Jednota slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Bratislava 1

Ročník: 16
Číslo: 2
Šk. rok: 2010/2011

Matematický časopis pre žiakov základných a stredných škôl

MATMIX

Matematika, to je kus môjho srdca i života.

Štefan Schwwarz

Redakčná pošta

Milí čitatelia,

dostávate do rúk druhé tohtoročné číslo časopisu. Opäť vám zároveň zasielame aj druhé číslo časopisu Mladý vedec v školskom roku 2010/2011. V tomto časopise nájdete množstvo zaujímavých článkov, ktoré nie sú len o matematike, ako časopis MATMIX.

V druhom čísle časopisu vám prinášame opäť zaujímavé články z histórie matematiky, jednu úvahu o matematickej radosti a zadania a vzorové riešenia úloh korešpondenčnej súťaže. Prinášame aj výsledkovú listinu po prvej sérii korešpondenčnej súťaže, v ktorej uvádzame len tých riešiteľov, ktorí získali nenulový počet bodov. Bohužiaľ, tento počet je veľmi nízky, avšak dúfame, že od budúceho školského roka opäť narastie. Na tretej strane prinášame vyhlásenie o poukázaní sumy do výšky 2 % zaplatenej dane v prospech Jednoty slovenských matematikov a fyzikov, ktorá podporuje vydávanie časopisu MATMIX. Ak ste sa ešte nerozhodli o osude svojich dvoch percent zo zaplatenej dane, prosím zvážte jej použitie v prospech JSMF. Ďakujeme.

Prajem vám príjemné prežitie veľkonočných sviatkov a veľa úspechov pri riešení úloh korešpondenčnej súťaže.

Martin Hriňák

Štefan Schwarz – priateľ matematickej kultúry

Život s matematikou

Matematika ho začala baviť, keď mal asi trinásť – štrnásť rokov. Gymnázium v rodnom Novom Meste nad Váhom absolvoval s vyznamenaním, preukázal nadpriemerné vedomosti z matematiky. Na vysokoškolské štúdium odišiel do Prahy v roku 1932. Vyštudoval matematiku a fyziku na Prírodovedeckej fakulte UK v roku 1936. Získal právo vyučovať na československých stredných školách. Napísal dizertačnú prácu a v roku 1937 sa stal doktorom prírodných vied. Zostal asistentom u prof. Petra, bol jeho posledným doktorandom (1939). Hektická jar roku 1939 ho vrátila na Slovensko, kde začal pôsobiť na SVŠT, kde sa stal docentom v roku 1946 a profesorom v roku 1947. Učil tu až do roku 1982. Od roku 1943 pôsobil aj na Prírodovedeckej fakulte Slovenskej univerzity, kde sa habilitoval prácou *Teória pologrúp*. V rokoch 1944 – 45 strávil niekoľko mesiacov v koncentračnom tábore. Akademikom SAV bol od roku 1953 (predseda SAV v rokoch 1965 – 1970), ČSAV od roku 1960. V rokoch 1966 – 1971 bol členom ÚV KSČ. Sám napísal: *Dostal som sa aj do nebezpečnej blízkosti politiky*. V rokoch 1964 – 1988 bol riaditeľom Matematického ústavu SAV. *Matematika, to je kus môjho srdca i života.*

Štefan Schwarz (18. 5. 1914 – 6. 12. 1996), vysokoškolský profesor matematiky, vo svojich prvých vedeckých prácach študoval maximálne grupy v periodických pologrupách a otázky rozložiteľnosti polynómov na ireducibilné faktory nad konečnými telesami, neskôr zasiahol do teórie konečných polí, booleovských a stochastických matíc, harmonickej analýzy i teórie čísel. Publikoval celý rad pôvodných vedeckých prác (osem monografií a učebných textov, viac než 90 vedeckých článkov a vyše 50 odborných statí). Ako ohlas mal okolo 700 citácií vo svetovej literatúre. Medzi učiteľmi matematiky boli obľúbené jeho publikácie *O rovnicích* (Praha 1940), *Algebraické čísla* (Praha 1950), *Základy náuky o riešení rovníc* (Praha 1958). Bol na mnohých prednáškových pobytoch v Európe i zámorí. Viedol redakčnú radu vedeckého matematického časopisu *Mathematica Slovaca*.

