} = a_n^3 + 1999.$$

Dokážte, že táto postupnosť obsahuje maximálne jeden štvorec (druhú mocninu celého čísla).

**Riešenie:** Na úvod si povedzme niekoľko faktov o zvyškoch po delení číslom 4. Číslo 1999 dáva po delení číslom 4 zvyšok 3. Druhá mocnina celého čísla môže dávať po delení číslom 4 len zvyšok 0 alebo 1. Tretia mocnina celého čísla nemôže dávať po delení číslom 4 zvyšok 2. Preto $a_n$, $n \geq 2$, nemôže dávať zvy-

šok 1 po delení 4. Ak $a_n$, $n \geq 2$, dáva zvyšok 0 po delení 4, potom predchádzajúci člen $a_{n-1}$ musí dávať zvyšok 1 po delení 4. Preto môže byť členom $a_{n-1}$ jedine $a_1$, a teda $n = 2$. Preto jediní dvaja kandidáti na druhé mocniny sú prvý a druhý člen. Ak je z nich druhou mocninou len jeden, tvrdenie je dokázané. Predpokladajme, že to tak nie je, teda prvé dva členy sú štvorcami – predpokladajme, že $a_1 = x^2$ a $a_2 = y^2$, kde *x* a *y* sú nezáporné celé čísla. Potom na základe vzťahu zo zadania platí

$$y^2 = x^6 + 1999,$$

odkiaľ po úprave dostávame, že platí

$$1999 = \left(y - x^3\right)\left(y + x^3\right).$$

Keďže 1999 je prvočíslo a *x* nezáporné číslo, musí platiť

$$y - x^3 = 1,$$
$$y + x^3 = 1999.$$

Vyriešením tejto sústavy dostávame, že $y = 1000$ a $x^3 = 999$. Avšak číslo 999 nie je treťou mocninou celého čísla, preto nemôžu byť súčasne dva prvé členy postupnosti druhými mocninami celých čísel. A keďže iné členy druhou mocninou byť nemôžu, dostávame, že uvedená postupnosť obsahuje maximálne jednu druhú mocninu, čo sme chceli dokázať.

**Komentár** (opravoval Martin Hriňák): Úloha bola náročná a neudelil som za ňu veľmi veľa bodov. Kľúčovou myšlienkou tu bolo uvedomenie si zvyškov po delení 4. Existujú aj iné, nie veľmi pekné riešenia tejto úlohy, ktoré sú však značne rozsiahlejšie ako toto.

**10.** Určte všetky celočíselné riešenia rovnice

$$y^2 = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4.$$

**Riešenie:** Po pohľade na rovnicu vieme povedať, že ak sú celé čísla $x$, $y$ riešením rovnice, tak jej riešním sú aj čísla $x$, $-y$. Preto budeme hľadať také riešenia, v ktorých je $y$ nezáporné. Na riešenia so záporným *y* však nezabudneme pri odpovedi.

Skúšaním celkom ľahko nájdeme riešenia:

$$x = 0,\ y = 1,$$
$$x = -1,\ y = 1.$$

Našou úlohou je nájsť všetky celé čísla $x$, pre ktoré je výraz $1+x+x^2+x^3+x^4$ štvorcom nezáporného celého čísla (ďalej len štvorcom). Ukážeme, že tento výraz nemôže byť štvorcom okrem niekoľkých hodnôt neznámej $x$.

Jednou z metód, ako ukázať, prečo nejaký výraz nemôže byť štvorcom, je nasledujúca. Nájdeme také celé číslo $z$, že výraz $1+x+x^2+x^3+x^4$ leží medzi štvorcami dvoch po sebe idúcich čísel $z$, $z+1$. Ďalší štvorec medzi nimi už nemôže byť. V riešení urobíme ešte jeden krok navyše. Pôvodnú rovnicu vynásobíme štyrmi a budeme hľadať riešenia ekvivalentnej rovnice:

$$(2y)^2 = 4+4x+4x^2+4x^3+4x^4.$$

Vidíme, že aj výraz $4+4x+4x^2+4x^3+4x^4$ musí byť štvorcom (je to ekvivalentné s tým, že $1+x+x^2+x^3+x^4$ je štvorcom). Všimnime si, že pre skoro všetky $x$ platia odhady (zistíme presne pre ktoré):

$$\left(2x^2+x+1\right)^2 \underset{(1)}{>} 4+4x+4x^2+4x^3+4x^4 \underset{(2)}{>} \left(2x^2+x\right)^2$$

Po roznásobení a odčítaní príslušných členov dostaneme, že tieto nerovnosti sú ekvivalentné s nasledujúcimi nerovnosťami:

(1) $x^2-2x-3>0,$

$(x-3)(x+1)>0,$ platí pre $x>3$ a $x<-1.$

(2) $3x^2+4x+4>0,$

$3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{8}{3}>0,$ platí pre všetky $x$.

