Korešpondenčná súťaž v školskom roku 2007/2008

Riešenia 3. série úloh

1. Rozdeľte sto vriec obilia medzi piatich ľudí tak, aby druhý dostal o toľko viac ako prvý, o koľko tretí viac ako druhý, štvrtý viac ako tretí a piaty viac ako štvrtý. Okrem toho majú prví dvaja dostať sedemkrát menej ako zvyšní traja.

Riešenie: Označme rozdiel medzi množstvami druhého a prvého ako x a množstvo, ktoré dostal prvý y. Potom budú jednotlivé množstvá obilia, ktoré dostali ľudia, x, $x+y$, $x+2y$, $x+3y$, $x+4y$. Keďže súčet týchto množstiev je 100, dostávame rovnicu

$$x+(x+y)+(x+2y)+(x+3y)+(x+4y)=100,$$

po úprave

$$5x+10y=100,$$
$$x+2y=20.$$

Druhú rovnicu dostaneme z druhej podmienky – prví dvaja majú dostať sedemkrát menej ako zvyšní traja, teda má platiť

$$7\left[x+(x+y)\right]=(x+2y)+(x+3y)+(x+4y),$$

po úprave

$$14x+7y=3x+9y,$$
$$11x=2y.$$

Budeme teda riešiť sústavu

$$x+2y=20,$$
$$11x=2y.$$

Dosadením z druhej rovnice do prvej dostávame, že

$$x+11x=20,$$
$$x=\frac{20}{12}=\frac{5}{3}.$$

Dosadením do rovnice pre y dostávame, že

$$y=\frac{11}{2}x,$$
$$y=\frac{11}{2}\cdot\frac{5}{3}=\frac{55}{6}.$$

Spätným dosadením dostávame, že hľadané množstvá sú $\frac{5}{3}$, $\frac{65}{6}$, 20, $\frac{175}{6}$ a $\frac{115}{3}$ vreca.

Komentár (opravoval Martin Hriňák): Viacero chybných riešení pozostávalo z predpokladu, že vrecia sa nesmú deliť. Našou úlohou však nebolo deliť vrecia, ale obilie, ktorého bolo 100 vriec.

2. Dve rovnaké nádoby sú naplnené rovnakým vínom. Z prvej zoberieme x litrov vína a dolejeme tam x litrov čistej vody. Potom z tejto zmesi odlejeme opäť x litrov a dolejeme tam x litrov čistej vody. Z druhej nádoby zoberieme $2x$ litrov vína a dolejeme tam $2x$ litrov čistej vody. Potom z tejto zmesi odlejeme opäť $2x$ litrov a dolejeme tam $2x$ litrov čistej vody. Po tomto prelievaní je v prvej nádobe koncentrácia vína $\frac{25}{16}$-krát vyššia ako v druhej nádobe. Vypočítajte, akú časť objemu jednej nádoby predstavuje x litrov.

Riešenie: Označme objem jednej nádoby V litrov. Koncentrácia v prvej nádobe bude po prvom prelievaní $\frac{V-x}{V}$, pretože sme z V litrov vína odobrali x litrov, ale celkový objem riedeného vína ostal V. Po druhom prelievaní to bude

$$\frac{(V-x)-x\cdot\frac{V-x}{V}}{V}=\left(\frac{V-x}{V}\right)^2,$$

pretože po prvom prelievaní bolo v nádobe už len $V-x$ litrov vína a odobrali sme $x\cdot\frac{V-x}{V}$ litrov vína, pretože v odoberaných x litroch je víno len v koncentrácii $\frac{V-x}{V}$. Analogicky dostaneme, že v druhej nádobe bude koncentrácia vína

$$\left(\frac{V-2x}{V}\right)^2.$$

Na základe informácie zo zadania dostávame, že by malo platiť

$$\left(\frac{V-x}{V}\right)^2=\frac{25}{16}\cdot\left(\frac{V-2x}{V}\right)^2.$$

Výrazy v zátvorkách musia byť nezáporné, pretože inak by sa nedalo odlievať príslušné množstvo z nádob. Preto môžeme odmocniť a dostaneme, že platí

$$\frac{V-x}{V}=\frac{5}{4}\cdot\frac{V-2x}{V}.$$

Po prenásobení V a upravení dostávame, že platí

$$\frac{6}{4}x = \frac{1}{4}\cdot V,$$

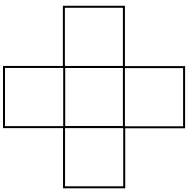
odkiaľ dostávame predelením nenulovým číslom V a úprave, že platí

$$\frac{x}{V} = \frac{1}{6}.$$

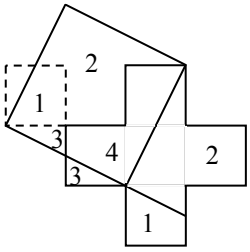
x litrov predstavuje $\frac{1}{6}$ objemu nádoby.

Komentár (opravoval Martin Hriňák): Jeden bod ste stratili, keď ste pri odmocňovaní zabudli spomenúť, že oba odmocňované výrazy sú nezáporné. Ak ste úlohu riešili cez kvadratickú rovnicu, tak vám vyšiel druhý koreň $\frac{9}{14}$, ktorý však nevyhovuje, pretože $2\cdot\frac{9}{14} = \frac{18}{14} > 1$, a teda by ste museli pri druhom prelievaní preliať viac vína, ako bolo v nádobe, čo nie je možné. Ak ste ho zabudli vylúčiť, stratili ste 1 bod.

3. Rozstrihnite znak plus zložený z piatich jednotkových štvorcov na štyri časti tak, aby sa z nich dal zložiť štvorec.



Riešenie: Jedna z možností, ako sa dá útvar rozložiť, je na obrázku, pričom druhý strih (ktorým odstrihneme časti 1 a 3) robíme cez stredy príslušných strán štvorcov.