Matematická kultúra

Nechápal matematiku ako horu čísiel, ale ako spôsob myslenia. Matematické poznatky sú súčasťou civilizačnej kultúry každej spoločnosti. Vnímal matematiku ako istý druh duchovného športu, v ktorom sa vyžaduje nadväznosť a vytrvalosť. *Matematika nie je ilustrovaný časopis, ktorý možno začať čítať na ktorejkoľvek strane... Matematika učí vytvárať presnými logickými úvahami platné závery... Matematika učí zmyslu pre pravdu, dôkladnosti a skromnosti.* Profesor Schwarz bral svoju matematiku ako nevyčerpateľný zdroj predstáv a princípov pre

účinné vedecké teórie. *Matematika dáva iným vedám svoje prepracované metódy myslenia, ktoré umožňujú analýzu skrytých vlastností a vzájomných vzťahov... Podstatou matematiky je invencia... Jednou z podstatných čŕt matematiky je jej abstraktnosť.* Vždy vedel ukázať, ako matematické vedomosti vyrastali z reality, z fyzikálnych otázok a technických problémov. Znalosť teoretických riešení umožňuje praktické použitie. *Matematika učí racionálnemu spôsobu myslenia a vyjadrovania... Matematika umožňuje riešenie praktických úloh... Matematiku nie je možné odlúčiť od iných predmetov.*

Vyučovanie matematiky

Rád a zaujímavo prednášal. Vedel zaujať a upútať pozornosť. Sršal neutíchajúcim záujmom o matematiku, odhaľoval krásu zmatematizovaného sveta. *Ak sa niekto vie zamýšľať nad predloženými faktami, má dosť trpezlivosti a neustúpi, pokiaľ si neutvorí vlastný názor, potom je v ňom zárodok matematika.* Vedel, že učiteľ matematiky má poznať aj princípy fyzikálneho myslenia a vnímať vzťah k experimentu. *Podstatné je: kedy, prečo a ako daný matematický postup vedie k cieľu.* Všímal si a rozvažoval aj nad metódami vyučovania: *Učiť sa z kníh a živé slovo je rozdiel... Každé vyučovanie by sa malo začať motiváciou... Matematická príprava sa začína na základnej škole a prebieha celý život... Nijaký učiteľ, ktorý sa vo vlastnom odbore systematicky a trvalo nevzdeláva, nemôže byť dobrým učiteľom... Študent musí prežívať spolu s učiteľom celý pochod objavovania... Pokiaľ študent sám, bez pomoci, nezačne počítať a päťkrát sa sám nezmýli, nebude látke nikdy poriadne rozumieť... Metódy vyučovania by mali byť založené na osobných skúsenostiach tých, ktorí matematiku sami tvoria (t. j. objavujú, alebo znova objavujú).* Aj pre vyučovanie matematiky platí, že to nie sú iba poznatky, ale aj postupy, ktorými boli dosiahnuté a ľudia, ktorí ich získali, *aby sa každý občan díval na matematiku ako na časť národnej kultúry a nie ako na strašiaka.* Odporúčal neustále poukazovať na historický vývin, vzťah k iným odborom, ponúkať aj estetický a umelecký aspekt. Matematickú kultúru treba prenášať, vnášať, sprostredkovať, prežívať.

Systém má začínať v škole

Bol presvedčený o tom, že pre každého človeka je potrebný istý druh všeobecnej matematickej kultúry. Vznešene ponúkal aj definíciu: *Matematicky civilizovaná osoba nemusí byť matematický virtuóz. Je to však človek, ktorý nachádza hlboké vnútorné uspokojenie z matematického umenia.* Vedel, že už vyučovanie na základných a stredných školách má priamu súvislosť s rozvojom kultúry celej spoločnosti. *Rozhodujúci vplyv na rozvoj matematickej kultúry majú stovky tzv. neznámych učiteľov*

na základných a stredných školách, ktorí v každodennej práci pripravujú budúcich študentov. Nečakané a podnetné je jeho priznanie: *Stredná škola a riešenie príkladov z Rozhledov vypestovali vo mne lásku k matematike.* Následkom toho aj neskôr až vášnivo riešil problémy z časopisu *The Americal Mathematical Monthly*. Profesor Schwarz uznal: *Matematika bude vždy meradlom hĺbky ľudského myslenia*. Svojím učiteľským pôsobením sa stal príkladom, ako prispievať k rozvoju matematickej kultúry. *Aj priemerný matematik má tú výhodu, že vie napr. systémovo myslieť bez toho, že by sa to explicitne učil.* Veril v budúcnosť širšieho i hlbšieho matematického vzdelania na našich školách. *Bolo by veľmi zlým vysvedčením pre nás, keby naši nasledovníci neboli lepší, ako sme boli my.*