Vidíme, že pre $x>3$ a pre $x<-1$ leží výraz $4+4x+4x^2+4x^3+4x^4$ medzi dvoma po sebe idúcimi štvorcami, teda nemôže byť štvorcom. To znamená, že stačí overiť prípady $x\in\{-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ napríklad dosadením do pôvodnej rovnice. Dostaneme už len jedno ďalšie riešenie, a to:

$$x=3,\ y=11.$$

Riešeniami sú tieto usporiadané dvojice $(x,y)$:

$$(-1,\ 1),\ (-1,\ -1),\ (0,\ 1),\ (0,\ -1),\ (3,\ 11),\ (3,\ -11).$$

**Komentár** (opravoval Michal Takács): V riešení sme ani nepotrebovali tipovať riešenia. Neskôr nám totiž vyšlo, aké $x$ stačí vyskúšať. Často sa však stáva, že sa nám podarí vylúčiť skoro všetky prípady a na nejaké triviálne neprídeme. Preto sa oplatí obetovať na začiatku riešenia problému minútku a skúsiť nájsť nejaké

riešenia. Väčšina vašich riešení obsahovala v podstate len riešenia rovnice bez dôkazu, že iné neexistujú. Ak ste ich našli všetky, tak vám bol udelený 1 bod.

**11.** Určte všetky reálne čísla *x*, pre ktoré platí, že číslo

$$x^n + x^{-n}$$

je prirodzené pre všetky prirodzené čísla *n*.

**Riešenie:** Je zrejmé, že *x* sa nemôže rovnať 0. Zo zadania je zrejmé, že pre hľadané číslo *x* musí byť číslo $x + x^{-1}$ celé. Predpokladajme, že máme také číslo *x*. Jednoduchým násobením zistíme, že platí

$$x^n + x^{-n} = \left(x + x^{-1}\right)\left(x^{n-1} + x^{-n+1}\right) - \left(x^{n-2} + x^{-n+2}\right).$$

Potom na základe matematickej indukcie dostávame, že všetky čísla tvaru $x^n + x^{-n}$ sú celé pre všetky prirodzené čísla *n*. Preto nám stačí nájsť všetky *x*, pre ktoré je číslo $x + x^{-1}$ celé. Musí teda platiť

$$x + x^{-1} = m,$$

kde *m* je celé číslo. Riešením kvadratickej rovnice

$$x^2 - mx + 1 = 0$$

dostávame, že vyhovujú všetky reálne čísla v tvare

$$x = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4}}{2},$$

kde *m* je celé číslo rôzne od $-1, 0, 1$.

**Komentár** (opravoval Martin Hriňák): Úloha sa dala riešiť viacerými spôsobmi, tento bol z nich najkratší a aj najkrajší. Inou cestou môže byť použitie binomickej vety a následné úpravy vzniknutej rovnosti.

**12.** Pre reálne čísla $x_1, x_2, \ldots$ platí

$$\left|x_{n+m} - x_m - x_n\right| \leq 1$$

pre všetky *m*, *n* prirodzené. Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla *m*, *n* platí

$$\left|\frac{x_m}{m} - \frac{x_n}{n}\right| < \frac{1}{m} + \frac{1}{n}.$$

**Riešenie:** Matematickou indukciou vzhľadom na *n* dokážeme, že pre všetky prirodzené čísla *m* platí

$$\left|x_{nm} - nx_m\right| < n\,.$$

Pre $n = 1$ dostávame, že tvrdenie platí:

$$\left|x_m - x_m\right| = 0 < 1\,.$$

Predpokladajme, že tvrdenie platí pre *n*. Potom platí aj pre $n+1$, pretože na základe tvrdenia zo zadania, indukčného predpokladu a nerovnosti pre absolútne hodnoty

$$\left|a+b\right| \le \left|a\right| + \left|b\right|,$$

ktorá platí pre všetky reálne čísla *a*, *b*, platí

$$\left|x_{(n+1)m} - (n+1)x_m\right| \le \left|x_{mn+m} - x_{mn} - x_m\right| + \left|x_{mn} - nx_m\right| < 1 + n\,.$$

Preto pre všetky prirodzené čísla *n* platí

$$\left|x_{nm} - nx_m\right| < n\,.$$

Potom

$$\left|mx_n - nx_m\right| \le \left|x_{mn} - mx_n\right| + \left|x_{nm} - nx_m\right| < m + n$$

a predelením kladným číslom $mn$ dostaneme požadované tvrdenie.