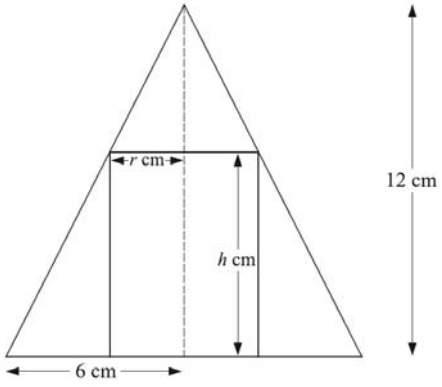
Komentár (opravoval Martin Hriňák): Ak ste našli riešenie, ktoré pozostávalo z iného počtu častí, získali ste 0 bodov. Za samotné rozdelenie znaku plus ste získavali 1 bod, za ukázanie, že sa z uvedených častí dá poskladať štvorec, ste mohli získať zvyšné 4 body (bolo potrebné ukázať poskladanie štvorca a jeho korektnosť). Za dôkaz, že strana poskladaného štvorca je $\sqrt{5}$, ste mohli získať 1 bod.

4. Na tabuli sú napísané všetky prirodzené čísla od 1 po 2008 vrátane. S číslami sú povolené len dve operácie: miesto dvoch čísel môžete napísať ich súčet alebo absolútnu hodnotu ich rozdielu, pričom pôvodné čísla z tabule zmažete. Zistite hodnotu najmenšieho prirodzeného čísla, ktoré môže ostať na tabuli po 2007 krokoch.

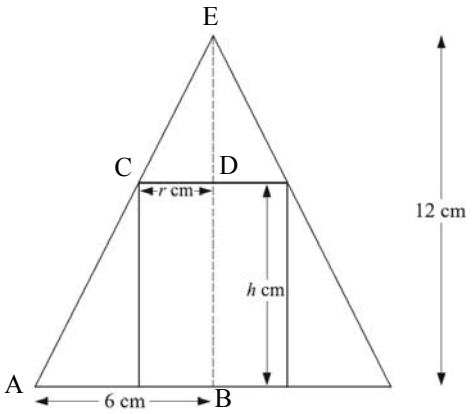
Riešenie: Ak nahradíme dve čísla ich súčtom alebo rozdielom (absolútnu hodnotu môžeme z našich úvah vynechať – budeme odčítavať od väčšieho čísla menšie, prípadne rovnajúce sa), počet nepárnych čísel na tabuli sa buď nezmení (ak medzi zmazanými číslami bolo jedno párne a jedno nepárne, alebo boli obe párne) alebo klesne o 2 (ak boli obe nepárne). Na začiatku bolo na tabuli 1004 nepárnych čísel. Na konci bude len jedno číslo, a teda musí byť párne. Preto najmenším prirodzeným číslom, ktoré môžeme dostať, je 2 (najmenšie číslo, ktoré môžeme na tabuli dostať, je 0). Teraz ešte musíme ukázať, že to je možné. Uvažujme čísla $2k-1$, $2k$, kde $k \in \mathbb{N}$. Ich rozdielom je číslo 1. V prvom kroku takto nahradíme všetky susediace dvojice ich rozdielom. Dostaneme 1004 čísel 1. Tie rozdelíme na 501 párov čísel 1 – 1, ktoré v druhom kroku od seba odčítame. Ostanú nám na tabuli už len dve čísla 1 a nuly, ktoré postupne sčítame a dostaneme súčet 2. Ak by sme dve jednotky odčítali, dostali by sme najmenšie celé číslo, teda 0.

Komentár (opravovala Katarína Škrovinová): Väčšina riešiteľov tvrdila, že ak sa pri každom kroku budú snažiť dostať čo najmenšie číslo, tak aj na konci zostane na tabuli najmenšie číslo. To ale nemusí byť pravda, čo ak by existoval nejaký postup, pri ktorom by na konci zostali na tabuli dve pomerne veľké čísla, ale ich rozdiel by bol 1? Vašou úlohou bolo dokázať, že ak by sme použili akýkoľvek postup, tak číslo 1 na konci dostať nemôžeme. Kľúčom k riešeniu bolo všimnúť si vlastnosť, ktorá sa pri žiadnom kroku nezmení, tzv. invariant. V tomto príklade to bola parita počtu nepárnych čísel na tabuli.

5. Do kužeľa je vpísaný valec tak, že rovina podstavy oboch útvarov je totožná a horná podstava valca sa dotýka povrchu kužeľa. Na obrázku je zobrazený kolmý priečny rez kužeľom cez jeho vrchol. Vyjadrite objem vpísaného valca len pomocou polomeru jeho podstavy.



Riešenie: Pre jednoznačnosť vyjadrovania si označme jednotlivé body na obrázku takto:



Z podobnosti trojuholníkov *CDE* a *ABE* dostávame, že platí

$$\frac{|CD|}{|AB|}=\frac{|DE|}{|BE|},$$

po dosadení známych veličín

$$\frac{r}{6}=\frac{12-h}{12}.$$

Po upravení dostávame, že

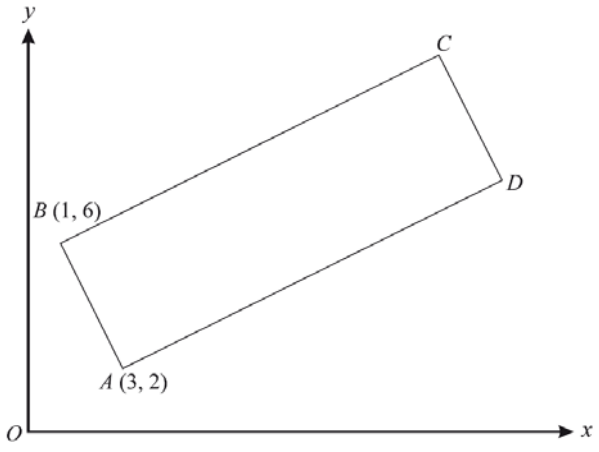
$$h=12-2r=2(6-r).$$

Nakoniec dostávame, že sa objem valca rovná

$$V=\pi r^2 h=2\pi r^2(6-r).$$

Komentár (opravovala Katarína Škrovinová): Body ste najčastejšie strácali, ak ste zaokrúhľovali, a tvárili ste sa, že počítate s presnou hodnotou.