Uznanie za vedu

Mnohí čo ho poznali, uznávali jeho vedecký i pedagogický formát, originálny učiteľský prístup, v ktorom odkrýval spôsob vlastného myslenia a široké všeobecné i hlboké matematické vzdelanie. Skoro všetci jeho študenti (pedagogickým pôsobením ovplyvnil vysokoškolskú výchovu stoviek inžinierov a matematikov) priznávali neopakovateľné zážitky z jeho prednášok, spolupracovníci oceňovali jeho rozmer odborný i ľudský. Nikto nespochybňuje, že prof. Schwarz prispel k rozvoju matematickej vedy, k popularizácii štúdia matematiky, ku kvalite vysokoškolskej výučby matematických disciplín a rozšíreniu vedeckej práce v oblasti matematiky. *Do vedy môžu hovoriť len srdcia zapálené pre dobrú vec. Len vnútorné nefalšované nadšenie sa prenáša na ďalšie generácie*. Profesor Schwarz bol prvým slovenským matematikom, ktorý dosiahol medzinárodné uznanie. Vyjadrené jednou vetou profesora Tibora Šaláta (1926 – 2005): *Akademik Štefan Schwarz sa zapísal trvalým písmom do dejín matematiky v našej vlasti.*

Človek má premýšľať

Pre hodnotenie minulosti odporúčal: *Každého treba posudzovať z hľadiska doby, v ktorej žil a pracoval.* Prof. Schwarz sa nebál priznať: *Matematika má pre mňa v sebe toľko estetických prvkov ako výtvarné umenie. Keď niečo pochopím, čo som doteraz len málo rozumel, mám rovnaký pocit zadosťučinenia ako umelec z vydareného diela.* V našich školách môžeme citovať Schwarzov svojský odkaz: *Len premýšľajte. A nielen o matematike. O všetkom.* Nielen tým, ktorí poznali a spomínajú na profesora Štefana Schwarza, pripomínam jeho želanie: *Ja by som si najväčšmi prial, aby ľudia nestrácali ideály*.

Dušan Jedinák

Nevypočítateľná matematická radosť

Údiv

Zažili ste už radosť z objavu, užitočnej myšlienky, podnetného názoru? Vnímate vlastné poznávanie javov a ich súvislostí ako úžas zo schopnosti myslieť, uvažovať, zdôvodňovať? K tajomnej príležitosti ako systematicky vnímať prírodu a odhaľovať jej zákonitosti patrí aj matematika.

Matematická civilizácia

Každý civilizovaný človek s rozvinutou predstavivosťou pozoruje a klasifikuje javy, rozpoznáva súvislosti, hodnotí dosiahnuté výsledky, prijíma závery. Pochopiť realitu pomáha aj logicko-matematické myslenie so svojimi špecifikami. Skoro každý z nás spoznal v škole, že vyučovací predmet pôvodne zvaný „počty a merba“ rozvíjal aj našu pozornosť, vytrvalosť, pracovitosť, systematickosť i kritickosť. Neskôr nám rôzne matematické disciplíny umožnili poznávať a hodnotiť javy z kvantitatívneho i kvalitatívneho pohľadu, príčinných súvislostí, prenikať do riešenia prírodovedných zákonitostí, spoločenskovedných problémov, technických konštrukcií i technologických postupov. Matematická veda nám pomáha účinne argumentovať, dokazovať, podnecuje našu pojmovú originalitu. Matematika sa stala jazykom i metódou pre poznanie vzťahov vo svete, v ktorom žijeme, myslíme a modelujeme našu situáciu.

Zmyslom matematického poznávania je hlbšie pochopenie vzťahov a štruktúr abstrahovaných pojmov pre riešenie reálnych problémov teórie i praktického života. Hlbšie matematické vedomosti a ich používanie umožňujú zušľachťovanie našich teoretických predstáv i praktických skutkov. Štúdium matematiky môže byť skoro pre všetkých záujemcov zmysluplnou, zaujímavou a podnetnou činnosťou. Skrz matematiku sa možno naučiť pohľadu do vnútra problému a zároveň i nadhľadu nad celou štruktúrou. Reč matematiky je hutná, stručná a pomerne jednoznačná. Avšak dlhšiu dobu trvá, pokiaľ matematický systém pochopíme v celku a naučíme sa ho používať v rôznorodej problematike.

Ľudský rozum

Systematické pozorovanie a experimentovanie sú užitočné pomôcky pre ľudský intelekt. Abstrahovaním a zovšeobecnením odhalených vzťahov, doplnených o základné definície a uznané axiómy, sa pred človekom otvoril svet zdokonalených predstáv. Cez matematický prístup sme objavili svet ideálnych foriem spojených prostredníctvom stálych a nevyhnutných vzťahov, ktoré môže sledovať iba inteligentný rozum. Tým sme spoznali, že objavovanie súvislostí a odhaľovanie zákonov je možno jednou z najväčších ľudských radostí. Ak chápeme organizáciu, štruktúru, ktorá zjednocuje a vysvetľuje, máme skutočné potešenie z úspechov ľudského myslenia. Zázrakom je,

že čisté myslenie môže vystihnúť realitu. Matematika sa stala organickou súčasťou technického a vedeckého sveta, ale zároveň ho aj presahuje. Naznačuje metodologický výhľad do ríše predstáv absolútnej bezčasovej dokonalosti.

