Metodicko-pedagogické centrum, Tomášikova 4, Bratislava

Európsky **sociálny** fond

Projekt je spolufinancovaný Európskou úniou.

Ročník: 13
Číslo: 4
Šk. rok: 2007/2008

Matematický časopis pre žiakov základných a stredných škôl



Kto podceňuje výsledky matematiky, škodí celej vede, lebo ten, kto nepozná matematiku, nemôže poznať exaktné vedy a nemôže pochopiť svet.

Roger Bacon

Redakčná pošta

Milí čitatelia.

Mám pre vás dve správy. Ako to už býva, jedna z nich je dobrá a jedna zlá. Dobrá je tá, že sa nám podarilo zabezpečiť bezplatné sústredenie najlepších riešiteľov v našom školiacom stredisku v Budmericiach 30. 6. – 4. 7. 2008. Druhá už taká pozitívna nie je. Vzhľadom na zmenu v štatúte našej organizácie a rozhodnutie vedenia Metodicko-pedagogického centra je tento 13. ročník posledným ročníkom časopisu MATMIX v MPC. Od budúceho školského roka už Metodicko-pedagogické centrum nebude časopis vydávať. To bol aj dôvod, prečo ste tak dlho museli čakať na toto číslo časopisu – čakali sme na toto rozhodnutie. Urobím všetko pre to, aby sme v jeho vydávaní mohli pokračovať aj v ďalšom roku, ale výsledok tohto snaženia bude vidno až v septembri – na našom webe nájdete aktuálne informácie.

Keďže podpora vydávania časopisu z Európskeho sociálneho fondu nám skončila, ak budeme vydávať časopis v budúcom školskom roku, už to nebude bezplatné. Cenu sme predbežne stanovili na 25 Sk za jedno číslo, aby pokryla náklady na tlač a zasielanie časopisu. V prípade, že si objednáte aspoň 10 kusov časopisu na jednu adresu, dostanete každé číslo len za 20 Sk. V tomto čísle nájdete aj predbežnú objednávku časopisu – vyplnenú nám ju zašlite na našu poštovú alebo e-mailovú adresu. Ak budeme pokračovať v ďalšom školskom roku vo vydávaní časopisu, hneď na jeho začiatku vám zašleme e-mailom potrebné údaje na zaplatenie predplatného.

S prianím skorého stretnutia na sústredení sa s vami lúči

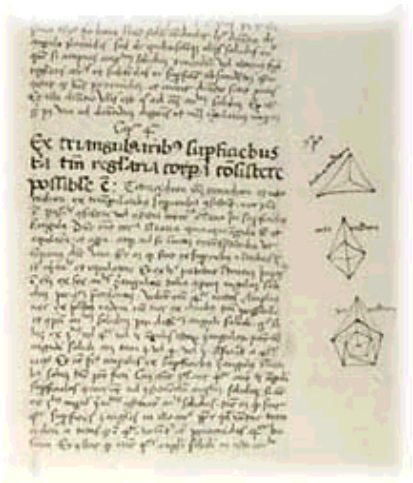
Martin Hriňák

Thomas Bradwardinus – počtár vhodných pomerov

Doba a život

Jedným z významných predstaviteľov oxfordskej školy prírodnej filozofie je aj *Thomas Bradwardinus* (asi 1290 – 1349). Pochádzal z mestečka Chichester. Vyštudoval teológiu na Merton College na Oxfordskej univerzite, ako františkánsky mních sa stal aj kanonikom i kancelárom Katedry sv. Pavla v Londýne. Bol aj osobným kaplánom kráľa Edwarda III. Od 4. júna 1349 bol Bradwardinus ustanovený za arcibiskupa cantenburského. Ako obeť moru zomrel 26. 8. 1349 v Londýne.

Vzťah k prírodným vedám



Bradwardinus bol presvedčený o tom, že všetky príčiny prírodných javov sa dajú vyjadriť matematicky (pomocou čiar, uhlov, číselných pomerov). Vydal odbornú prácu *O pomeroch rýchlosti pri pohybe* (1328). Skúmal závislosť medzi rýchlosťou a silou, ktorá ju spôsobuje. Uvádzal, že rýchlosť je priamo úmerná pôsobiacej sile a nepriamo úmerná odporu, teda hmotnosti, a treniu. Z matematiky napísal práce: *Praktická aritmetika*, *O teoretickej aritmetike*, *Teoretická geometria*, *Traktát o spojitosti*. V nich skúmal napríklad aj pravidelné mnohouholníky, izometrické vlastnosti kruhu a gule, pomery iracionálnych čísiel, vypĺňanie priestoru pomocou pravidelných mnohostenov. Zvlášť zaujímavé úvahy viedol Bradwardinus o spojitosti. Odmietal názor, že kontinuum pozostáva z konečného počtu nedeliteľných častí, ale aj tvrdenie, že spojité možno dostať ako nekonečne veľa nedeliteľného. Žiadne kontinuum sa nedá zložiť z nekonečne veľa nedeliteľných. V podstate už vo svojej dobe rozlišoval aktuálne a potenciálne nekonečno. V *Traktáte o pomeroch* jasne odlíšil počítanie s kvantitami veličín od výpočtov s prostými číslami. Pochopil pojem funkcia, jej argument a hodnotu funkcie.

Filozof a teológ

Vystúpil proti pelagiánskym názorom, podporil názor na priamu všemohúcnosť Boha prísnou determináciou. V práci *De causa Dei* písal o možnostiach všetko poznávajúcej vedy. Bol následníkom učeného Dunsa Scota (1270 – 1308), ktorý uprednostňoval vôľu pred poznávaním (pretože aktívna vôľa usmerňuje intelekt), ale za vedu považoval v prvom rade prírodnú vedu (náboženské dogmy sú exaktne nedokázateľné, ale majú praktický význam pre ľudské konanie). Bradwardinus začal sústreďovať svoju pozornosť na rôznorodé formy, metódy a netradičné možnosti ľudského uvažovania.

S novým pohľadom

Thomas Bradwardinus nesporne prispel k vytváraniu pojmu funkcia, lebo spoznal, že existuje časový priebeh nejakej fyzikálnej veličiny. Pýtal sa, ako prebieha zmena, hľadal medzi zmenami veličín príslušné pomery. Zvlášť citlivo pristúpil k chápaniu spojitého a diskrétneho, ktoré leží na rozhraní medzi fyzikou, matematikou a filozofiou. Pohyb chápal ako prechod priestorového kontinua časom. Bradwardinus chcel pomocou matematických úvah vysvetliť niektoré vlastnosti základných pojmov: priestoru, času a pohybu.

Dušan Jedinák

Roger Bacon – dôraz na skúsenosť a premýšľanie

Stredoveké štúdiá

Medzi najstaršie vysoké školy patria univerzity v Paríži a v Oxforde, ktoré sa stali bránou k vrcholnej scholastike (vyučovať a učiť sa bolo „in“; čas metafyzického ducha, kde premýšľajúci človek bol viac než stroj a peniaze). Základom stredovekého štúdia bolo sedem slobodných umení: gramatika, rétorika, dialektika, aritmetika, geometria, astronómia a hudba. Jedným z najkritickejších mužov oxfordskej scholastiky bol františkánsky mních *Roger Bacon* (asi 1214 – 1294).

Osudy života

Dôkladnú znalosť všetkých odborov niekdajšej vedy (matematiky, medicíny, teológie a filozofie) získal v Oxforde a v Paríži (1244 – 1250). Mal značný ohlas ako prírodovedec a univerzálny mysliteľ. Viac ako tridsaťročný vstúpil medzi františkánov a dôverne sa oboznámil s ich myšlienkovým svetom. Stretol sa aj s Albertom Veľkým, Alexandrom z Halesu, Bonaventúrom i Tomášom Akvinským. Keď sa jeho priateľ G. Fulconi stal pápežom Klementom IV. (1265 – 1268), požiadal Bacona o zaslanie jeho diela. Za kritiku panovníkov i rádových predstavených sa Bacon dostal do kláštorného väzenia v Paríži aj Oxforde (1271 – 1292). Zomrel opustený a neuznaný.



Roger Bacon zvýrazňoval úlohu znalosti jazykov (hebrejčiny, gréčtiny, arabčiny) pre lepšie pochopenie diel Aristotela, Avicenu i Averroesa, ale aj Biblie. Pri skúmaní prírodných javov požadoval väčší dôraz na pokus, fyzikálnu skúsenosť. Bez skúsenosti nemožno nič dostatočne poznať... Iba skúsenosť dáva istotu, a nie logický dôkaz. Sám rozpracoval niektoré fyzikálne idey, napr. v optike, magnetizme a praktickej fyzike (využitie strelného prachu, vízia nových technických prostriedkov). Zovšeobecnenie vnútornej a vonkajšej skúsenosti videl v abstrakcii a matematizácii, ktorú treba následne preveriť v praxi. Na ceste za experimentálnym poznaním podporoval vnútornú intuíciu, ši-

kovnosť rúk a matematické zovšeobecnenie. V optike, astronómii i v teórii hudby odhalil matematickú povahu vecí. Krásu videl prameniť zo svetla a harmónie.

Smerom k istote

V diele *Opus maius* (Väčšie dielo) uvažoval o príčinách ľudskej nevedomosti, o hlbšom vzťahu medzi filozofiou a teológiou, o využití náuk o jazyku, o význame matematiky a experimentálnom poznaní i o etike. *Opus minor* (Menšie dielo) je súhrnom jeho najdôležitejších myšlienok, *Opus tertium* (Tretie dielo) je prehľadom téz hlavného spisu. Filozofia rozvíja božskú múdrosť pomocou vedy a umenia. Roger Bacon spájal idealizmus a empirizmus, dôsledne odlišoval teológiu a profánne vedy. Uprednostnil výskum konkrétnych predmetov proti prílišnému odvolávaniu sa na autority. Uznal, že experiment je nielen zdrojom poznania, ale aj rozhodujúcim kritériom pravdivosti. Ľudský rozum a skúsenosť vnímal ako nespochybniteľné autority v oblasti prírodných vied. Zdôrazňoval, že exaktné skúmanie reálnych skutočností spolu s matematickým popisom vedie ku koreňom istoty. Ocenil nevyhnutnosť metodickej precíznosti, exaktnosti a dôslednosti v overovaní prírodovedných poznatkov.