6. Na obrázku je znázornený obdĺžnik *ABCD*. Bod *A* má súradnice $(3,2)$, bod *B* má súradnice $(1,6)$ a bod *C* patrí priamke $y=x-1$. Určte jeho obvod.



Riešenie: Najprv si vyjadríme rovnicu priamky *AB*. Predpokladajme, že je v tvare $y = ax + b$. Potom musí platiť

$$6 = a + b,$$
$$2 = 3a + b.$$

Odčítaním prvej rovnice od druhej dostávame, že $-4 = 2a$, teda $a = -2$. Dosadením do prvej rovnice a upravením dostaneme, že $b = 8$. Rovnica priamky *AB* je potom

$$y = -2x + 8,$$

jej smernica je -2. Priamka *BC* je kolmá na priamku *AB*, preto jej smernica bude $-\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$. Rovnicu priamky *BC* budeme preto hľadať v tvare

$$y = \frac{1}{2}x + c.$$

Keďže bod *B* patrí priamke *BC*, musí platiť

$$6 = \frac{1}{2} \cdot 1 + c,$$

teda po úprave

$$c = \frac{11}{2}.$$

Dosadením do rovnice pre priamku *BC* a upravením dostávame, že priamka *BC* má rovnicu

$$y = \frac{1}{2}(x + 11).$$

Bod *C* patrí prieniku priamky *BC* a $y = x - 1$, teda musí platiť

$$y = \frac{1}{2}(x + 11),$$
$$y = x - 1.$$

Dosadením za *y* z druhej rovnice do prvej dostávame, že musí platiť

$$x - 1 = \frac{1}{2}(x + 11).$$

Táto lineárna rovnica má jediné riešenie $x = 13$. Dopočítaním dostávame, že $y = 12$, teda bod *C* má súradnice $(13,12)$.

Pre obvod *o* obdĺžnika *ABCD* platí

$$o = 2 \cdot (|AB| + |BC|).$$

Na základe Pytagorovej vety si vypočítame, že

$$|AB| = \sqrt{(3-1)^2 + (2-6)^2} = 2\sqrt{5},$$
$$|BC| = \sqrt{(13-1)^2 + (12-6)^2} = 6\sqrt{5}.$$

Obvod obdĺžnika *ABCD* sa potom rovná

$$o = 2 \cdot \left(2\sqrt{5} + 6\sqrt{5}\right) = 16\sqrt{5}\,.$$

Komentár (opravoval Michal Takács): Ak ste súradnice bodu *C* odhadli narysovaním bez výpočtu, tak ste mohli získať nanajvýš 2 body.

7. Určte presnú hodnotu čísla

$$\frac{\cos 1° + \cos 2° + \cos 3° + \cdots + \cos 44°}{\sin 1° + \sin 2° + \sin 3° + \cdots + \sin 44°}\,.$$

Riešenie: Vieme, že pre všetky reálne čísla a a b platí

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2},$$

$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}.$$

Ak zvolíme $b = 45° - a$, dostaneme, že platí

$$\cos a + \cos\left(45° - a\right) = 2\cos\frac{45°}{2}\cos\frac{45° + 2a}{2},$$

$$\sin a + \sin\left(45° - a\right) = 2\sin\frac{45°}{2}\cos\frac{45° + 2a}{2}.$$

Potom pre číslo *V* zo zadania platí

$$V = \frac{2\cos\frac{45°}{2}\cdot\left(\cos\frac{47°}{2} + \cos\frac{49°}{2} + \cdots + \cos\frac{89°}{2}\right)}{2\sin\frac{45°}{2}\cdot\left(\cos\frac{47°}{2} + \cos\frac{49°}{2} + \cdots + \cos\frac{89°}{2}\right)} = \frac{\cos\frac{45°}{2}}{\sin\frac{45°}{2}} = \operatorname{cotg}\frac{45°}{2}.$$

Vieme, že pre $0 < x < 45°$ platí

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1 + \cos 2x}{\sin 2x}.$$

Keďže platí

$$\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

dostávame, že

$$V = \frac{1 + \cos 45°}{\sin 45°} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 + \sqrt{2}\,.$$

Komentár (opravoval Michal Takács): Ak ste nevyčíslili hodnotu $\operatorname{cotg}\frac{45°}{2}$, stratili ste 1 bod.

8. Do všetkých políčok tabuľky $n \times n$, pričom n je nepárne, je vpísané buď číslo $+1$ alebo -1. Označme p_i súčin čísel v i-tom riadku a q_i súčin čísel v i-tom stĺpci, $1 \le i \le n$. Dokážte, že

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n + q_1 + q_2 + \ldots + q_n \neq 0.$$

Riešenie: Súčin všetkých čísel v tabuľke si môžeme vyjadriť dvomi rôznymi spôsobmi – po riadkoch a po stĺpcoch, a tak ľahko nahliadneme, že platí

$$p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n,$$

pričom vieme, že každé p_i a q_i sa v absolútnej hodnote rovná 1. Označme s počet jednotiek medzi p_i a t počet jednotiek medzi q_i. Čísla s a t musia mať rovnakú paritu. Potom

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n + q_1 + q_2 + \ldots + q_n = s - (n-s) + t - (n-t) = 2(s+t-n).$$

Keďže s a t majú rovnakú paritu, tak $s+t$ je párne číslo. Potom je $s+t-n$ číslo nepárne, a teda rôzne od nuly. Tým sme dokázali požadované tvrdenie.