Poznanie matematických zákonitostí (o počte, tvare, veľkosti) umožňuje uplatňovať odvodzovacie pravidlá a logické kalkuly, ponúka možnosť dokazovania správnych postupov i výsledkov matematických činností. Štúdium matematiky ovplyvňuje spôsoby uvažovania a argumentácie, orientuje ľudskú myseľ na triezvosť, nestrannosť, zdôvodňovanie a preverovanie prijatých záverov. Tým má matematika význam výchovný, kultúrny i rozmer etický. Matematickým skúmaním zušľachťujeme naše myšlienkové predstavy.

Matematika ako tvorivosť

Matematika skúma nekonečne malé i nekonečne veľké. Dotýka sa absolútnych hodnôt i neostrých hraníc. Z jednoduchých faktov generuje významné dôsledky. Útočí na všeobecnosť, neznáša spory. Vytvára logické systémy, štruktúruje predstavy. Axiomatizuje, definuje, dokazuje. Nemôže si byť však istá sama sebou. Matematika zostáva nezavŕšeným otvoreným tvorivým procesom ľudskej mysle skonštruovať univerzálny formálny jazyk umožňujúci postihnúť jednotu večnej všetko obsahujúcej pravdy.

Aj matematika je odrazom ducha v ľudskom vedomí, aby sa človek snažil odhrnúť závoj trvalého tajomstva.

Dušan Jedinák

Korešpondenčná súťaž v školskom roku 2010/2011

Riešenia každej série píšte v slovenskom jazyku. Zašlite nám ich do uvedeného termínu na adresu:

P-MAT, n. o.
Ing. Mgr. Martin Hriňák
P. O. BOX 2
814 99 Bratislava 1

V prípade, že nebudete spokojní s ohodnotením vášho riešenia, môžete nám poslať reklamáciu spolu s vaším riešením, odôvodnením a požadovaným počtom bodov. Vaše riešenie si ešte raz prezrieme a oznámime vám výsledok.

Riešenia 1. série úloh korešpondenčnej súťaže

1. Ideálny muž podľa Martiny je vysoký, čiernovlasý a pekný. Pozná štyroch mužov, ktorí sa volajú Andrej, Boris, Cyril a Daniel. Len jeden z nich má všetky tri vlastnosti, ktoré Martina požaduje. Okrem toho vieme, že:
- Len traja muži sú vysokí, len dvaja čiernovlasí a len jeden pekný.
- Každý z tých štyroch mužov má aspoň jednu z požadovaných vlastností.
- Andrej a Boris majú rovnakú farbu vlasov.
- Boris a Cyril sú rovnako vysokí.
- Spomedzi Cyrila a Daniela je vysoký najviac jeden.

Ktorý z týchto štyroch mužov spĺňa všetky Martinine požiadavky?

Riešenie: Keďže Boris a Cyril sú rovnako vysokí, tak musia byť obaja vysokí, pretože v opačnom prípade by neboli vysokí dvaja, čo by bolo v protiklade s prvou podmienkou v zadaní. Keďže vieme, že Cyril je vysoký, na základe 5. podmienky vieme, že Daniel nie je vysoký. Keďže vysokí sú traja, Adam je tiež vysoký. Ak by Adam a Boris boli čiernovlasí, tak pekný by musel byť Daniel, keďže nie je ani čiernovlasý ani vysoký a musí mať aspoň jednu z vlastností. To by znamenalo, že žiaden z nich nemá všetky tri vlastnosti, čo by bolo v rozpore so zadaním. Preto musia byť čiernovlasí Cyril a Daniel. Keďže Daniel nie je vysoký, nemôže mať všetky tri vlastnosti, a teda nemôže byť pekný. Preto musí byť pekný Cyril, ktorý má na základe vyššie uvedeného všetky tri požadované vlastnosti.

2. Otec sa v záhrade rozhodol postaviť altánok. Keby každý deň pracoval 1,5 hodiny, celá stavba by mu trvala 8 dní. Koľko hodín denne by musel pracovať, aby bola stavba hotová o dva dni skôr?

Riešenie: Celkový čas, ktorý strávi otec pri práci na altánku, je $8 \cdot 1{,}5 = 12$ hodín. Ak chceme, aby bola práca hotová o dva dni skôr, otec bude pracovať len 6 dní. Keďže $12 : 6 = 2$, otec by musel pracovať dve hodiny denne.