Experiment a myslenie



Matematiku (v širšom a súdobom zmysle) vnímal ako myšlienkový postup najbližší prirodzenému poznávaniu cez skúsenosť a intelektuálne uvažovanie. Matematické úkony sú prístupné už deťom. Pomerne dôrazne naznačil: „*Kto podceňuje výsledky matematiky, škodí celej vede, lebo ten, kto nepozná matematiku, nemôže poznať exaktné vedy a nemôže pochopiť svet.*“ Matematické poznatky vnímal ako základ všetkého vedeckého poznania a odkázal aj nám: „*Chcel by som vysloviť predpoveď, že čím viac záhad prírody rozriešime, tým viac odvetví matematiky budeme nútení používať.*“ Uprednostnil až mystickú intuíciu, ktorú sa snažil preverovať experimentom a popisovať matematicky. Máme dva spôsoby poznávania: špekuláciu (teóriu) a experiment. Pochopil, že prírodné vedy majú viesť ľudí k zdokonaleniu sveta, v ktorom žijeme. Vyznačil význam i úlohy experimentálnych skúseností, aby vychádzajúc z teórie smerovali k matematizácii celého ľudského poznania. Všetko poznanie závisí od teoretickej sily matematiky.

Aj dnes si uvedomujeme, spolu s Rogerom Baconom, podstatnú odlišnosť zmyslového a rozumového poznávania. Vedecké postupy môžu predstavovať premostenie k harmonickej a pevnej syntéze zjavenej viery a ľudského intelektu, aby sme postupne vylúčili príčiny našich omylov, pretože kým zotrvávajú v ľudskom srdci, rozum nemôže uznať pravdu. Jeho kritický duch nám ponúkol zvýraznenie významu experimentálneho a matematického poznávania voči zostarnutým mienkam autorít. Napriek

ťažkému životnému osudu a nepochopeniu zostal Roger Bacon verný presvedčeniu, že rozum i viera môžu nájsť oporu v experimentálnej vede i kresťanskej teológii.

Dušan Jedinák

Korešpondenčná súťaž v školskom roku 2007/2008

Riešenia 3. série úloh

1. Rozdeľte sto vriec obilia medzi piatich ľudí tak, aby druhý dostal o toľko viac ako prvý, o koľko tretí viac ako druhý, štvrtý viac ako tretí a piaty viac ako štvrtý. Okrem toho majú prví dvaja dostať sedemkrát menej ako zvyšní traja.

Riešenie: Označme rozdiel medzi množstvami druhého a prvého ako x a množstvo, ktoré dostal prvý y. Potom budú jednotlivé množstvá obilia, ktoré dostali ľudia, x, $x+y$, $x+2y$, $x+3y$, $x+4y$. Keďže súčet týchto množstiev je 100, dostávame rovnicu

$$x+(x+y)+(x+2y)+(x+3y)+(x+4y)=100,$$

po úprave

$$5x+10y=100,$$
$$x+2y=20.$$

Druhú rovnicu dostaneme z druhej podmienky – prví dvaja majú dostať sedemkrát menej ako zvyšní traja, teda má platiť

$$7\left[x+(x+y)\right]=(x+2y)+(x+3y)+(x+4y),$$

po úprave

$$14x+7y=3x+9y,$$
$$11x=2y.$$

Budeme teda riešiť sústavu

$$x+2y=20,$$
$$11x=2y.$$

Dosadením z druhej rovnice do prvej dostávame, že

$$x+11x=20,$$
$$x=\frac{20}{12}=\frac{5}{3}.$$

Dosadením do rovnice pre y dostávame, že

$$y=\frac{11}{2}x,$$
$$y=\frac{11}{2}\cdot\frac{5}{3}=\frac{55}{6}.$$

Spätným dosadením dostávame, že hľadané množstvá sú $\frac{5}{3}$, $\frac{65}{6}$, 20, $\frac{175}{6}$ a $\frac{115}{3}$ vreca.

Komentár (opravoval Martin Hriňák): Viacero chybných riešení pozostávalo z predpokladu, že vrecia sa nesmú deliť. Našou úlohou však nebolo deliť vrecia, ale obilie, ktorého bolo 100 vriec.

2. Dve rovnaké nádoby sú naplnené rovnakým vínom. Z prvej zoberieme x litrov vína a dolejeme tam x litrov čistej vody. Potom z tejto zmesi odlejeme opäť x litrov a dolejeme tam x litrov čistej vody. Z druhej nádoby zoberieme $2x$ litrov vína a dolejeme tam $2x$ litrov čistej vody. Potom z tejto zmesi odlejeme opäť $2x$ litrov a dolejeme tam $2x$ litrov čistej vody. Po tomto prelievaní je v prvej nádobe koncentrácia vína $\frac{25}{16}$-krát vyššia ako v druhej nádobe. Vypočítajte, akú časť objemu jednej nádoby predstavuje x litrov.

Riešenie: Označme objem jednej nádoby V litrov. Koncentrácia v prvej nádobe bude po prvom prelievaní $\frac{V-x}{V}$, pretože sme z V litrov vína odobrali x litrov, ale celkový objem riedeného vína ostal V. Po druhom prelievaní to bude

$$\frac{(V-x)-x\cdot\frac{V-x}{V}}{V}=\left(\frac{V-x}{V}\right)^2,$$

pretože po prvom prelievaní bolo v nádobe už len $V-x$ litrov vína a odobrali sme $x\cdot\frac{V-x}{V}$ litrov vína, pretože v odoberaných x litroch je víno len v koncentrácii $\frac{V-x}{V}$. Analogicky dostaneme, že v druhej nádobe bude koncentrácia vína

$$\left(\frac{V-2x}{V}\right)^2.$$

Na základe informácie zo zadania dostávame, že by malo platiť

$$\left(\frac{V-x}{V}\right)^2=\frac{25}{16}\cdot\left(\frac{V-2x}{V}\right)^2.$$

Výrazy v zátvorkách musia byť nezáporné, pretože inak by sa nedalo odlievať príslušné množstvo z nádob. Preto môžeme odmocniť a dostaneme, že platí

$$\frac{V-x}{V}=\frac{5}{4}\cdot\frac{V-2x}{V}.$$

Po prenásobení V a upravení dostávame, že platí

$$\frac{6}{4}x = \frac{1}{4}\cdot V,$$

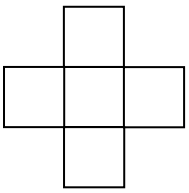
odkiaľ dostávame predelením nenulovým číslom V a úprave, že platí

$$\frac{x}{V} = \frac{1}{6}.$$

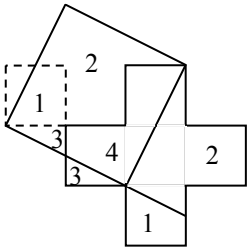
x litrov predstavuje $\frac{1}{6}$ objemu nádoby.

Komentár (opravoval Martin Hriňák): Jeden bod ste stratili, keď ste pri odmocňovaní zabudli spomenúť, že oba odmocňované výrazy sú nezáporné. Ak ste úlohu riešili cez kvadratickú rovnicu, tak vám vyšiel druhý koreň $\frac{9}{14}$, ktorý však nevyhovuje, pretože $2\cdot\frac{9}{14} = \frac{18}{14} > 1$, a teda by ste museli pri druhom prelievaní preliať viac vína, ako bolo v nádobe, čo nie je možné. Ak ste ho zabudli vylúčiť, stratili ste 1 bod.

3. Rozstrihnite znak plus zložený z piatich jednotkových štvorcov na štyri časti tak, aby sa z nich dal zložiť štvorec.



Riešenie: Jedna z možností, ako sa dá útvar rozložiť, je na obrázku, pričom druhý strih (ktorým odstrihneme časti 1 a 3) robíme cez stredy príslušných strán štvorcov.



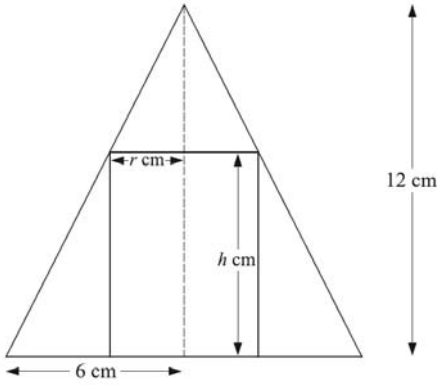
Komentár (opravoval Martin Hriňák): Ak ste našli riešenie, ktoré pozostávalo z iného počtu častí, získali ste 0 bodov. Za samotné rozdelenie znaku plus ste získavali 1 bod, za ukázanie, že sa z uvedených častí dá poskladať štvorec, ste mohli získať zvyšné 4 body (bolo potrebné ukázať poskladanie štvorca a jeho korektnosť). Za dôkaz, že strana poskladaného štvorca je $\sqrt{5}$, ste mohli získať 1 bod.

4. Na tabuli sú napísané všetky prirodzené čísla od 1 po 2008 vrátane. S číslami sú povolené len dve operácie: miesto dvoch čísel môžete napísať ich súčet alebo absolútnu hodnotu ich rozdielu, pričom pôvodné čísla z tabule zmažete. Zistite hodnotu najmenšieho prirodzeného čísla, ktoré môže ostať na tabuli po 2007 krokoch.