Komentár (opravoval Martin Hriňák): Veľa riešení spočívalo v tom, že ste vyšli z tabuľky, v ktorej boli samé 1, a postupne ste ich menili na -1. Pri prvej výmene sa celkový súčet zmenší o 4, ale problém je v tom, že pri ďalších to už tak nemusí byť. Ak ste zabudli na to, že pri výmenách 1 za -1 sa môže celkový súčet nezmeniť, resp. môže aj narásť o 4, strácali ste po 1 bode. Ďalšou chybou (za 1 bod) týchto riešení bolo, že ste neukázali, resp. nespomenuli, že týmito výmenami viete dosiahnuť ľubovoľnú tabuľku.

9. Pre prirodzené číslo n platí, že číslo $2n$ má 28 prirodzených deliteľov a číslo $3n$ 30 prirodzených deliteľov. Určte, koľko prirodzených deliteľov môže mať číslo $6n$.

Riešenie: Uvažujme prvočíselný rozklad čísla n v tvare

$$n = 2^a \cdot 3^b \cdot p_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k},$$

kde $a, b \in \mathbb{N}_0$, p_i sú navzájom rôzne prvočísla rôzne od 2 a 3, $e_i \in \mathbb{N}$ pre všetky $1 \le i \le k$. Pre počet deliteľov $D(2n)$ čísla $2n$ platí

$$D(2n) = (a+2)(b+1)(e_1+1)\ldots(e_k+1).$$

Podobne pre počet deliteľov $D(3n)$ čísla $3n$ platí

$$D(3n) = (a+1)(b+2)(e_1+1)\ldots(e_k+1).$$

Máme teda riešiť sústavu dvoch rovníc

$$28 = (a+2)(b+1)(e_1+1)\ldots(e_k+1),$$
$$30 = (a+1)(b+2)(e_1+1)\ldots(e_k+1).$$

Výraz $(e_1+1)\ldots(e_k+1)$ je deliteľom čísel 28 a 30. Keďže najväčší spoločný deliteľ týchto dvoch čísel je 2, sú len dve možnosti – buď je to 1 alebo 2.

Rozoberieme najprv prípad $(e_1+1)\ldots(e_k+1)=2$. Keďže $e_i \in \mathbb{N}$, tak nutne $k=1$ a $e_1=1$. Potom musí platiť

$$14=(a+2)(b+1),$$
$$15=(a+1)(b+2).$$

Odčítaním prvej rovnice od druhej dostávame, že platí

$$a=b+1$$

a dosadením do prvej rovnice dostávame kvadratickú rovnicu

$$b^2+4b-11=0,$$

ktorá nemá celočíselné riešenie, teda $(e_1+1)\ldots(e_k+1)\neq 2$.

Dostali sme, že musí platiť $(e_1+1)\ldots(e_k+1)=1$. Keďže však $e_i \in \mathbb{N}$, musí byť $k=0$. Potom musí platiť

$$28=(a+2)(b+1),$$
$$30=(a+1)(b+2).$$

Odčítaním prvej rovnice od druhej dostávame, že platí

$$a=b+2.$$

Dosadením do prvej rovnice dostávame kvadratickú rovnicu

$$b^2+5b-24=0,$$

ktorá má korene $b_1=-8$ a $b_2=3$. Prvý koreň nevyhovuje, lebo nie je nezáporný. Preto $b=3$ a potom $a=5$. Hľadané číslo *n* sa potom rovná

$$n=2^5\cdot 3^3=864$$

a číslo $6n=2^6\cdot 3^4$ má potom

$$D(6n)=(6+1)(4+1)=35$$

deliteľov.

Komentár (opravoval Martin Hriňák): Za zlé zápisy vzorca na výpočet počtu kladných deliteľov prirodzeného čísla, ste strácali 1 bod. Ak ste nedostatočne zdôvodnili jednotlivé prípady, ktoré ste rozoberali, strácali ste 1 až 2 body. Za nájdenie čísla vyhovujúceho zadaniu a jeho overenie ste mohli získať 1 bod.

10. Označme *a*, *b*, *c* dĺžky strán trojuholníka. Dokážte, že potom platí nerovnosť

$$3a^2+2bc>2ab+2ac.$$

Riešenie: Keďže sú *a*, *b*, *c* dĺžky strán trojuholníka, platí trojuholníková nerovnosť, ktorú môžeme zapísať v dvoch rôznych tvaroch:

$$a+c>b,$$
$$a+b>c.$$

Potom je výraz $(a-b+c)(a+b-c)$ kladný. Sčítaním s dvoma ďalšími nezápornými výrazmi $(a-b)^2$ a $(a-c)^2$ dostávame, že platí

$$(a-b+c)(a+b-c)+(a-b)^2+(a-c)^2>0.$$

Upravením postupne dostávame

$$a^2-(b-c)^2+(a-b)^2+(a-c)^2>0,$$
$$a^2-b^2+2bc-c^2+a^2-2ab+b^2+a^2-2ac+c^2>0,$$
$$3a^2+2bc-2ab-2ac>0,$$
$$3a^2+2bc>2ab+2ac,$$

čo sme chceli dokázať.

Komentár (opravovala Katarína Škrovinová): Najčastejším spôsobom dôkazu vo vašich riešeniach bolo upravenie nerovnosti, ktorú treba dokázať, na nejakú inú, o ktorej už vieme povedať, že platí. Toto možno považovať za dôkaz len v tom prípade, ak boli použité iba ekvivalentné úpravy. Ale to treba aj spomenúť v riešení.

11. Nájdite všetky reálne čísla *x*, ktoré spĺňajú rovnicu

$$\frac{3x+3}{\sqrt{x}}=4+\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}.$$

Riešenie: Aby boli odmocniny definované, musí platiť $x>0$, pretože v menovateli na ľavej strane je *x* a na pravej strane je

$$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0.$$

Odhadneme výraz na ľavej strane:

$$\frac{3x+3}{\sqrt{x}}=3\cdot\frac{x+1}{\sqrt{x}}=3\cdot\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\geq 3\cdot 2=6,$$

pretože na základe AG-nerovnosti platí

$$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\geq 2\cdot\sqrt{\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}}=2,$$

pričom rovnosť nastáva len pre $x=1$.