3. Ak ide mág Xerius navštíviť priateľa pešo a naspäť sa vezie na voze, trvá mu cesta hodinu a pol. Ak ide na voze tam i nazad, trvá mu celá cesta 30 minút. Koľko mu trvá cesta, ak ide tam aj späť pešo? (Pešo aj vozom ide rovnomerným priamočiarym pohybom.)

Riešenie: Xeriovi trvá cesta na voze k priateľovi rovnako dlho ako cesta naspať, pretože sa pohybuje rovnomerným priamočiarym pohybom. Tam aj naspäť mu to na voze trvalo 30 minút. Teda cesta na voze od priateľa mu trvala 15 minút. To znamená, že cesta pešo k priateľovi mu trvala hodinu aj štvrť, pretože keď k nemu šiel pešo a naspäť sa viezol na voze, trvala mu cesta hodinu a pol. Ak by išiel tam aj naspäť pešo, trvalo by mu to dvakrát toľko, čiže 2,5 hodiny.

4. Do uzavretej nádrže tvaru pravidelného štvorbokého hranola sa má zmestiť 20 hl vody. Výška nádrže je 1,26 m. Koľko štvorcových metrov plechu sa spotrebuje na jej vyhotovenie, keď pridáme 5 % plechu na spoje a odpad?

Riešenie: Predpokladajme, že dĺžka hrany základne je x metrov. 20 hl predstavuje objem 2 metre kubické. Potom pre objem nádrže platí $2 = 1{,}26 \cdot x^2$, odkiaľ vypočítame, že $x \doteq 1{,}26$ m. To znamená, že ide o nádrž tvaru kocky s hranou dĺžky 1,26 m. Pre jej povrch platí (započítali sme už aj 5 % na spoje a odpad):

$$S = 1{,}05 \cdot 6 \cdot x^2 = 1{,}05 \cdot 6 \cdot (1{,}26\ \mathrm{m})^2 = 10{,}00188\ \mathrm{m}^2.$$

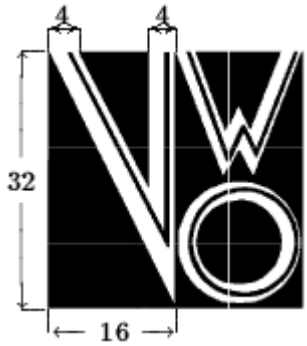
Ak by sme počítali presnejšie bez zaokrúhľovania, získali by sme výsledok približne 10,000637 metrov štvorcových, takže pri presnosti na metre štvorcové je odpoveďou 10 metrov štvorcových.

5. Nájdite osemciferné číslo (označme si ho X), pre ktoré platí: X sa skladá len z cifier 1, 2, 3 a 4. Keď X rozdelíme v polovici na dve štvorciferné čísla a potom pravé odpočítame od ľavého, dostaneme 2222. Keď od X odpočítame X napísané odzadu, dostaneme 33108867. Nájdite všetky riešenia.

Riešenie: Rozdielom dvoch kladných osemciferných čísel je maximálne osemciferné číslo. Keďže prvá cifra X je maximálne 4 a posledná minimálne 1, tak aby sme dostali rozdiel 3, jedinou možnosťou je, že prvá cifra bude 4 a posledná 1. Ak by nastal prípadný prechod cez desiatku, tak by sme mohli dostať menej ako 8-ciferné číslo. Podobne dostaneme, že druhá cifra X je tiež 4 a predposledná 1.

Teraz využijeme, že keď X rozdelíme v polovici na dve štvorciferné čísla a potom pravé odpočítame od ľavého, dostaneme 2222. Keďže posledné dve cifry čísla X sú 11, tak posledné dve cifry ľavej polovice čísla X musia byť 33. Potom sa ale pravá časť čísla X rovná $4433 - 2222 = 2211$, a teda číslo X sa rovná 44332211. Skúškou overíme, že toto číslo spĺňa požiadavky zo zadania.

6. Vypočítajte plochu, ktorú zaberá písmeno V na nasledujúcom obrázku:



Riešenie: Písmeno V je celé v ľavej časti štvorca. Túto časť tvorí obdĺžnik s rozmermi 32 x 16. Dokonca ľahko nahliadneme, že zaberá len polovicu tohto obdĺžnika. Keďže obdĺžnik má strany s dĺžkami 16 a 32, jeho polovica bude mať obsah $16 \cdot 16 = 256$.

Vnútri písmena V je ešte jeden čierny trojuholník, ktorý je podobný trojuholníku, ktorý ohraničuje písmeno V. Keďže jeho najkratšia strana má dĺžku $16 - 4 - 4 = 8$, čo je polovica dĺžky strany prislúchajúceho veľkého trojuholníka, jeho obsah bude štvrtinový, teda $\frac{1}{4} \cdot 256 = 64$.

Obsah písmena V bude preto $256 - 64 = 192$.