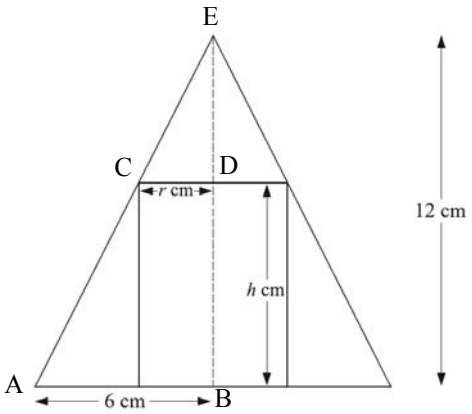
Riešenie: Ak nahradíme dve čísla ich súčtom alebo rozdielom (absolútnu hodnotu môžeme z našich úvah vynechať – budeme odčítavať od väčšieho čísla menšie, prípadne rovnajúce sa), počet nepárnych čísel na tabuli sa buď nezmení (ak medzi zmazanými číslami bolo jedno párne a jedno nepárne, alebo boli obe párne) alebo klesne o 2 (ak boli obe nepárne). Na začiatku bolo na tabuli 1004 nepárnych čísel. Na konci bude len jedno číslo, a teda musí byť párne. Preto najmenším prirodzeným číslom, ktoré môžeme dostať, je 2 (najmenšie číslo, ktoré môžeme na tabuli dostať, je 0). Teraz ešte musíme ukázať, že to je možné. Uvažujme čísla $2k-1$, $2k$, kde $k \in \mathbb{N}$. Ich rozdielom je číslo 1. V prvom kroku takto nahradíme všetky susediace dvojice ich rozdielom. Dostaneme 1004 čísel 1. Tie rozdelíme na 501 párov čísel 1 – 1, ktoré v druhom kroku od seba odčítame. Ostanú nám na tabuli už len dve čísla 1 a nuly, ktoré postupne sčítame a dostaneme súčet 2. Ak by sme dve jednotky odčítali, dostali by sme najmenšie celé číslo, teda 0.

Komentár (opravovala Katarína Škrovinová): Väčšina riešiteľov tvrdila, že ak sa pri každom kroku budú snažiť dostať čo najmenšie číslo, tak aj na konci zostane na tabuli najmenšie číslo. To ale nemusí byť pravda, čo ak by existoval nejaký postup, pri ktorom by na konci zostali na tabuli dve pomerne veľké čísla, ale ich rozdiel by bol 1? Vašou úlohou bolo dokázať, že ak by sme použili akýkoľvek postup, tak číslo 1 na konci dostať nemôžeme. Kľúčom k riešeniu bolo všimnúť si vlastnosť, ktorá sa pri žiadnom kroku nezmení, tzv. invariant. V tomto príklade to bola parita počtu nepárnych čísel na tabuli.

5. Do kužeľa je vpísaný valec tak, že rovina podstavy oboch útvarov je totožná a horná podstava valca sa dotýka povrchu kužeľa. Na obrázku je zobrazený kolmý priečny rez kužeľom cez jeho vrchol. Vyjadrite objem vpísaného valca len pomocou polomeru jeho podstavy.



Riešenie: Pre jednoznačnosť vyjadrovania si označme jednotlivé body na obrázku takto:



Z podobnosti trojuholníkov *CDE* a *ABE* dostávame, že platí

$$\frac{|CD|}{|AB|}=\frac{|DE|}{|BE|},$$

po dosadení známych veličín

$$\frac{r}{6}=\frac{12-h}{12}.$$

Po upravení dostávame, že

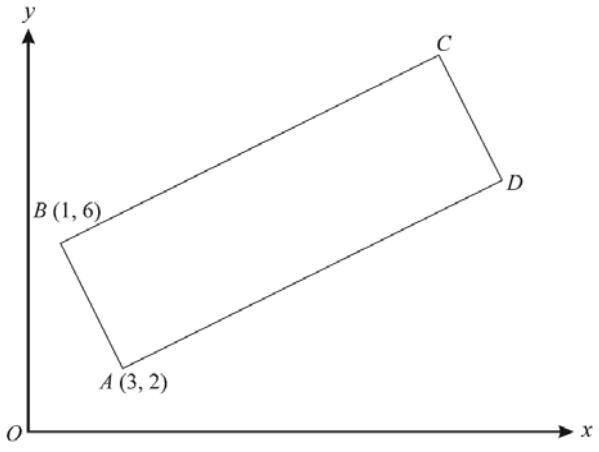
$$h=12-2r=2(6-r).$$

Nakoniec dostávame, že sa objem valca rovná

$$V=\pi r^2 h=2\pi r^2(6-r).$$

Komentár (opravovala Katarína Škrovinová): Body ste najčastejšie strácali, ak ste zaokrúhľovali, a tvárili ste sa, že počítate s presnou hodnotou.

6. Na obrázku je znázornený obdĺžnik *ABCD*. Bod *A* má súradnice $(3,2)$, bod *B* má súradnice $(1,6)$ a bod *C* patrí priamke $y=x-1$. Určte jeho obvod.



Riešenie: Najprv si vyjadríme rovnicu priamky *AB*. Predpokladajme, že je v tvare $y = ax + b$. Potom musí platiť

$$6 = a + b,$$
$$2 = 3a + b.$$

Odčítaním prvej rovnice od druhej dostávame, že $-4 = 2a$, teda $a = -2$. Dosadením do prvej rovnice a upravením dostaneme, že $b = 8$. Rovnica priamky *AB* je potom

$$y = -2x + 8,$$

jej smernica je -2. Priamka *BC* je kolmá na priamku *AB*, preto jej smernica bude $-\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$. Rovnicu priamky *BC* budeme preto hľadať v tvare

$$y = \frac{1}{2}x + c.$$

Keďže bod *B* patrí priamke *BC*, musí platiť

$$6 = \frac{1}{2} \cdot 1 + c,$$

teda po úprave

$$c = \frac{11}{2}.$$

Dosadením do rovnice pre priamku *BC* a upravením dostávame, že priamka *BC* má rovnicu

$$y = \frac{1}{2}(x + 11).$$

Bod *C* patrí prieniku priamky *BC* a $y = x - 1$, teda musí platiť

$$y = \frac{1}{2}(x + 11),$$
$$y = x - 1.$$

Dosadením za *y* z druhej rovnice do prvej dostávame, že musí platiť

$$x - 1 = \frac{1}{2}(x + 11).$$

Táto lineárna rovnica má jediné riešenie $x = 13$. Dopočítaním dostávame, že $y = 12$, teda bod *C* má súradnice $(13,12)$.

Pre obvod *o* obdĺžnika *ABCD* platí

$$o = 2 \cdot (|AB| + |BC|).$$

Na základe Pytagorovej vety si vypočítame, že

$$|AB| = \sqrt{(3-1)^2 + (2-6)^2} = 2\sqrt{5},$$
$$|BC| = \sqrt{(13-1)^2 + (12-6)^2} = 6\sqrt{5}.$$

Obvod obdĺžnika *ABCD* sa potom rovná

$$o = 2 \cdot \left(2\sqrt{5} + 6\sqrt{5}\right) = 16\sqrt{5}\,.$$

Komentár (opravoval Michal Takács): Ak ste súradnice bodu *C* odhadli narysovaním bez výpočtu, tak ste mohli získať nanajvýš 2 body.

7. Určte presnú hodnotu čísla

$$\frac{\cos 1° + \cos 2° + \cos 3° + \cdots + \cos 44°}{\sin 1° + \sin 2° + \sin 3° + \cdots + \sin 44°}\,.$$

Riešenie: Vieme, že pre všetky reálne čísla a a b platí

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2},$$

$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}.$$

Ak zvolíme $b = 45° - a$, dostaneme, že platí

$$\cos a + \cos\left(45° - a\right) = 2\cos\frac{45°}{2}\cos\frac{45° + 2a}{2},$$

$$\sin a + \sin\left(45° - a\right) = 2\sin\frac{45°}{2}\cos\frac{45° + 2a}{2}.$$

Potom pre číslo *V* zo zadania platí

$$V = \frac{2\cos\frac{45°}{2}\cdot\left(\cos\frac{47°}{2} + \cos\frac{49°}{2} + \cdots + \cos\frac{89°}{2}\right)}{2\sin\frac{45°}{2}\cdot\left(\cos\frac{47°}{2} + \cos\frac{49°}{2} + \cdots + \cos\frac{89°}{2}\right)} = \frac{\cos\frac{45°}{2}}{\sin\frac{45°}{2}} = \operatorname{cotg}\frac{45°}{2}.$$

Vieme, že pre $0 < x < 45°$ platí

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1 + \cos 2x}{\sin 2x}.$$

Keďže platí

$$\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

dostávame, že

$$V = \frac{1 + \cos 45°}{\sin 45°} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 + \sqrt{2}\,.$$

Komentár (opravoval Michal Takács): Ak ste nevyčíslili hodnotu $\operatorname{cotg}\frac{45°}{2}$, stratili ste 1 bod.

8. Do všetkých políčok tabuľky $n \times n$, pričom n je nepárne, je vpísané buď číslo $+1$ alebo -1. Označme p_i súčin čísel v i-tom riadku a q_i súčin čísel v i-tom stĺpci, $1 \le i \le n$. Dokážte, že

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n + q_1 + q_2 + \ldots + q_n \neq 0.$$

Riešenie: Súčin všetkých čísel v tabuľke si môžeme vyjadriť dvomi rôznymi spôsobmi – po riadkoch a po stĺpcoch, a tak ľahko nahliadneme, že platí

$$p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n,$$

pričom vieme, že každé p_i a q_i sa v absolútnej hodnote rovná 1. Označme s počet jednotiek medzi p_i a t počet jednotiek medzi q_i. Čísla s a t musia mať rovnakú paritu. Potom

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n + q_1 + q_2 + \ldots + q_n = s - (n-s) + t - (n-t) = 2(s+t-n).$$

Keďže s a t majú rovnakú paritu, tak $s+t$ je párne číslo. Potom je $s+t-n$ číslo nepárne, a teda rôzne od nuly. Tým sme dokázali požadované tvrdenie.