Odhadneme aj výraz na pravej strane. Pre všetky reálne čísla *x* platí

$$3x^2-6x+3=3\cdot(x-1)^2\geq 0,$$

pričom rovnosť nastáva len pre $x=1$. Pripočítaním výrazu $(x+1)^2$ k obom stranám nerovnosti dostávame, že platí

$$4x^2-4x+4\geq(x+1)^2.$$

Odmocnením oboch strán, ktoré sú nezáporné, a predelením kladným číslom $\sqrt{x^2-x+1}$ dostaneme

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} \leq 2 .$$

Z toho dostávame, že pravá strana je maximálne 6, pričom rovnosť nastáva pre $x=1$. Keďže ľavá strana má hodnotu aspoň 6, jediná možnosť, kedy nastane rovnosť, je $x=1$, čo je jediným riešením rovnice.

Komentár (opravoval Martin Hriňák): Za nájdenie riešenia ste mohli získať 1 bod.

12. Uvažujme 2008-prvkovú množinu *M* prirodzených čísel, pričom žiadne z nich nemá prvočíselný deliteľ väčší ako 28. Dokážte, že množina *M* obsahuje aspoň jednu štvorprvkovú podmnožinu, ktorej súčin prvkov je štvrtou mocninou prirodzeného čísla.

Riešenie: Prvočísla, ktoré môžu vystupovať v prvočíselných rozkladoch prvkov množiny *M*, sú 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 a 23, teda každý prvok m_i, $i \leq 1 \leq 2008$, sa dá zapísať v tvare

$$m_i = 2^{a_{1,i}}.3^{a_{2,i}}.5^{a_{3,i}}.7^{a_{4,i}}.11^{a_{5,i}}.13^{a_{6,i}}.17^{a_{7,i}}.19^{a_{8,i}}.23^{a_{9,i}} .$$

Je ich 9. Pre kombinácie parity exponentov čísel m_i máme $2^9 = 512$ možností. Keďže $2008 > 512$, existujú medzi prvkami množiny *M* dva, označme ich m_i a m_j, také, že všetky zodpovedajúce si exponenty v ich prvočíselných rozkladoch majú rovnakú paritu. To znamená, že ich súčin je druhou mocninou prirodzeného čísla, teda platí

$$m_i m_j = b_{ij}^2 = c_1^2 .$$

Číslo c_1 má tie isté prvočíselné delitele ako prvky množiny *M*. Odstráňme tieto prvky m_i a m_j z množiny *M*. Ostalo v nej 2006 prvkov. Opäť medzi nimi existujú dva také, že ich súčin je druhou mocninou prirodzeného čísla. Takto dostaneme číslo c_2 a postupujeme rovnako ďalej. Keďže $2008 - 2 \cdot 512 = 984 > 512$, existuje aspoň 513 takýchto dvojíc prvkov z množiny *M*, ktoré nám vytvoria aspoň 513 čísel c_i. Na ne teraz opäť môžeme aplikovať tento postup – medzi nimi sa nachádzajú aspoň dve, c_u a c_v také, že ich súčin je druhou mocninou prirodzeného čísla:

$$c_u c_v = n^2 .$$

Predpokladajme, že platí

$$c_u^2 = b_{op}^2 = m_o m_p ,$$
$$c_v^2 = b_{qr}^2 = m_q m_r .$$

Potom

$$m_o m_p m_q m_r = b_{op}^2 b_{qr}^2 = c_u^2 c_v^2 = \left(c_u c_v\right)^2 = n^4,$$

teda čísla m_o, m_p, m_q, m_r sú hľadanými prvkami množiny M (vzhľadom na postup, ako sme ich našli, je zrejmé, že sú rôzne).

Komentár (opravoval Martin Hriňák): Túto úlohu sa nepodarilo vyriešiť nikomu. Najčastejšie chyby boli v nadsadení počtu možností pre exponenty, resp. ich nesprávne spočítanie.

13. Zistite, či platí nasledujúce tvrdenie:

Ak x a y sú reálne čísla, pričom $y \geq 0$ a $y\left(y+1\right) \leq \left(x+1\right)^2$, potom $y\left(y-1\right) \leq x^2$.

Riešenie: Ak $0 \leq y \leq 1$, potom tvrdenie platí, pretože

$$y\left(y-1\right) \leq 0 \leq x^2.$$

Ďalej uvažujme $y > 1$. Ak $x \leq y - \frac{1}{2}$, potom $2x + 1 - 2y \leq 0$ a platí

$$y\left(y-1\right) = y\left(y+1\right) - 2y \leq \left(x+1\right)^2 - 2y = x^2 + 2x + 1 - 2y \leq x^2.$$

Ak $x \geq y - \frac{1}{2}$, potom

$$x^2 \geq y^2 - y + \frac{1}{4} > y^2 - y = y\left(y-1\right).$$

Tým sme dokázali, že tvrdenie platí.

Komentár (opravovala Katarína Škrovinová): Nie je.

14. Nájdite všetky funkcie $f : \left(0,\infty\right) \to \left(0,\infty\right)$, pre ktoré platí

$$f\left(f\left(x\right)\right) = 6x - f\left(x\right).$$

Riešenie: Zvoľme si ľubovoľné $a > 0$. Definujme $a_0 = a$, $a_n = f\left(a_{n-1}\right)$ pre $n \in \mathbb{N}$. Potom dostávame, že musí platiť

$$a_n = f\left(a_{n-1}\right) = f\left(f\left(a_{n-2}\right)\right) = 6a_{n-2} - f\left(a_{n-2}\right) = 6a_{n-2} - a_{n-1}.$$

Dostali sme rekurentné vyjadrenie postupnosti $\left\{a_n\right\}_{n=0}^{\infty}$:

$$a_n = 6a_{n-2} - a_{n-1}.$$

Charakteristická rovnica je

$$x^2 = 6 - x.$$

Jej korene sú $x_1 = 2$ a $x_2 = -3$.