**Komentár** (opravoval Martin Hriňák): Úloha opäť nedopadla veľmi slávne. Obe riešenia, ktoré získali nenulový počet bodov, obsahovali dobré myšlienky, avšak chýbala im záverečná úprava.

**13.** Nájdite všetky prirodzené čísla *m*, *n*, ktoré sú riešením rovnice

$$m^{n+m} = n^{n-m}\,.$$

**Riešenie:** Rovnicu zo zadania si môžeme upraviť takto:

$$m^{m+n} = n^{n-m},$$

$$m^m n^m = \frac{n^n}{m^n},$$

$$(mn)^m = \left(\frac{n}{m}\right)^n,$$

$$\sqrt[n]{(mn)^m} = \frac{n}{m}\,.$$

Číslo $(mn)^m$ je prirodzené. Platí, že *n*-tá odmocnina (pričom *n* je prirodzené číslo) z prirodzeného čísla je buď prirodzené číslo, alebo iracionálne číslo (skúste

si to dokázať sami, napr. sporom). Keďže $m$ aj $n$ sú prirodzené čísla, tak $\frac{n}{m}$ je racionálne číslo, teda to musí byť prirodzené číslo a platí $n = km$, kde $k$ je vhodné prirodzené číslo. To môžeme dosadiť do pôvodnej rovnice a dostaneme:

$$m^{m(k+1)} = (km)^{m(k-1)}.$$

Keďže obe strany sú nezáporné, môžeme ich umocniť na $\frac{1}{m}$

$$m^{k+1} = (km)^{k-1},$$

$$\frac{m^{k+1}}{m^{k-1}} = k^{k-1}.$$

$$m^2 = k^{k-1}.$$

Keďže obe strany sú nezáporné, môžeme ich odmocniť

$$m = k^{\frac{k-1}{2}},$$

$$n = k.k^{\frac{k-1}{2}} = k^{\frac{k+1}{2}}.$$

Lenže číslo $k$ nemôže byť ľubovoľné, musí totiž platiť, že $m$ aj $n$ sú prirodzené čísla. To môže nastať len v dvoch prípadoch:

a) Keď $\frac{k-1}{2}$ aj $\frac{k+1}{2}$ sú prirodzené čísla, (lebo vtedy umocňujeme prirodzené číslo k na prirodzené číslo). To nastane práve vtedy, keď $k$ je nepárne číslo.
b) Keď $k$ je druhá mocnina prirodzeného čísla (lebo vtedy odmocňujeme čísla $k^{k-1}$, $k^{k+1}$, ktoré sú obe druhými mocninami prirodzeného čísla).

Vo všetkých ostatných prípadoch, t. j. keby $k$ bolo párne číslo, ktoré nie je druhou mocninou prirodzeného čísla, by $m$ aj $n$ boli iracionálne čísla.

Záver: Riešením rovnice sú všetky usporiadané dvojice $\left[k^{\frac{k-1}{2}}, k^{\frac{k+1}{2}}\right]$, pričom $k$ môže byť ľubovoľné nepárne prirodzené číslo alebo druhá mocnina prirodzeného čísla.

**Komentár** (opravovala Katarína Škrovinová): Robili sme len ekvivalentné úpravy, takže sme našli všetky riešenia a ani skúška nie je potrebná. Nie je však na škodu presvedčiť sa, že všetky nami nájdené riešenia skutočne vyhovujú zadanej rovnici.

**14.** Nech $P$ je bod vnútri trojuholníka $ABC$. Ukážte, že existujú jednoznačne určené body $A_1$ na priamke $AB$ a $A_2$ na priamke $CA$ také, že $P$, $A_1$, $A_2$ sú kolineárne a platí $|PA_1| = |PA_2|$. Podobne definujme body $B_1$, $B_2$, $C_1$, $C_2$ tak, že $P$, $B_1$, $B_2$ sú kolineárne, pričom $B_1$ leží na priamke $BC$, $B_2$ leží na priamke $AB$ a platí $|PB_1| = |PB_2|$, a $P$, $C_1$, $C_2$ sú kolineárne, $C_1$ leží na priamke $CA$, $C_2$ leží na priamke $BC$ a platí $|PC_1| = |PC_2|$. Nájdite všetky také body P, že trojuholníky $AA_1A_2$, $BB_1B_2$, $CC_1C_2$ majú rovnaký obsah.