Komentár (opravoval Martin Hriňák): Veľa riešení spočívalo v tom, že ste vyšli z tabuľky, v ktorej boli samé 1, a postupne ste ich menili na -1. Pri prvej výmene sa celkový súčet zmenší o 4, ale problém je v tom, že pri ďalších to už tak nemusí byť. Ak ste zabudli na to, že pri výmenách 1 za -1 sa môže celkový súčet nezmeniť, resp. môže aj narásť o 4, strácali ste po 1 bode. Ďalšou chybou (za 1 bod) týchto riešení bolo, že ste neukázali, resp. nespomenuli, že týmito výmenami viete dosiahnuť ľubovoľnú tabuľku.

9. Pre prirodzené číslo n platí, že číslo $2n$ má 28 prirodzených deliteľov a číslo $3n$ 30 prirodzených deliteľov. Určte, koľko prirodzených deliteľov môže mať číslo $6n$.

Riešenie: Uvažujme prvočíselný rozklad čísla n v tvare

$$n = 2^a \cdot 3^b \cdot p_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k},$$

kde $a, b \in \mathbb{N}_0$, p_i sú navzájom rôzne prvočísla rôzne od 2 a 3, $e_i \in \mathbb{N}$ pre všetky $1 \le i \le k$. Pre počet deliteľov $D(2n)$ čísla $2n$ platí

$$D(2n) = (a+2)(b+1)(e_1+1)\ldots(e_k+1).$$

Podobne pre počet deliteľov $D(3n)$ čísla $3n$ platí

$$D(3n) = (a+1)(b+2)(e_1+1)\ldots(e_k+1).$$

Máme teda riešiť sústavu dvoch rovníc

$$28 = (a+2)(b+1)(e_1+1)\ldots(e_k+1),$$
$$30 = (a+1)(b+2)(e_1+1)\ldots(e_k+1).$$

Výraz $(e_1+1)\ldots(e_k+1)$ je deliteľom čísel 28 a 30. Keďže najväčší spoločný deliteľ týchto dvoch čísel je 2, sú len dve možnosti – buď je to 1 alebo 2.

Rozoberieme najprv prípad $(e_1+1)\ldots(e_k+1)=2$. Keďže $e_i \in \mathbb{N}$, tak nutne $k=1$ a $e_1=1$. Potom musí platiť

$$14=(a+2)(b+1),$$
$$15=(a+1)(b+2).$$

Odčítaním prvej rovnice od druhej dostávame, že platí

$$a=b+1$$

a dosadením do prvej rovnice dostávame kvadratickú rovnicu

$$b^2+4b-11=0,$$

ktorá nemá celočíselné riešenie, teda $(e_1+1)\ldots(e_k+1)\neq 2$.

Dostali sme, že musí platiť $(e_1+1)\ldots(e_k+1)=1$. Keďže však $e_i \in \mathbb{N}$, musí byť $k=0$. Potom musí platiť

$$28=(a+2)(b+1),$$
$$30=(a+1)(b+2).$$

Odčítaním prvej rovnice od druhej dostávame, že platí

$$a=b+2.$$

Dosadením do prvej rovnice dostávame kvadratickú rovnicu

$$b^2+5b-24=0,$$

ktorá má korene $b_1=-8$ a $b_2=3$. Prvý koreň nevyhovuje, lebo nie je nezáporný. Preto $b=3$ a potom $a=5$. Hľadané číslo *n* sa potom rovná

$$n=2^5\cdot 3^3=864$$

a číslo $6n=2^6\cdot 3^4$ má potom

$$D(6n)=(6+1)(4+1)=35$$

deliteľov.

Komentár (opravoval Martin Hriňák): Za zlé zápisy vzorca na výpočet počtu kladných deliteľov prirodzeného čísla, ste strácali 1 bod. Ak ste nedostatočne zdôvodnili jednotlivé prípady, ktoré ste rozoberali, strácali ste 1 až 2 body. Za nájdenie čísla vyhovujúceho zadaniu a jeho overenie ste mohli získať 1 bod.

10. Označme *a*, *b*, *c* dĺžky strán trojuholníka. Dokážte, že potom platí nerovnosť

$$3a^2+2bc>2ab+2ac.$$

Riešenie: Keďže sú *a*, *b*, *c* dĺžky strán trojuholníka, platí trojuholníková nerovnosť, ktorú môžeme zapísať v dvoch rôznych tvaroch:

$$a+c>b,$$
$$a+b>c.$$

Potom je výraz $(a-b+c)(a+b-c)$ kladný. Sčítaním s dvoma ďalšími nezápornými výrazmi $(a-b)^2$ a $(a-c)^2$ dostávame, že platí

$$(a-b+c)(a+b-c)+(a-b)^2+(a-c)^2>0.$$

Upravením postupne dostávame

$$a^2-(b-c)^2+(a-b)^2+(a-c)^2>0,$$
$$a^2-b^2+2bc-c^2+a^2-2ab+b^2+a^2-2ac+c^2>0,$$
$$3a^2+2bc-2ab-2ac>0,$$
$$3a^2+2bc>2ab+2ac,$$

čo sme chceli dokázať.

Komentár (opravovala Katarína Škrovinová): Najčastejším spôsobom dôkazu vo vašich riešeniach bolo upravenie nerovnosti, ktorú treba dokázať, na nejakú inú, o ktorej už vieme povedať, že platí. Toto možno považovať za dôkaz len v tom prípade, ak boli použité iba ekvivalentné úpravy. Ale to treba aj spomenúť v riešení.

11. Nájdite všetky reálne čísla *x*, ktoré spĺňajú rovnicu

$$\frac{3x+3}{\sqrt{x}}=4+\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}.$$

Riešenie: Aby boli odmocniny definované, musí platiť $x>0$, pretože v menovateli na ľavej strane je *x* a na pravej strane je

$$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0.$$

Odhadneme výraz na ľavej strane:

$$\frac{3x+3}{\sqrt{x}}=3\cdot\frac{x+1}{\sqrt{x}}=3\cdot\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\geq 3\cdot 2=6,$$

pretože na základe AG-nerovnosti platí

$$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\geq 2\cdot\sqrt{\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}}=2,$$

pričom rovnosť nastáva len pre $x=1$.

Odhadneme aj výraz na pravej strane. Pre všetky reálne čísla *x* platí

$$3x^2-6x+3=3\cdot(x-1)^2\geq 0,$$

pričom rovnosť nastáva len pre $x=1$. Pripočítaním výrazu $(x+1)^2$ k obom stranám nerovnosti dostávame, že platí

$$4x^2-4x+4\geq(x+1)^2.$$

Odmocnením oboch strán, ktoré sú nezáporné, a predelením kladným číslom $\sqrt{x^2-x+1}$ dostaneme

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} \leq 2 .$$

Z toho dostávame, že pravá strana je maximálne 6, pričom rovnosť nastáva pre $x=1$. Keďže ľavá strana má hodnotu aspoň 6, jediná možnosť, kedy nastane rovnosť, je $x=1$, čo je jediným riešením rovnice.

Komentár (opravoval Martin Hriňák): Za nájdenie riešenia ste mohli získať 1 bod.

12. Uvažujme 2008-prvkovú množinu *M* prirodzených čísel, pričom žiadne z nich nemá prvočíselný deliteľ väčší ako 28. Dokážte, že množina *M* obsahuje aspoň jednu štvorprvkovú podmnožinu, ktorej súčin prvkov je štvrtou mocninou prirodzeného čísla.

Riešenie: Prvočísla, ktoré môžu vystupovať v prvočíselných rozkladoch prvkov množiny *M*, sú 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 a 23, teda každý prvok m_i, $i \leq 1 \leq 2008$, sa dá zapísať v tvare

$$m_i = 2^{a_{1,i}}.3^{a_{2,i}}.5^{a_{3,i}}.7^{a_{4,i}}.11^{a_{5,i}}.13^{a_{6,i}}.17^{a_{7,i}}.19^{a_{8,i}}.23^{a_{9,i}} .$$

Je ich 9. Pre kombinácie parity exponentov čísel m_i máme $2^9 = 512$ možností. Keďže $2008 > 512$, existujú medzi prvkami množiny *M* dva, označme ich m_i a m_j, také, že všetky zodpovedajúce si exponenty v ich prvočíselných rozkladoch majú rovnakú paritu. To znamená, že ich súčin je druhou mocninou prirodzeného čísla, teda platí

$$m_i m_j = b_{ij}^2 = c_1^2 .$$

Číslo c_1 má tie isté prvočíselné delitele ako prvky množiny *M*. Odstráňme tieto prvky m_i a m_j z množiny *M*. Ostalo v nej 2006 prvkov. Opäť medzi nimi existujú dva také, že ich súčin je druhou mocninou prirodzeného čísla. Takto dostaneme číslo c_2 a postupujeme rovnako ďalej. Keďže $2008 - 2 \cdot 512 = 984 > 512$, existuje aspoň 513 takýchto dvojíc prvkov z množiny *M*, ktoré nám vytvoria aspoň 513 čísel c_i. Na ne teraz opäť môžeme aplikovať tento postup – medzi nimi sa nachádzajú aspoň dve, c_u a c_v také, že ich súčin je druhou mocninou prirodzeného čísla:

$$c_u c_v = n^2 .$$

Predpokladajme, že platí

$$c_u^2 = b_{op}^2 = m_o m_p ,$$
$$c_v^2 = b_{qr}^2 = m_q m_r .$$

Potom

$$m_o m_p m_q m_r = b_{op}^2 b_{qr}^2 = c_u^2 c_v^2 = \left(c_u c_v\right)^2 = n^4,$$

teda čísla m_o, m_p, m_q, m_r sú hľadanými prvkami množiny M (vzhľadom na postup, ako sme ich našli, je zrejmé, že sú rôzne).

Komentár (opravoval Martin Hriňák): Túto úlohu sa nepodarilo vyriešiť nikomu. Najčastejšie chyby boli v nadsadení počtu možností pre exponenty, resp. ich nesprávne spočítanie.