Preto

$$a_n = \alpha \cdot 2^n + \beta \cdot (-3)^n,\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Ak by bol koeficient β nenulový, potom pre dostatočne veľké n bude mať a_n záporné hodnoty, čo je v spore s predpokladom, že funkcia f má kladné hodnoty. Preto $\beta = 0$ a platí

$$a_n = \alpha \cdot 2^n.$$

Dosadením $n = 0$ dostávame, že

$$a = a_0 = \alpha \cdot 2^0 = \alpha,$$

teda

$$\alpha = a$$

a platí

$$a_n = a \cdot 2^n.$$

Dosadením $n = 1$ dostávame, že platí

$$2a = a_1 = f(a_0) = f(a).$$

Keďže na a sme na začiatku kládli len požiadavku $a > 0$, môžeme ho zvoliť ľubovoľné. Znamená to, že jediným kandidátom na riešenie je funkcia $f(x) = 2x$. Jednoduchým výpočtom sa presvedčíme, že vyhovuje rovnici zo zadania:

$$f(f(x)) = 2 \cdot (2x) = 4x = 6x - 2x = 6x - f(x).$$

Existuje jediná funkcia $f(x) = 2x$, ktorá spĺňa podmienky zo zadania úlohy.

Komentár (opravoval Martin Hriňák): Za nájdenie riešenia ste mohli získať 1 bod. Za formuláciu charakteristickej rovnice bez jej korektného zdôvodnenia tiež 1 bod.

Výsledkové listiny po 3. sérii úloh

PS označuje počet bodov za predchádzajúce dve série, M meškanie v dňoch. Sme radi, že sme po dlhom čase nemuseli nikomu strhnúť body za odpisovanie – buď ste neodpisovali alebo ste to robili mimoriadne rafinovaným spôsobom.

Kategória Z

Por.	Priezvisko	Meno	Trieda	Škola	PS	1	2	3	4	M	Spolu
1	Papcúnová	Barbora	8. C	ZŠ Mierová 134, Svit	35	5	4	5	2		51
2	Uhlárová	Laura	prima	G Mládežnícka 22, Šahy	33	5	5	5			48
3	Černáková	Barbora	sekunda	G Mládežnícka 22, Šahy	29	5	4	4	5		47
4	Beznák	Samuel	9. A	ZŠ s MŠ C1, Dubnica nad Váhom	28	5	4	5	2		44
5	Peniaško	Filip	IX. A	ZŠ Želiezovce	31	5	4	1			41
6	Chudá	Fatima	9.	SCŠ Marianum	27	5	4	0	2		38
7	Víťazková	Daniela	IX. B	ZŠ Sečovská Polianka	27						27
8	Sirotiar	Matej	IX. A	ZŠ s MŠ Oravské Veselé	15	5	5				25
9	Falis	Matúš	kvarta	G A. Vrábla, Levice	23						23
10	Dolník	Matej	kvarta	G A. Vrábla, Levice	14	1		3	1		19
11	Hornyáková	Viktória	tercia	G P. Pázmáňa, Nové Zámky	15						15
12	Pavčo	Jakub	kvarta	G A. Vrábla, Levice	14						14
13	Čierna	Angelika	kvarta	G A. Kmeťa, Banská Štiavnica	13						13
13	Druska	Juraj	8. A	ZŠ s MŠ Liptovská Teplá	12	1					13
13	Jacečko	Michal	8. A	ZŠ Duchnovičova, Medzilaborce	13						13
16	Szabó	Tomáš	IX. A	ZŠ Želiezovce	12						12
17	Kožehubová	Ivona	7. A	ZŠ E. M. Šoltésovej, Krupina	11			0			11
17	Perešíni	Martin	7. D	ZŠ Radvanská, Banská Bystrica	10	1			1	1	11
17	Sučík	Samuel			11						11
20	Petríková	Michaela	VIII.	ZŠ Lehota	9						9
21	Kopálová	Katarína	kvarta	G A. Kmeťa, Banská Štiavnica	8						8
22	Melošová	Veronika	tercia	G J. Chalupku, Brezno	5	0	0	0	1		6
23	Balogh	Tamás	2. C	G P. Pázmáňa, Nové Zámky	5						5
23	Brandýs	Matúš	8. B	ZŠ s MŠ Oravské Veselé	5						5
23	Dudáková	Zuzana	kvarta	G A. Kmeťa, Banská Štiavnica	7	0	0			2	5
23	Mózerová	Barbora	kvarta	G A. Kmeťa, Banská Štiavnica	5						5
23	Vitál	Jaroslav	kvarta	G A. Vrábla, Levice	5						5
28	Kiss	Andrej	2. C	G P. Pázmáňa, Nové Zámky	4						4
29	Kollárová	Katarína	9.	ZŠ Nesvady	3						3
30	Kordíková	Katarína	kvarta	G A. Kmeťa, Banská Štiavnica	2						2
30	Kubánek	Dominik	VIII. B	ZŠ s MŠ Oravské Veselé	2			0			2
30	Šuľová	Marianna	6.A	ZŠ Postupimská 37, Košice	2						2
33	Biela	Dominika	kvarta	G A. Kmeťa, Banská Štiavnica	1						1
33	Bukovcová	Marcela	sekunda	G J. Chalupku, Brezno	1						1
35	Koscelanský	Samuel	tercia	G Snina	0						0
35	Skrip	Marián	sekunda	G Snina	0						0
35	Šatková	Slávka	7. B	ZŠ Hugolína Gavloviča, Pruské	0						0
35	Zorvan	Peter	kvarta	G A. Kmeťa, Banská Štiavnica	0						0