7. Dokážte, že číslo $\sqrt{17 - 12\sqrt{2}} + \sqrt{17 + 12\sqrt{2}}$ je prirodzené.

Riešenie: Ľahko nahliadneme, že $17 - 12\sqrt{2} > 0$. Vyplýva to z toho, že keď dáme $12\sqrt{2}$ na druhú stranu nerovnice a umocníme ju na druhú, dostaneme ekvivalentné tvrdenie $289 > 288$, ktoré je pravdivé. Preto je odmocnina dobre definovaná v reálnych číslach, a teda uvedené číslo je reálne. Keďže odmocnina je nezáporná,

uvedené číslo je tiež nezáporné, pretože je súčtom dvoch nezáporných čísel. Označme jeho hodnotu x. Po umocnení na druhú dostávame, že platí:

$$\begin{aligned}
x &= \sqrt{17-12\sqrt{2}}+\sqrt{17+12\sqrt{2}},\\
x^2 &= 17-12\sqrt{2}+2\sqrt{17-12\sqrt{2}}\sqrt{17+12\sqrt{2}}+17+12\sqrt{2},\\
x^2 &= 34+2\cdot\sqrt{289-288},\\
x^2 &= 34+2\cdot 1,\\
x^2 &= 36,\\
|x| &= 6,\\
x &= 6,
\end{aligned}$$

pričom v poslednom kroku sme využili to, že x je nezáporné. Tým, sme dokázali, že číslo $\sqrt{17-12\sqrt{2}}+\sqrt{17+12\sqrt{2}}$ je prirodzené a našli sme aj jeho hodnotu.

8. Nájdite všeobecné vyjadrenie pre n-tý člen postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ definovanej nasledujúcim predpisom:

$$a_n = \frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}.$$

Riešenie: Výpočtom niekoľkých prvých členov tejto postupnosti zistíme, že by mohlo platiť

$$a_n = 1-\frac{1}{(n+1)!}.$$

Tento predpoklad dokážeme matematickou indukciou. Pre $n=1$ dostávame, že platí

$$a_1 = \frac{1}{2!}=\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2!},$$

teda vzťah platí.

Predpokladajme, že tvrdenie platí pre nejaké n. Dokážeme, že platí aj pre
Podľa vzťahu v zadaní platí

$$a_{n+1} = \frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}+\frac{n+1}{(n+2)!}.$$

Využitím indukčného predpokladu dostaneme, že platí

$$a_{n+1} = 1-\frac{1}{(n+1)!}+\frac{n+1}{(n+2)!}=1-\frac{(n+2)-(n+1)}{(n+2)!}=1-\frac{1}{(n+2)!},$$

čo sme chceli dokázať.

Výsledková listina po 1. sérii korešpondenčnej súťaže

Por.	Priezvisko	Meno	Kategória	Škola	1	2	3	4	5	6	7	8	Spolu
1	Šromeková	Karolína	C	G Poprad, D. Tatarku			5	5	5	5			20
1	Zacharová	Miriam	C	G A. Merici Trnava			5	5	5	5			20
3	Traj	Rudolf	B	G A. Bernoláka Námestovo					5	5	4	5	19
4	Šimončičová	Lenka	C	G A. Merici Trnava			5	5	1	2			13
5	Golhová	Ivana	A	OA Šurany							4		4

Ďalší súťažiaci získali 0 bodov.

Zadania 2. série úloh korešpondenčnej súťaže

1. Dvaja nosiči vo Vysokých Tatrách nesú náklad potravín na Téryho chatu. Keby zobral druhý od prvého dve škatule, náklad druhého by bol dvakrát ťažší ako prvého. Keby zobral prvý od druhého dve škatule, náklad oboch by bol rovnaký. Koľko škatúľ niesol prvý a koľko druhý?

2. Škola objednala spolu 324 bielych, ružových a červených astier na kytice. Ružových astier bolo o 36 viac ako bielych a červených bolo dvakrát toľko ako bielych. Koľko rovnakých kytíc (rovnaký počet kvetov aj farieb) by mohli zviazať z týchto kvetov? Koľko kvetov jednotlivých farieb by bolo v každej kytici? Napíšte všetky možnosti.

3. Máme 12 navonok rovnakých mincí, z ktorých jedna je falošná. Má inú hmotnosť ako ostatné, avšak nevieme, či je ľahšia alebo ťažšia. Navrhnite postup, ktorým odhalíte falošnú mincu a určíte, či je ťažšia alebo ľahšia, pomocou troch vážení na rovnoramenných váhach bez závaží.

4. Na štadióne pripravujú bežecké dráhy. Navrhnite rozmiestnenie štartovacích blokov pre 4 pretekárov, aby pri jednom obehu štadióna (s cieľom na rovine) bežali rovnako dlhú dráhu. Dĺžka rovných úsekov je 100 m, polomer vnútornej dráhy 20 m a dráha je široká 1 m.