13. Zistite, či platí nasledujúce tvrdenie:

Ak x a y sú reálne čísla, pričom $y \geq 0$ a $y\left(y+1\right) \leq \left(x+1\right)^2$, potom $y\left(y-1\right) \leq x^2$.

Riešenie: Ak $0 \leq y \leq 1$, potom tvrdenie platí, pretože

$$y\left(y-1\right) \leq 0 \leq x^2.$$

Ďalej uvažujme $y > 1$. Ak $x \leq y - \frac{1}{2}$, potom $2x + 1 - 2y \leq 0$ a platí

$$y\left(y-1\right) = y\left(y+1\right) - 2y \leq \left(x+1\right)^2 - 2y = x^2 + 2x + 1 - 2y \leq x^2.$$

Ak $x \geq y - \frac{1}{2}$, potom

$$x^2 \geq y^2 - y + \frac{1}{4} > y^2 - y = y\left(y-1\right).$$

Tým sme dokázali, že tvrdenie platí.

Komentár (opravovala Katarína Škrovinová): Nie je.

14. Nájdite všetky funkcie $f : \left(0,\infty\right) \to \left(0,\infty\right)$, pre ktoré platí

$$f\left(f\left(x\right)\right) = 6x - f\left(x\right).$$

Riešenie: Zvoľme si ľubovoľné $a > 0$. Definujme $a_0 = a$, $a_n = f\left(a_{n-1}\right)$ pre $n \in \mathbb{N}$. Potom dostávame, že musí platiť

$$a_n = f\left(a_{n-1}\right) = f\left(f\left(a_{n-2}\right)\right) = 6a_{n-2} - f\left(a_{n-2}\right) = 6a_{n-2} - a_{n-1}.$$

Dostali sme rekurentné vyjadrenie postupnosti $\left\{a_n\right\}_{n=0}^{\infty}$:

$$a_n = 6a_{n-2} - a_{n-1}.$$

Charakteristická rovnica je

$$x^2 = 6 - x.$$

Jej korene sú $x_1 = 2$ a $x_2 = -3$.

Preto

$$a_n = \alpha \cdot 2^n + \beta \cdot (-3)^n,\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Ak by bol koeficient β nenulový, potom pre dostatočne veľké n bude mať a_n záporné hodnoty, čo je v spore s predpokladom, že funkcia f má kladné hodnoty. Preto $\beta = 0$ a platí

$$a_n = \alpha \cdot 2^n.$$

Dosadením $n = 0$ dostávame, že

$$a = a_0 = \alpha \cdot 2^0 = \alpha,$$

teda

$$\alpha = a$$

a platí

$$a_n = a \cdot 2^n.$$

Dosadením $n = 1$ dostávame, že platí

$$2a = a_1 = f(a_0) = f(a).$$

Keďže na a sme na začiatku kládli len požiadavku $a > 0$, môžeme ho zvoliť ľubovoľné. Znamená to, že jediným kandidátom na riešenie je funkcia $f(x) = 2x$. Jednoduchým výpočtom sa presvedčíme, že vyhovuje rovnici zo zadania:

$$f(f(x)) = 2 \cdot (2x) = 4x = 6x - 2x = 6x - f(x).$$

Existuje jediná funkcia $f(x) = 2x$, ktorá spĺňa podmienky zo zadania úlohy.

Komentár (opravoval Martin Hriňák): Za nájdenie riešenia ste mohli získať 1 bod. Za formuláciu charakteristickej rovnice bez jej korektného zdôvodnenia tiež 1 bod.

Celoštátne kolo Matematickej olympiády kategórie A

Celoštátne kolo Matematickej olympiády kategórie A sa uskutočnilo v Tajove pri Banskej Bystrici v dňoch 13. – 16. apríla 2008. Zúčastnilo sa ho 38 účastníkov. Slávnostné vyhodnotenie sa uskutočnilo na Mestskom úrade v Banskej Bystrici. Za víťazov bolo vyhlásených sedem najlepších riešiteľov:

1. Vladislav Ujházi, Gymnázium Rožňava
2. Martin Melicherčík, Gymnázium Nitra, Párovská
3. Ladislav Bačo, Gymnázium Košice, Poštová
   Michal Spišiak, Gymnázium Bratislava, Gröslingová
5. Tomáš Kocák, Gymnázium Košice, Poštová
6. Miroslav Baláž, Gymnázim Humenné, arm. gen. L. Svobodu
7. Jakub Köry, Gymnázium J. A. Raymana, Prešov

Zadania a riešenia súťažných úloh môžete nájsť na stránke www.olympiady.sk v sekcii Matematická olympiáda.

Martin Hriňák

Výsledkové listiny po 3. sérii úloh

PS označuje počet bodov za predchádzajúce dve série, M meškanie v dňoch. Sme radi, že sme po dlhom čase nemuseli nikomu strhnúť body za odpisovanie – buď ste neodpisovali alebo ste to robili mimoriadne rafinovaným spôsobom.

Kategória Z

Por.	Priezvisko	Meno	Trieda	Škola	PS	1	2	3	4	M	Spolu
1	Papcúnová	Barbora	8. C	ZŠ Mierová 134, Svit	35	5	4	5	2		51
2	Uhlárová	Laura	prima	G Mládežnícka 22, Šahy	33	5	5	5			48
3	Černáková	Barbora	sekunda	G Mládežnícka 22, Šahy	29	5	4	4	5		47
4	Beznák	Samuel	9. A	ZŠ s MŠ C1, Dubnica nad Váhom	28	5	4	5	2		44
5	Peniaško	Filip	IX. A	ZŠ Želiezovce	31	5	4	1			41
6	Chudá	Fatima	9.	SCŠ Marianum	27	5	4	0	2		38
7	Víťazková	Daniela	IX. B	ZŠ Sečovská Polianka	27						27
8	Sirotiar	Matej	IX. A	ZŠ s MŠ Oravské Veselé	15	5	5				25
9	Falis	Matúš	kvarta	G A. Vrábla, Levice	23						23
10	Dolník	Matej	kvarta	G A. Vrábla, Levice	14	1		3	1		19
11	Hornyáková	Viktória	tercia	G P. Pázmáňa, Nové Zámky	15						15
12	Pavčo	Jakub	kvarta	G A. Vrábla, Levice	14						14
13	Čierna	Angelika	kvarta	G A. Kmeťa, Banská Štiavnica	13						13
13	Druska	Juraj	8. A	ZŠ s MŠ Liptovská Teplá	12	1					13
13	Jacečko	Michal	8. A	ZŠ Duchnovičova, Medzilaborce	13						13
16	Szabó	Tomáš	IX. A	ZŠ Želiezovce	12						12
17	Kožehubová	Ivona	7. A	ZŠ E. M. Šoltésovej, Krupina	11			0			11
17	Perešíni	Martin	7. D	ZŠ Radvanská, Banská Bystrica	10	1			1	1	11
17	Sučík	Samuel			11						11
20	Petríková	Michaela	VIII.	ZŠ Lehota	9						9
21	Kopálová	Katarína	kvarta	G A. Kmeťa, Banská Štiavnica	8						8
22	Melošová	Veronika	tercia	G J. Chalupku, Brezno	5	0	0	0	1		6
23	Balogh	Tamás	2. C	G P. Pázmáňa, Nové Zámky	5						5
23	Brandýs	Matúš	8. B	ZŠ s MŠ Oravské Veselé	5						5
23	Dudáková	Zuzana	kvarta	G A. Kmeťa, Banská Štiavnica	7	0	0			2	5
23	Mózerová	Barbora	kvarta	G A. Kmeťa, Banská Štiavnica	5						5
23	Vitál	Jaroslav	kvarta	G A. Vrábla, Levice	5						5
28	Kiss	Andrej	2. C	G P. Pázmáňa, Nové Zámky	4						4
29	Kollárová	Katarína	9.	ZŠ Nesvady	3						3
30	Kordíková	Katarína	kvarta	G A. Kmeťa, Banská Štiavnica	2						2
30	Kubánek	Dominik	VIII. B	ZŠ s MŠ Oravské Veselé	2			0			2
30	Šuľová	Marianna	6.A	ZŠ Postupimská 37, Košice	2						2
33	Biela	Dominika	kvarta	G A. Kmeťa, Banská Štiavnica	1						1
33	Bukovcová	Marcela	sekunda	G J. Chalupku, Brezno	1						1
35	Koscelanský	Samuel	tercia	G Snina	0						0
35	Skrip	Marián	sekunda	G Snina	0						0
35	Šatková	Slávka	7. B	ZŠ Hugolína Gavloviča, Pruské	0						0
35	Zorvan	Peter	kvarta	G A. Kmeťa, Banská Štiavnica	0						0