Kategória C

Por.	Priezvisko	Meno	Škola	PS	3	4	5	6	M	Spolu
1	Durila	Michal	G Komenského 13, Hlohovec	37	5	3	5	5		55
2	Leššová	Lívia	G Párovská 1, Nitra	28	4	4	5	3		44
3	Hrubják	Karol	G A. Bernoláka, Námestovo	25	4	5	4	5	1	42
3	Rybár	Andrej	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	24	5	3	5	5		42
5	Búlik	Martin	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	26	4	2	5	2		39
5	Makuch	Matej	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	27	2	3	5	2		39
7	Černay	Rastislav	G Komenského 13, Hlohovec	18	2	2	4	5		31
7	Štrbová	Silvia	G Párovská 1, Nitra	14	2	5	5	5		31
7	Žabková	Zuzana	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	19	5	1	1	5		31
10	Povalová	Radoslava	G A. Bernoláka, Námestovo	21			5	5	1	30
11	Banášová	Zuzana	G Komenského 13, Hlohovec	18	5	1	3	2		29
12	Jacková	Dominika	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	18	5		5			28
12	Magyarová	Eva	G Párovská 1, Nitra	28						28
14	Fodorová	Jana	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	15	5	1	5			26
14	Kordová	Zuzana	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	26						26
16	Gulai	Imrich	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	11	4	2	3	5		25
16	Maťúšová	Veronika	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	18	4	2	1			25
18	Adler	Filip	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	20	1	1	1	2	1	24
18	Bódiová	Zuzana	G Párovská 1, Nitra	24						24
20	Rózová	Alexandra	G A. Vrábla, Levice	10	4	2	5	2		23
21	Steuer	Max	G M. R. Štefánika, Šamorín	19						19
22	Benkö	Henrich	G P. Pázmáňa, Nové Zámky	17						17
23	Gazdarica	Matej	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	15						15
23	Rešutík	Peter	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	15						15
25	Kšenzuliak	Filip	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	14						14
25	Majláth	Erik	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	14						14
25	Oszlík	Alexandra	G P. Pázmáňa, Nové Zámky	14						14
28	Lászlóova	Brigita	G Mládežnícka 22, Šahy	13						13
28	Sochová	Eva	G A. Bernoláka, Námestovo	13						13
30	Lehotský	Juraj	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	12						12
31	Kandra	Jakub	G A. Prídavka, Sabinov	11						11
32	Bakošová	Katarína	G Púchov	10						10
32	Černák	Ján	OA Šurany	4	1		5			10
34	Chomutová	Radka	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	8						8
34	Leitner	Matej	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	8	0					8
36	Godorová	Alica	G Šurany	1	0	0	4	2		7
36	Chytilová	Daniela	G A. Kmeťa, Banská Štiavnica	6			1			7
38	Černák	Adam	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	5						5
38	Čimová	Veronika	G Párovská 1, Nitra	5						5
38	Dzúrik	Tomáš	SOUE Banská Bystrica	5						5
38	Marochnič	Ján	SOUE Banská Bystrica	5						5
42	Jančovičova	Adela	G Párovská 1, Nitra	4						4
42	Janšíkova	Daša	G A. Vrábla, Levice	4						4
44	Budinská	Lucia	G A. Kmeťa, Banská Štiavnica	3						3
44	Kaštan	Marek	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	3						3
46	Budáčová	Lucia	PaSA Turčianske Teplice	2						2
47	Letrich	Andrej	PaSA Turčianske Teplice	1						1
47	Montilla	Elys	G A. Kmeťa, Banská Štiavnica	1						1
47	Ševčík	Lukáš	PaSA Turčianske Teplice	1						1
47	Talafús	Ľuboš	PaSA Turčianske Teplice	1						1

Kategória B

Por.	Priezvisko	Meno	Škola	PS	5	6	7	8	M	Spolu
1	Sládek	Filip	G A. Bernoláka, Námestovo	30	5	5	4	5		49
2	Uher	Brian	G Párovská 1, Nitra	29	5		5	3		42
3	Kontárová	Ildikó	G A. M. Szenciziho, Senec	25	5	5	5	1		41
4	Sliačanová	Veronika	BSG D. Tatarku, Poprad	30	5	5				40
5	Hornyák	Zsolt	G P. Pázmáňa, Nové Zámky	23	5	5	5			38
6	Tonhauserová	Ivana	G Párovská 1, Nitra	19	5	5	5	3		37
7	Matejovský	Vladimír	G bl. P. P. Gojdiča, Prešov	26	5	5		2	4	34
8	Žilka	Patrik	G A. H. Škultétyho, Veľký Krtíš	19	5	3	1	3		31
9	Vidličková	Eva	G A. Merici, Trnava	11	5	5	5	2		28
10	Godová	Lucia	G Komenského 13, Hlohovec	9	5	5	5			24
11	Čellár	Matúš	G Párovská 1, Nitra	21						21
12	Balónová	Barbora	G Komenského 13, Hlohovec	7	5	2	5			19
13	Melo	Adrián	G Párovská 1, Nitra	11	4		3			18
14	Svatý	Lukáš	G Párovská 1, Nitra	17						17
15	Hriagyelová	Alexandra	G Mládežnícka 22, Šahy	15						15
16	Sunega	Norbert	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	0	5	5	5			15
17	Chovancová	Katarína	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	14						14
18	Benedeková	Martina	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	13						13
19	Kutnár	Marek	G Párovská 1, Nitra	13						13
20	Balogh	Bence	G P. Pázmáňa, Nové Zámky	12						12
21	Chrien	Kristián	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	12						12
22	Kučerová	Monika	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	11						11
23	Maláčová	Lýdia	G Párovská 1, Nitra	10						10
24	Prešinský	Ján	G Párovská 1, Nitra	10						10
25	Kotry	Lukáš	G Párovská 1, Nitra	9						9
26	Líšková	Monika	G Komenského 13, Hlohovec	2	5	2				9
27	Mitro	Juraj	G J. A. Raymana, Prešov	9						9
28	Piovarči	Tomáš	G Komenského 13, Hlohovec	7						7
29	Ifka	Patrik	G Komenského 13, Hlohovec	6						6
30	Mačicová	Veronika	G Komenského 13, Hlohovec	6						6
31	Bejdová	Vladimíra	G Medzilaborce	5						5
32	Kenkovová	Marieta	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	5						5
33	Kovácsová	Mária	G Mládežnícka 22, Šahy	5						5
34	Kralovič	Ján	SPŠE Piešťany	5						5
35	Múčka	Roman	SPŠE Piešťany	5						5
36	Semancová	Veronika	G bl. P. P. Gojdiča, Prešov	5						5
37	Kollárová	Zuzana	G M. R. Štefánika, Šamorín	4						4
38	Lohinská	Jana	G bl. P. P. Gojdiča, Prešov	4						4
39	Mazúch	Ján	SOUE Banská Bystrica	4						4
40	Petrán	Štefan	G Komenského 13, Hlohovec	4						4
41	Vajdová	Zlatica	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	4						4
42	Ráciková	Monika	G Komenského 13, Hlohovec	3						3
43	Zbojeková	Natália	G Komenského 13, Hlohovec	2						2
44	Müllerová	Lenka	ZSŠOaS, Nové Mesto nad Váhom	1						1
45	Kramárová	Katarína	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	0						0
46	Múková	Katarína	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	0						0
47	Štefanková	Patrícia	G Medzilaborce	0						0
48	Zábranský	Martin	G Párovská 1, Nitra	0						0