5. Aký najmenší počet čísel je nutné vyčiarknuť z množiny čísel 1, 2, 3, ..., 2011 tak, aby sa ani jedno zo zostávajúcich čísel nerovnalo súčinu iných dvoch zostávajúcich (nevyčiarknutých) čísel? Akým spôsobom to treba urobiť?

6. Určte počet všetkých štvorciferných prirodzených čísel, ktorých desiatkový zápis obsahuje práve dve jednotky a ktoré sú deliteľné šiestimi.

7. Paľko ukladá svoje dvojcentové mince do štvorca. Keď zaplnil celý štvorec, zostalo mu 30 centov. Keď chcel utvoriť štvorec so stranou o 1 dlhšou, chýbalo mu 32 centov. Koľko mal Paľko dvojcentových mincí?

8. Nech $f(x) = ax^2 + bx + c$, $x \in \mathbb{R}$, pričom reálne koeficienty a, b, c sú také, že rovnica $f(x) = x$ nemá reálne riešenie. Dokážte, že ani rovnica $f(f(x)) = x$ nemá reálne riešenie.

9. Dokážte, že číslo $2^{1092} - 1$ je deliteľné číslom 1093^2.

10. Nájdite všetky prirodzené čísla m, n, ktoré sú riešeniami rovnice $2^m - 3^n = 7$.

11. Zistite, či existuje množina 4 004 takých prirodzených čísel, že súčet čísel ľubovoľnej 2 003-prvkovej podmnožiny tejto množiny nie je deliteľný číslom 2 003.

12. Nech a, b, c sú kladné reálne čísla, ktorých súčin nie je väčší ako ich súčet. Dokážte, že potom platí nerovnosť

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{3}abc.$$

13. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je definovaná predpisom $a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1}$, pričom $a_1 = 20$, $a_2 = 30$. Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré je $5a_{n+1}a_n + 1$ druhou mocninou celého čísla.

14. Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla n platí nasledujúca nerovnosť:

$$\left(2n^2 + 3n + 1\right)^n \geq 6^n \cdot (n!)^2$$

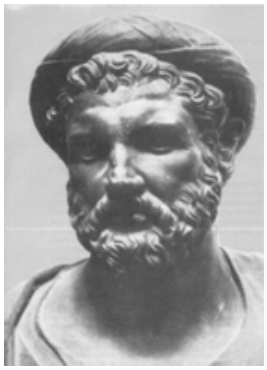
Termín odoslania riešení úloh 2. série: do 16. 5. 2011

Riešenia zasielajte na adresu:

P-MAT, n. o.
Ing. Mgr. Martin Hriňák
P. O. BOX 2
814 99 Bratislava 1

Črepky z histórie matematickej kultúry

Veľmi známa veta

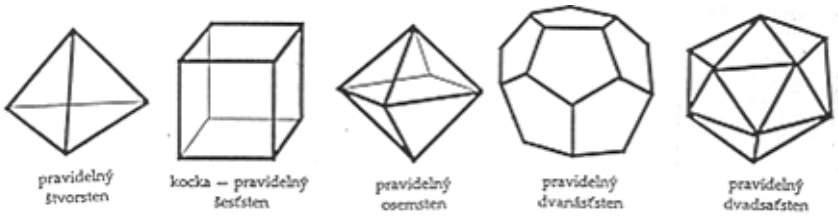


Skoro každý ju pozná. V škole ste o nej počuli: *Obsah štvorca zostrojeného nad preponou pravouhlého trojuholníka sa rovná súčtu obsahov štvorcov zostrojených nad oboma odvesnami.* Poznáme viac než sto rôznych dôkazov tejto Pytagorovej vety. Prirodzené čísla a, b, c, pre ktoré platí $a^2 + b^2 = c^2$, nazývame *pytagorovská* trojica čísiel. **Pytagoras** (asi 570 – 496 pred n. l.) odhalil, že čísla s touto vlastnosťou možno vytvárať podľa vzťahov $a = 2n + 1$, $b = 2n^2 + 2n$, $c = 2n^2 + 2n + 1$, kde n je ľubovoľné prirodzené číslo. On a jeho žiaci, *pytagorovci*, odhalili až neskutočnú harmóniu celočíselných vzťahov v štruktúre nimi poznávaného sveta, nadchli ich nemenné zákonitosti geometrie aj aritmetiky. Svet prirodzených čísiel pochopili ako riadiaci princíp vesmíru. Objavili matematiku ako metódu argumentácie a logického odvodenia. Vycítili, že prostredníctvom čísel sa dozvedáme skutočnú pravdu. Svoj prehnaný mysticizmus o všemohúcnosti prirodzených čísiel ale svojou vedou aj obmedzili. Odhalili nesúmerateľnosť strany a uhlopriečky štvorca (druhá odmocnina z dvoch je iracionálne číslo, nedá sa vyjadriť ako pomer dvoch nesúdeliteľných prirodzených čísiel). Vlastnou metódou prerušili svoje ilúzie. Traduje sa, že keď sa pýtali Pytagora, koľko má nasledovníkov, vraj vtipne odpovedal: *Polovica z nich sa učí len matematiku, štvrtina študuje len prírodovedu, sedmina iba mlčanlivo premýšľa a zvyšok sú tri dievčatá*. Koľko nasledovníkov mal Pytagoras?