Kategória C

Por.	Priezvisko	Meno	Škola	PS	3	4	5	6	M	Spolu
1	Durila	Michal	G Komenského 13, Hlohovec	37	5	3	5	5		55
2	Leššová	Lívia	G Párovská 1, Nitra	28	4	4	5	3		44
3	Hrubják	Karol	G A. Bernoláka, Námestovo	25	4	5	4	5	1	42
3	Rybár	Andrej	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	24	5	3	5	5		42
5	Búlik	Martin	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	26	4	2	5	2		39
5	Makuch	Matej	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	27	2	3	5	2		39
7	Černay	Rastislav	G Komenského 13, Hlohovec	18	2	2	4	5		31
7	Štrbová	Silvia	G Párovská 1, Nitra	14	2	5	5	5		31
7	Žabková	Zuzana	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	19	5	1	1	5		31
10	Povalová	Radoslava	G A. Bernoláka, Námestovo	21			5	5	1	30
11	Banášová	Zuzana	G Komenského 13, Hlohovec	18	5	1	3	2		29
12	Jacková	Dominika	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	18	5		5			28
12	Magyarová	Eva	G Párovská 1, Nitra	28						28
14	Fodorová	Jana	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	15	5	1	5			26
14	Kordová	Zuzana	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	26						26
16	Gulai	Imrich	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	11	4	2	3	5		25
16	Maťúšová	Veronika	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	18	4	2	1			25
18	Adler	Filip	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	20	1	1	1	2	1	24
18	Bódiová	Zuzana	G Párovská 1, Nitra	24						24
20	Rózová	Alexandra	G A. Vrábla, Levice	10	4	2	5	2		23
21	Steuer	Max	G M. R. Štefánika, Šamorín	19						19
22	Benkö	Henrich	G P. Pázmáňa, Nové Zámky	17						17
23	Gazdarica	Matej	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	15						15
23	Rešutík	Peter	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	15						15
25	Kšenzuliak	Filip	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	14						14
25	Majláth	Erik	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	14						14
25	Oszlík	Alexandra	G P. Pázmáňa, Nové Zámky	14						14
28	Lászlóova	Brigita	G Mládežnícka 22, Šahy	13						13
28	Sochová	Eva	G A. Bernoláka, Námestovo	13						13
30	Lehotský	Juraj	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	12						12
31	Kandra	Jakub	G A. Prídavka, Sabinov	11						11
32	Bakošová	Katarína	G Púchov	10						10
32	Černák	Ján	OA Šurany	4	1		5			10
34	Chomutová	Radka	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	8						8
34	Leitner	Matej	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	8	0					8
36	Godorová	Alica	G Šurany	1	0	0	4	2		7
36	Chytilová	Daniela	G A. Kmeťa, Banská Štiavnica	6			1			7
38	Černák	Adam	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	5						5
38	Čimová	Veronika	G Párovská 1, Nitra	5						5
38	Dzúrik	Tomáš	SOUE Banská Bystrica	5						5
38	Marochnič	Ján	SOUE Banská Bystrica	5						5
42	Jančovičova	Adela	G Párovská 1, Nitra	4						4
42	Janšíkova	Daša	G A. Vrábla, Levice	4						4
44	Budinská	Lucia	G A. Kmeťa, Banská Štiavnica	3						3
44	Kaštan	Marek	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	3						3
46	Budáčová	Lucia	PaSA Turčianske Teplice	2						2
47	Letrich	Andrej	PaSA Turčianske Teplice	1						1
47	Montilla	Elys	G A. Kmeťa, Banská Štiavnica	1						1
47	Ševčík	Lukáš	PaSA Turčianske Teplice	1						1
47	Talafús	Ľuboš	PaSA Turčianske Teplice	1						1

Kategória B

Por.	Priezvisko	Meno	Škola	PS	5	6	7	8	M	Spolu
1	Sládek	Filip	G A. Bernoláka, Námestovo	30	5	5	4	5		49
2	Uher	Brian	G Párovská 1, Nitra	29	5		5	3		42
3	Kontárová	Ildikó	G A. M. Szencziho, Senec	25	5	5	5	1		41
4	Sliačanová	Veronika	BSG D. Tatarku, Poprad	30	5	5				40
5	Hornyák	Zsolt	G P. Pázmáňa, Nové Zámky	23	5	5	5			38
6	Tonhauserová	Ivana	G Párovská 1, Nitra	19	5	5	5	3		37
7	Matejovský	Vladimír	G bl. P. P. Gojdiča, Prešov	26	5	5		2	4	34
8	Žilka	Patrik	G A. H. Škultétyho, Veľký Krtíš	19	5	3	1	3		31
9	Vidličková	Eva	G A. Merici, Trnava	11	5	5	5	2		28
10	Godová	Lucia	G Komenského 13, Hlohovec	9	5	5	5			24
11	Čellár	Matúš	G Párovská 1, Nitra	21						21
12	Balónová	Barbora	G Komenského 13, Hlohovec	7	5	2	5			19
13	Melo	Adrián	G Párovská 1, Nitra	11	4		3			18
14	Svatý	Lukáš	G Párovská 1, Nitra	17						17
15	Hriagyelová	Alexandra	G Mládežnícka 22, Šahy	15						15
16	Sunega	Norbert	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	0	5	5	5			15
17	Chovancová	Katarína	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	14						14
18	Benedeková	Martina	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	13						13
19	Kutnár	Marek	G Párovská 1, Nitra	13						13
20	Balogh	Bence	G P. Pázmáňa, Nové Zámky	12						12
21	Chrien	Kristián	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	12						12
22	Kučerová	Monika	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	11						11
23	Maláčová	Lýdia	G Párovská 1, Nitra	10						10
24	Prešinský	Ján	G Párovská 1, Nitra	10						10
25	Kotry	Lukáš	G Párovská 1, Nitra	9						9
26	Líšková	Monika	G Komenského 13, Hlohovec	2	5	2				9
27	Mitro	Juraj	G J. A. Raymana, Prešov	9						9
28	Piovarči	Tomáš	G Komenského 13, Hlohovec	7						7
29	Ifka	Patrik	G Komenského 13, Hlohovec	6						6
30	Mačicová	Veronika	G Komenského 13, Hlohovec	6						6
31	Bejdová	Vladimíra	G Medzilaborce	5						5
32	Kenkovová	Marieta	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	5						5
33	Kovácsová	Mária	G Mládežnícka 22, Šahy	5						5
34	Kralovič	Ján	SPŠE Piešťany	5						5
35	Múčka	Roman	SPŠE Piešťany	5						5
36	Semancová	Veronika	G bl. P. P. Gojdiča, Prešov	5						5
37	Kollárová	Zuzana	G M. R. Štefánika, Šamorín	4						4
38	Lohinská	Jana	G bl. P. P. Gojdiča, Prešov	4						4
39	Mazúch	Ján	SOUE Banská Bystrica	4						4
40	Petrán	Štefan	G Komenského 13, Hlohovec	4						4
41	Vajdová	Zlatica	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	4						4
42	Ráciková	Monika	G Komenského 13, Hlohovec	3						3
43	Zbojeková	Natália	G Komenského 13, Hlohovec	2						2
44	Müllerová	Lenka	ZSŠOaS, Nové Mesto nad Váhom	1						1
45	Kramárová	Katarína	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	0						0
46	Múková	Katarína	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	0						0
47	Štefanková	Patrícia	G Medzilaborce	0						0
48	Zábranský	Martin	G Párovská 1, Nitra	0						0

Kategória A

Por.	Priezvisko	Meno	Trieda	Škola	PS	7	8	9	10	M	Spolu
1	Herencsár	Albert	7. G	G Z. Kodálya, Galanta	36	4	5	4	5		54
2	Boža	Vladimír	4. C	G D. Tatarku, Poprad	30	5	4	3	5		47
3	Korcsok	Peter	oktáva	G Mládežnícka 22, Šahy	30	4	3	4			41
4	Polačko	Martin	septima A	OG Alejová 1, Košice	27		4	3	3		37
5	Liščinský	Miroslav	septima B	OG Alejová 1, Košice	20	3	4	4			31
5	Plank	Martin	septima A	G A. Merici, Trnava	15	5	2	4	5		31
7	Cehlárik	Dávid	septima A	G A. Merici, Trnava	14	5	4	4	5	2	30
8	Vítek	Radovan	septima	G Párovská 1, Nitra	18	4	3	3			28
9	Hujer	Peter	septima	G Párovská 1, Nitra	15	4	3	5			27
9	Kobza	Vladimír	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	20	5	2				27
11	Gago	Štefan	3. B	G Šurany	19	2	0				21
11	Živčáková	Andrea	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	16	2			3		21
13	Moravčík	Matej	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	20						20
14	Perešíni	Ondrej	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	15						15
15	Kucbel	Maroš	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	14						14
16	Alberty	Roman	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	13						13
16	Ivanecký	Jakub	septima B	OG Alejová 1, Košice	13						13
18	Vrbovská	Mária	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	12						12
19	Flimmel	Samuel	septima	G Púchov	11						11
20	Bukvaj	Ivan	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	10						10
20	Jursa	Jakub	septima A	OG Alejová 1, Košice	10						10
20	Majláth	Martin	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	10						10
20	Sliačan	Jakub	5. A	EG Tisovec	10						10
20	Slovík	Lukáš	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	10						10
25	Pajkoš	Peter	3. B	G Medzilaborce	7						7
25	Sásková	Jana	septima	G Ľ. Štúra, Trenčín	7						7
27	Konôpková	Júlia	3. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	5			1	1	1	6
28	Blesák	Viktor	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	5						5
28	Kapustová	Katarína	3. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	5						5
28	Kucsera	Viktor	septima	G Mládežnícka 22, Šahy	5						5
28	Szabo	Martin	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	5						5
32	Mazalová	Martina	septima A	G M. R. Štefánika, Šamorín	4						4
32	Zubnárová	Katarína	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	4						4
34	Bratinková	Nikoleta	septima	G Mládežnícka 22, Šahy	3						3
34	Oravcová	Zosia	3. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	3						3
36	Hlavatá	Lucia	septima A	G M. R. Štefánika, Šamorín	2						2
36	Žársky	Mário	septima	G Púchov	2						2
38	Dobrota	Tomáš	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	0						0
38	Dunda	Peter	4. A	G Medzilaborce	0						0
38	Gajdoš	Tomáš	4. A	G Medzilaborce	0						0
38	Mišianiková	Lucia	4. B	CG P. U. Olivu Poprad	0						0
38	Nerer	Juraj	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	0						0
38	Petrík	Martin	4. A	CG P. U. Olivu Poprad	0						0
38	Pitoňáková	Iveta	4. A	CG P. U. Olivu Poprad	0						0
38	Repiščáková	Jana	4. B	CG P. U. Olivu Poprad	0						0
38	Szanislo	Tomáš	3. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	0						0