Kategória A

Por.	Priezvisko	Meno	Trieda	Škola	PS	7	8	9	10	M	Spolu
1	Herencsár	Albert	7. G	G Z. Kodálya, Galanta	36	4	5	4	5		54
2	Boža	Vladimír	4. C	G D. Tatarku, Poprad	30	5	4	3	5		47
3	Korcsok	Peter	oktáva	G Mládežnícka 22, Šahy	30	4	3	4			41
4	Polačko	Martin	septima A	OG Alejová 1, Košice	27		4	3	3		37
5	Liščinský	Miroslav	septima B	OG Alejová 1, Košice	20	3	4	4			31
5	Plank	Martin	septima A	G A. Merici, Trnava	15	5	2	4	5		31
7	Cehlárik	Dávid	septima A	G A. Merici, Trnava	14	5	4	4	5	2	30
8	Vítek	Radovan	septima	G Párovská 1, Nitra	18	4	3	3			28
9	Hujer	Peter	septima	G Párovská 1, Nitra	15	4	3	5			27
9	Kobza	Vladimír	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	20	5	2				27
11	Gago	Štefan	3. B	G Šurany	19	2	0				21
11	Živčáková	Andrea	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	16	2			3		21
13	Moravčík	Matej	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	20						20
14	Perešíni	Ondrej	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	15						15
15	Kucbel	Maroš	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	14						14
16	Alberty	Roman	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	13						13
16	Ivanecký	Jakub	septima B	OG Alejová 1, Košice	13						13
18	Vrbovská	Mária	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	12						12
19	Flimmel	Samuel	septima	G Púchov	11						11
20	Bukvaj	Ivan	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	10						10
20	Jursa	Jakub	septima A	OG Alejová 1, Košice	10						10
20	Majláth	Martin	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	10						10
20	Sliačan	Jakub	5. A	EG Tisovec	10						10
20	Slovík	Lukáš	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	10						10
25	Pajkoš	Peter	3. B	G Medzilaborce	7						7
25	Sásková	Jana	septima	G Ľ. Štúra, Trenčín	7						7
27	Konôpková	Júlia	3. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	5			1	1	1	6
28	Blesák	Viktor	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	5						5
28	Kapustová	Katarína	3. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	5						5
28	Kucsera	Viktor	septima	G Mládežnícka 22, Šahy	5						5
28	Szabo	Martin	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	5						5
32	Mazalová	Martina	septima A	G M. R. Štefánika, Šamorín	4						4
32	Zubnárová	Katarína	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	4						4
34	Bratinková	Nikoleta	septima	G Mládežnícka 22, Šahy	3						3
34	Oravcová	Zosia	3. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	3						3
36	Hlavatá	Lucia	septima A	G M. R. Štefánika, Šamorín	2						2
36	Žársky	Mário	septima	G Púchov	2						2
38	Dobrota	Tomáš	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	0						0
38	Dunda	Peter	4. A	G Medzilaborce	0						0
38	Gajdoš	Tomáš	4. A	G Medzilaborce	0						0
38	Mišianiková	Lucia	4. B	CG P. U. Olivu Poprad	0						0
38	Nerer	Juraj	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	0						0
38	Petrík	Martin	4. A	CG P. U. Olivu Poprad	0						0
38	Pitoňáková	Iveta	4. A	CG P. U. Olivu Poprad	0						0
38	Repiščáková	Jana	4. B	CG P. U. Olivu Poprad	0						0
38	Szanislo	Tomáš	3. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	0						0

Kategória π

Por.	Priezvisko	Meno	Trieda	Škola	PS	11	12	13	14	Spolu
1	Boža	Vladimír	4. C	G D. Tatarku, Poprad	35	5		5	3	48
2	Szanislo	Tomáš	3. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	36	4	0	4	2	46
3	Sládek	Filip	sexta B	G A. Bernoláka, Námestovo	26	5	0	5	2	38
4	Polačko	Martin	septima A	OG Alejová 1, Košice	22	1				23
5	Hornyák	Zsolt	sexta C	G P. Pázmáňa, Nové Zámky	14					14
6	Marák	Károly	2. A	G H. Selyeho, Komárno	13					13
7	Kobza	Vladimír	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	11					11
8	Bukvaj	Ivan	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	6					6
9	Konôpková	Júlia	3. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	3	1				4
9	Ivanecký	Jakub	septima B	OG Alejová 1, Košice	4					4
11	Kapustová	Katarína	3. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	3					3
11	Vrbovská	Mária	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	3					3
11	Alberty	Roman	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	3					3
11	Rybár	Andrej	1. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	3					3
15	Zubnárová	Katarína	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	1					1
16	Blesák	Viktor	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	0					0