**Riešenie:** Máme dané priamky $AB$, $AC$ a bod $P$ ležiaci vnútri trojuholníka $ABC$. Chceme nájsť všetky dvojice bodov $A_1$, $A_2$ také, že body $A_1$, $A_2$, $P$ ležia na jednej priamke a $A_1$ leží na $AB$, $A_2$ na $AC$. Môžu nastať dve situácie:

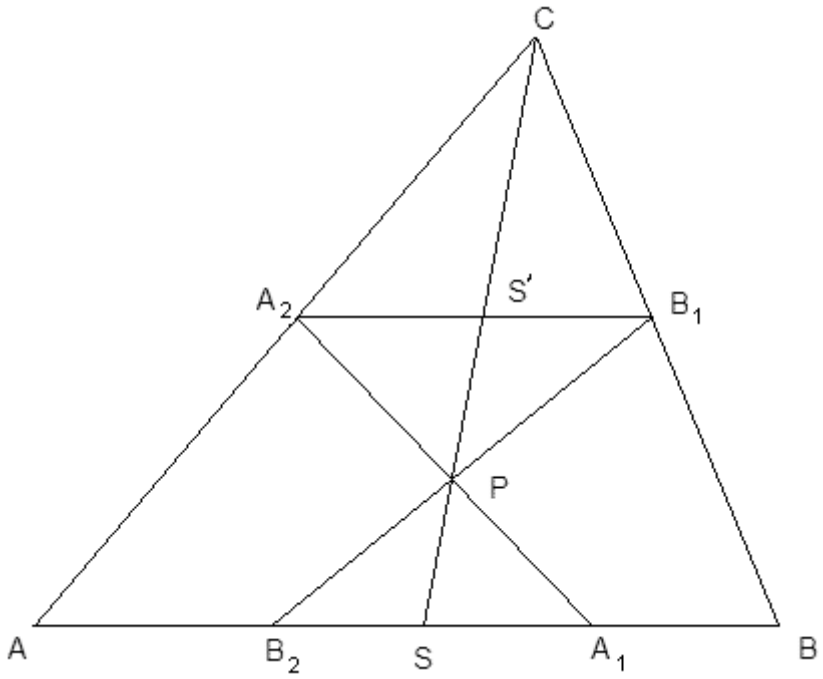
1. Polpriamky $PA_1$ a $PA_2$ majú rovnaký smer. Vtedy sú body $A_1$ a $A_2$ zhodné. Aby $A_1$ ležal na $AB$ a $A_2$ na $AC$, musia byť zhodné aj s bodom $A$.

2. Polpriamky $PA_1$ a $PA_2$ majú opačný smer. Vtedy sa bod $A_1$ zobrazí do bodu $A_2$ v stredovej súmernosti podľa bodu $P$. $A_1$ leží na $AB$ a $A_2$ na $AC$. Zobrazíme priamku $AB$ v stredovej súmernosti podľa bodu $P$ na priamku $A'B'$. Bod, v ktorom sa priamka $A'B'$ pretne s priamkou $AC$, je bod $A_2$. Taký bod je práve jeden, lebo priamky $AC$ a $A'B'$ sú rôznobežné. $A_1$ nájdeme potom ako obraz bodu $A_2$ v stredovej súmernosti podľa bodu $P$.

Našli sme 2 rôzne dvojice bodov $A_1$, $A_2$, ktoré vyhovujú zadaniu, čiže tieto body nie sú jednoznačne určené. Tým sme tvrdenie zo zadania vyvrátili.

Ďalej budeme uvažovať len o tých bodoch $A_1$, $A_2$, ktoré nie sú zhodné s $A$.
Predpokladajme, že sa obsah trojuholníka $AA_1A_2$ rovná obsahu trojuholníka $BB_1B_2$. Body $B_1$ a $A_2$ ležia na priamke $A'B'$, ktorá je rovnobežná s $AB$. To znamená, že trojuholníky $AA_1A_2$ a $BB_1B_2$ majú rovnakú výšku na stranu $AA_1$, resp. $BB_2$. Preto $|AA_1| = |BB_1|$. Ak označíme $S$ stred strany $AB$, tak musí platiť $|SA_1| = |SB_1|$. Bod $S$ sa zobrazí v stredovej súmernosti podľa bodu $P$ do bodu $S'$. Bod $S'$ je stredom úsečky $A_2B_1$. Bod $P$ teda leží na priamke $SS'$ a táto priamka je ťažnicou trojuholníka $ABC$ na stranu $AB$. Z rovnakého dôvodu musí bod $P$ ležať aj na zvyšných dvoch ťažniciach, takže bod $P$ môže byť jedine ťažisko, čiže je

jednoznačne určený. Ak je bod $P$ ťažiskom, tak obsahy všetkých troch trojuholníkov $AA_1A_2$, $BB_1B_2$, $CC_1C_2$ sú $\frac{4}{9}$ obsahu trojuholníka $ABC$.




**Komentár** (opravovala Katarína Škrovinová): Skúste si premyslieť, čo by sa stalo, keby body $A_1$, $A_2$ boli zhodné s bodom $A$.