Kategória π

Por.	Priezvisko	Meno	Trieda	Škola	PS	11	12	13	14	Spolu
1	Boža	Vladimír	4. C	G D. Tatarku, Poprad	35	5		5	3	48
2	Szanislo	Tomáš	3. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	36	4	0	4	2	46
3	Sládek	Filip	sexta B	G A. Bernoláka, Námestovo	26	5	0	5	2	38
4	Polačko	Martin	septima A	OG Alejová 1, Košice	22	1				23
5	Hornyák	Zsolt	sexta C	G P. Pázmáňa, Nové Zámky	14					14
6	Marák	Károly	2. A	G H. Selyeho, Komárno	13					13
7	Kobza	Vladimír	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	11					11
8	Bukvaj	Ivan	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	6					6
9	Konôpková	Júlia	3. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	3	1				4
9	Ivanecký	Jakub	septima B	OG Alejová 1, Košice	4					4
11	Kapustová	Katarína	3. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	3					3
11	Vrbovská	Mária	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	3					3
11	Alberty	Roman	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	3					3
11	Rybár	Andrej	1. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	3					3
15	Zubnárová	Katarína	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	1					1
16	Blesák	Viktor	4. F	G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	0					0

MINIMIX – príloha pre žiakov 1. stupňa ZŠ

Milé riešiteľky a riešitelia MINIMIX-u,
mnohé vaše riešenia súťažných úloh 3. kola sú aj originálne aj pekne graficky „spestrené“. Niektoré vaše komentáre boli aj vtipné aj zábavné. Ďakujem vám za ne – veľmi ste ma potešili. Stalo sa však, že niektorí z vás tak „spolupracovali s kamarátmi“, že sme im nemohli za riešenie niektorých úloh priradiť body. Je nám to ľúto, ale ináč sa táto spolupráca nedala riešiť.

Keďže tento školský rok sa súťaž končí, želám vám veľa „dobrého“ v škole a len príjemné prekvapenia od kamarátov.

Viera Kolbaská

Riešenia súťažných úloh 3. kola

1. – Ferko má aspoň 5 lodičiek – hovorí Jožko.
– Nie – hovorí Dominik – on má najviac 5 lodičiek.
– Asi – hovorí Marek – ale podľa mňa má aspoň jednu lodičku.
Koľko lodičiek má Ferko, ak len jeden z chlapcov má pravdu?

Riešenie: Úlohu môžeme riešiť tak, že si z tvrdení kamarátov vypíšeme, koľko lodičiek by podľa nich Ferko mohol mať. Potom si počty lodičiek spresníme podľa faktu, že len jeden z chlapcov mal mať pravdu.

- Podľa Jožka, Ferko má aspoň 5 lodičiek, čiže **Ferko môže mať 5 alebo viac ako 5 lodičiek** (6, 7, 8, 9, 10, ...).

- Podľa Dominika, Ferko má mať najviac 5 lodičiek, čiže **Ferko môže mať 5 alebo menej ako 5 lodičiek** (5, 4, 3, 2, 1, 0).
- Podľa Marka, Ferko má aspoň 1 lodičku, čiže **Ferko môže mať 1 alebo viac ako 1 lodičku** (1, 2, 3, 4, 5, 6, ...).

Ak mal mať len jeden z chlapcov pravdu, potom:

- Ak by mal Ferko 5 lodičiek, mali by pravdu všetci traja.
- Ak by mal Ferko 6 a viac ako 6 lodičiek, mal by pravdu Jožko a Marek, teda dvaja.
- Ak by mal Ferko 4 alebo 3 alebo 2 alebo 1 lodičku, pravdu by mali dvaja, Jožko a Dominik.

Len v prípade, že má Ferko 0 lodičiek, má pravdu len jeden, Dominik.
Odpoveď: Ferko má 0 lodičiek.

Komentár: Viacerí z vás úlohu riešili pomocou tabuľky, do ktorej ste si vpisovali možné počty lodičiek a vypísali ste tú možnosť, ktorá sa opakovala len raz.

Jožko						**5**	**6**	**...**
Dominik	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**		
Marek		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**...**

Niektorí ste použili číselnú os a taktiež ste z nej odčítali tú možnosť, ktorá sa vyskytovala len raz (jeden z kamarátov mal pravdu).

2. Nájdite štvorciferné číslo, v ktorom je prvá cifra jednou tretinou druhej, tretia je súčtom prvej a druhej a posledná je trojnásobkom druhej číslice.

Riešenie: Keď má byť prvá cifra jednou tretinou druhej cifry, tak druhá cifra musí byť deliteľná tromi, čiže to môže byť alebo 3 alebo 6 alebo 9. Ak by druhá cifra bola 3, potom prvá cifra je tretinou z 3, čiže 1. Tretia cifra je súčtom prvej a druhej, čiže 1 + 3 = 4. Štvrtá cifra je trojnásobkom druhej, čiže 3 . 3 = 9.
Vznikne číslo 1349.
Ďalšie riešenia nie sú, lebo:

- Ak je druhá cifra 6, prvá bude 2, tretia bude 6 + 2 = 8, štvrtá by mala byť 3 . 6 = 18. Cifry sú však len 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Osemnástka nie je cifra.
- Ak je druhá cifra 9, prvá bude 3, tretia bude 9 + 3 = 12 – dvanástka nie je cifra.

Odpoveď: Jediné číslo je 1349.

Komentár: Niektorí ste použili premenné a zapísali ste si vlastnosti cifier pomocou nich. Bolo to prehľadné a zrozumiteľné. Niektorí ste len hádali, ktoré číslice by boli dobré. Vtedy nebolo možné získať plný počet bodov.

3. V januári padajú z neba snehové vločky. Každá vločka na obrázku predstavuje určité číslo. Pod každým stĺpcom je ich súčet a aj riadky majú vpravo uvedený súčet. Vypočítajte chýbajúci súčet v riadku.

✹	✹	✯	❁	?
✹	✳	✯	✳	85
❁	✯	✹	❁	87
✳	❁	✯	❁	82
87	86	93	79	

Riešenie: V úlohe si bolo treba uvedomiť, že či spočítame všetky vločky v riadkoch alebo všetky vločky v stĺpcoch, musíme získať rovnaký súčet. Vtedy bolo riešenie jednoduché. Spočítať bolo treba súčty v stĺpcoch

$$87 + 86 + 93 + 79 = 345.$$

Potom súčty v riadkoch

$$82 + 87 + 85 = 254.$$

A ich rozdiel je vlastne otáznik

$$? = 345 - 254 = 91.$$

Odpoveď: Chýbajúci súčet je 91.

Komentár: Viacerí z vás sa snažili vypočítať hodnotu vločiek, použili ste na to aj písmená, aj farebné bodky alebo štvorčeky. Hodnotu ste väčšinou počítali rozkladom jednotlivých súčtov na čísla okolo čísla 20 a potom overovaním, ktoré spĺňajú súčty v tabuľke. Niektoré riešenia začínali od porovnávania rovnakých súčtov:

$$87 = ✹ + ❁ + ✳ + ✹$$
$$87 = ✹ + ❁ + ✯ + ❁$$

Potom $✳ + ✹ = ✯ + ❁$.

Dosadíme z rovnosti vločky do súčtu 86:

$$(✳ + ✹) + (✯ + ❁) = 2\,.\,(✯ + ❁) = 86,$$
$$✯ + ❁ = 86 : 2 = 43,$$
$$✳ + ✹ = 43\ ....$$

a pokračujeme týmto spôsobom, až zistíme hodnoty:

$$✹ = 24,$$
$$✯ = 23,$$
$$❁ = 20.$$

Niektorí si všímali rozdiely medzi jednotlivými súčtami a z nich si vypočítali hodnotu vločiek. Potom vypočítali chýbajúci súčet.

Výsledková listina po 3. sérii úloh

Por.	Priezvisko, meno	Škola	Trieda	1.+2. kolo	7.	8.	9.	Spolu
1.	Bernasovská Ivanka	ZŠ Krosnianska 4, Košice	4. B	60	10	10	10	90
	Králiková Zuzana	ZŠ, Bruselská 18, Košice	4. A	60	10	10	10	90
3.	Dubinský Matej	ZŠ Krosnianska 4, Košice	3. A	59	10	10	10	89
	Mičko Juraj	ZŠ Krosnianska 4, Košice	4. B	59	10	10	10	89
5.	Hanzely Slavomír	ZŠ Ul.17.novembra, Sabinov	4. B	58	10	10	10	88
	Ondková Nina	ZŠ s MŠ Ul. sv. Gorazda 1,Žilina	4. A	58	10	10	10	88
	Sládek Samuel	CZŠ sv. Gorazda Námestovo	4. A	58	10	10	10	88
8.	Masrna Martin	ZŠ Krosnianska 4, Košice	3. B	57	10	10	10	87
9.	Runák Róbert	ZŠ Pionierska 4, Šaľa	4. A	56	10	10	10	86
	Druska Róbert	ZŠ s MŠ Liptovská Teplá	4. B	60	10	10	6	86
11.	Fenčáková Viktória	ZŠ Krosnianska 4, Košice	3. A	59	5	10	10	84
	Koľ Daniel	ZŠ Krosnianska 4, Košice	4. A	58	6	10	10	84
	Kurňavová Kristína	ZŠ Pionierska 4, Šaľa	4. A	54	10	10	10	84
	Skybjak Adam	ZŠ Krosnianska 4, Košice	4. B	58	6	10	10	84
15.	Dzureň Matúš	ZŠ Krosnianska 4, Košice	4. A	58	6	9	10	83
	Genči Jakub	ZŠ Krosnianska 4, Košice	4. A	59	8	6	10	83
	Kuna Peter	ZŠ Tríbečská, Topoľčany	4. B	53	10	10	10	83
18.	Jursa Juraj	ZŠ Krosnianska 4, Košice	3. B	52	10	10	10	82
19.	Brix Stela	ZŠ Krosnianska 4, Košice	4. A	51	10	10	10	81
20.	Fačko Peter	ZŠ Krosnianska 4, Košice	3. B	56	10	5	10	81
	Vaňo Peter	ZŠ Krosnianska 4, Košice	4. A	52	9	10	10	81
22.	Sládeček Michal	ZŠ s MŠ Ul. sv. Gorazda 1,Žilina	4. B	54	10	6	10	80
	Horváthová Martina	ZŠ Krosnianska 4, Košice	4. B	54	8	9	9	80
24.	Monček Andrej	ZŠ Ul. mieru 134, Svit	4. A	57	9	9	4	79
25.	Garlík Richard	ZŠ Krosnianska 4, Košice	4. A	52	10	6	10	78
26.	Oswald Samuel	ZŠ Krosnianska 4, Košice	4. B	55	6	6	10	77
27.	Komová Andrea	ZŠ s MŠ Ul. sv. Gorazda 1,Žilina	4. B	53	3	10	10	76
	Schmidtová Veronika	ZŠ Krosnianska 4, Košice	4. B	52	8	6	10	76
	Seman Martin	ZŠ Krosnianska 4, Košice	3. B	54	6	10	6	76
30.	Piala Martin	ZŠ s MŠ Ul. sv. Gorazda 1,Žilina	4. A	49	10	6	10	75
31.	Nadzamová Zuzana	ZŠ Krosnianska 4, Košice	3. B	52	2	10	10	74
32.	Mach Jakub	ZŠ Krosnianska 4, Košice	4. B	43	10	10	10	73
	Čulen Peter	ZŠ Krosnianska 4, Košice	3. A	57	0	10	6	73
34.	Tóth Tomáš	ZŠ Krosnianska 4, Košice	3. A	52	0	10	10	72
35.	Rajtáková Roxana	ZŠ Krosnianska 4, Košice	3. A	59	0	10	2	71
	Sivák Ivan	ZŠ Krosnianska 4, Košice	4. A	51	10	10	0	71
37.	Lukáč Michal	ZŠ Krosnianska 4, Košice	3. A	50	10	9	0	69
38.	Ivašková Alžbeta	ZŠ Krosnianska 4, Košice	4. B	58	0	10	0	68
39.	Horovský Roderik	ZŠ Krosnianska 4, Košice	4. B	49	3	10	5	67
40.	Örhalmi Max	ZŠ Krosnianska 4, Košice	3. A	52	0	10	4	66
	Kunc Jozef	ZŠ Krosnianska 4, Košice	4. B	44	10	10	2	66
42.	Gaľová Zuzana	ZŠ Krosnianska 4, Košice	3. B	46	3	10	6	65
43.	Debnárová Terézia	ZŠ s MŠ Ul. sv. Gorazda 1,Žilina	4. A	46	2	6	10	64
44.	Kurucz Samuel	ZŠ Krosnianska 4, Košice	4. A	47	0	6	10	63
	Sihlovec Filip	ZŠ s MŠ Ul. sv. Gorazda 1,Žilina	4. C	48	5	10	0	63

46.	Poláček Peter	ZŠ Krosnianska 4, Košice	4. A	30	10	9	10	59
	Hollá Tereza	ZŠ Pionierska 4, Šaľa	4. A	35	10	6	8	59
	Kyjovský Matej	ZŠ Krosnianska 4, Košice	4. A	49	4	6	0	59
49.	Kalinaj Blažej	ZŠ s MŠ Bijacovce	3	28	10	10	10	58
	Olejník Filip	ZŠ s MŠ Ul. sv. Gorazda 1,Žilina	4. B	35	4	10	9	58
	Šnapko Milan	ZŠ s MŠ Ul. sv. Gorazda 1,Žilina	4. B	45	5	8	0	58
52.	Perešová Lucia	ZŠ Krosnianska 4, Košice	4. A	44	2	6	5	57
	Baráth Boris	ZŠ Pohraničná ul., Komárno	4. N	57	0	0	0	57
54.	Vaca Franklin Velásquez	ZŠ Krosnianska 4, Košice	4. A	30	10	10	6	56
55.	Štěpánek Michal	ZŠ Krosnianska 4 Košice	4. B	53	0	0	0	53
56.	Borik Matúš	ZŠ s MŠ Ul. sv. Gorazda 1,Žilina	4. A	22	10	10	10	52
	Jefimová Zinaida	ZŠ s MŠ Ul. sv. Gorazda 1,Žilina	4. B	52	0	0	0	52
58.	Kredatusová Klárka	ZŠ Nižná brána, Kežmarok	4. A	51	0	0	0	51
	Lancová Katka	ZŠ s MŠ Ul. sv. Gorazda 1,Žilina	4. B	51	0	0	0	51
60.	Glodžák Štefan	ZŠ Nižná brána, Kežmarok	4. A	50	0	0	0	50
	Goldiňáková Veronika	ZŠ Nižná brána, Kežmarok	4. A	50	0	0	0	50
62.	Harabin Matej	ZŠ Nižná brána, Kežmarok	4. A	49	0	0	0	49
	Pisoňová Dominika	ZŠ Nižná brána, Kežmarok	4. A	49	0	0	0	49
64.	Súkeník Peter	ZŠ s MŠ Ul. sv. Gorazda 1,Žilina	4. B	38	0	0	10	48
	Szücs Samuel	ZŠ Nižná brána, Kežmarok	4. A	48	0	0	0	48
	Zakopjan Silvo	ZŠ Nižná brána, Kežmarok	4. A	48	0	0	0	48
67.	Cisko Matej	ZŠ Nižná brána, Kežmarok	4. A	47	0	0	0	47
	Marhefka Martinko	ZŠ Nižná brána, Kežmarok	4. A	47	0	0	0	47
	Tomala Michal	ZŠ Nižná brána, Kežmarok	4. A	47	0	0	0	47
70.	Huťová Júlia	ZŠ Nižná brána, Kežmarok	4. A	45	0	0	0	45
	Kováčová Klaudia	ZŠ Pionierska 4, Šaľa	4. A	45	0	0	0	45
72.	Kristan Simon	ZŠ Nižná brána, Kežmarok	4. A	43	0	0	0	43
73.	Kormančík Ondrej	ZŠ s MŠ Ul. sv. Gorazda 1,Žilina	4. A	42	0	0	0	42
74.	Žáčiková Erika	ZŠ Nižná brána, Kežmarok	4. A	41	0	0	0	41
75.	Gallyová Zuzana	ZŠ Nižná brána, Kežmarok	4. A	39	0	0	0	39
76.	Stranianeková Simona	ZŠ s MŠ Ul. sv. Gorazda 1,Žilina	4. B	37	0	0	0	37
77.	Brandeburová Karin	ZŠ Krosnianska 4 Košice	4. B	33	0	0	0	33
78.	Liga Jozef	ZŠ Mierová 134, Svit	2. A	30	0	0	0	30
	Líšková Adriana	ZŠ s MŠ Ul. sv. Gorazda 1,Žilina	4. B	30	0	0	0	30
	Mihalíková Dáša	ZŠ s MŠ Ul. sv. Gorazda 1,Žilina	4. A	30	0	0	0	30
81.	Čerhák Radoslav	ZŠ Pionierska 4, Šaľa		25	0	0	0	25
	Kocián Boris	ZŠ s MŠ Ul. sv. Gorazda 1,Žilina	4. B	25	0	0	0	25
	Mikušová Nikola	ZŠ Ul. Obrancov mieru, Detva	4. A	25	0	0	0	25
	Sádovská Terézia	ZŠ Pionierska 4, Šaľa	4. C	25	0	0	0	25
85.	Hvizdáková Kristína	ZŠ s MŠ Ul. sv. Gorazda 1,Žilina	4. B	15	0	0	0	15
86.	Plevková Michaela	ZŠ Pionierska 4, Šaľa	4. C	10	0	0	0	10
87.	Martančík Boris	ZŠ Nižná brána, Kežmarok	4. A	7	0	0	0	7

Obsah

Redakčná pošta ..... 2. strana obálky
Dušan Jedinák: Thomas Bradwardinus – počtár vhodných pomerov 1
Dušan Jedinák: Roger Bacon – dôraz na skúsenosť a premýšľanie 2
Korešpondenčná súťaž v školskom roku 2007/2008 4
Riešenia 3. série úloh 4
Martin Hriňák: Celoštátne kolo Matematickej olympiády kategórie A 16
Výsledkové listiny po 3. sérii úloh 17
Výsledkové listiny po 3. sérii úloh – kategória Z 17
Výsledkové listiny po 3. sérii úloh – kategória C 18
Výsledkové listiny po 3. sérii úloh – kategória B 19
Výsledkové listiny po 3. sérii úloh – kategória A 20
Výsledkové listiny po 3. sérii úloh – kategória π 21
MINIMIX – príloha pre žiakov 1. stupňa ZŠ 21
Riešenia súťažných úloh 3. kola 21
Výsledková listina po 3. sérii úloh 24

MATMIX – matematický časopis pre žiakov základných a stredných škôl, vydáva Metodicko-pedagogické centrum v Bratislave na Tomášikovej ulici s finančnou podporou Európskeho sociálneho fondu ako pomocnú literatúru pre PK matematiky a pre žiakov so záujmom o matematiku.

Šéfredaktor: Ing. Mgr. Martin Hriňák
Redakcia: PhDr. Soňa Hronská, RNDr. Viera Kolbaská
Tlač a väzba: Eduard Rác
Vydavateľ: Metodicko-pedagogické centrum, Ševčenkova 11, Bratislava, alokované pracovisko Tomášikova 4, P. O. BOX 14, 820 09 Bratislava 29
Adresa redakcie: Metodicko-pedagogické centrum, alokované pracovisko Tomášikova 4, MATMIX, Tomášikova 4, P. O. BOX 14, 820 09 Bratislava 29
Telefóny: 02/ 48 20 94 32, 43 42 22 53, 43 42 57 90 **Fax:** 02/ 43 33 59 46
E-mail: hrinak@matmix.sk
Webová stránka: www.matmix.sk
Registračné číslo MK SR: 3449/2005
ISSN: 1336-7854
Náklad: 1500 ks. Vychádza 4-krát ročne.