Platónske telesá

Pred 2 500 rokmi mali etruské deti obľúbenú hračku – pravidelný dvanásťsten (vykopávky v Monte Loffa pri Padove). Ide o hračku z Ptolemaiovej doby, ktorá je vystavená v egyptologických zbierkach Britského múzea v Londýne. Ktoré telesá spĺňajú definíciu pravidelného mnohostena? Tie, ktoré sú konvexné, majú všetky steny zhodné pravidelné n-uholníky a pri každom vrchole je zoskupený rovnaký počet hrán (stien). Takýchto telies je len päť a majú prezývku *platónske*. V starom Grécku ich vlastnosti podrobne študoval aj filozof **Platón** (427 – 347 pred n. l.). Zamyslite sa nad tvrdením, že platónskych telies (ako typov) je len a práve päť.

Dušan Jedinák



V Y H L Á S E N I E

o poukázaní sumy do výšky 2 % zaplatenej dane z príjmov fyzickej osoby

podľa č. 595/2003 Z. z. o dani z príjmov v znení neskorších predpisov, ktorej bolo za zdaňovacie obdobie vykonané ročné zúčtovanie preddavkov na daň z príjmov zo závislej činnosti

Rok : 2010

Uvádza sa zdaňovacie obdobie, za ktoré sa platí daň

I. ÚDAJE O DAŇOVNÍKOVI

Priezvisko

01	

Meno

02	

Rodné číslo (U cudzích št. príslušníkov dátum narodenia.)

03							/				

Adresa trvalého pobytu

Ulica a číslo

04	

PSČ

05	

Názov obce

06	

Štát

07	

Číslo telefónu

08	

Suma do výšky 2 % zaplatenej dane

09	Zaplatená daň, z ktorej sa vypočíta suma do výšky 2 % zaplatenej dane	
10	Suma do výšky **2 %** zo zaplatenej dane z r. 09 (min. 3,32 EUR)	

Na r**. 09** sa uvádza daňová povinnosť daňovníka, znížená o daňový bonus, vypočítaná v roku (**nie** daň na úhradu), v ktorom sa podáva toto vyhlásenie; uvádza sa riadok 03 z potvrdenia o zaplatení dane, ktoré je súčasťou tohto vyhlásenia.
Na **r. 10** uvádza suma zaokrúhlená s presnosťou na dve desatinné miesta, pričom táto suma nesmie byť nižšia ako 3,32 EUR.

Dátum zaplatenia dane

11	

Z riadku 05 potvrdenia o zaplatení dane, ktoré je súčasťou vyhlásenia. V prípade daňového preplatku z ročného zúčtovania preddavkov na daň sa uvedie dátum 31. marec zdaňovacieho obdobia, v ktorom sa toto vyhlásenie podáva.

II. ÚDAJE O PRIJÍMATEĽOVI

Obchodné meno alebo názov

12	Jednota slovenských matematikov a fyzikov pri SAV

Sídlo

13	Mlynská dolina, F1, 84248 Bratislava

Právna forma

14	Občianske združenie (83/90 Zb.)

Identifikačné číslo prijímateľa (IČO)

15	0	0	1	7	8	7	0	5				

Vyhlasujem, že uvedené údaje v tomto vyhlásení sú pravdivé.

V..... dňa..... .....

Podpis daňovníka

Obsah

Redakčná pošta ..... 2. strana obálky

Dušan Jedinák: Štefan Schwarz – priateľ matematickej kultúry 1

Dušan Jedinák: Nevypočítateľná matematická radosť..... 4

Korešpondenčná súťaž v školskom roku 2010/2011 6

Riešenia 1. série úloh korešpondenčnej súťaže..... 6

Výsledková listina po 1. sérii korešpondenčnej súťaže 10

Zadania 2. série úloh korešpondenčnej súťaže 10

Dušan Jedinák: Črepky z histórie matematickej kultúry... 12

Vyhlásenie o poukázaní sumy do výšky 2 % zaplatenej dane.....3. strana obálky

---

MATMIX – matematický časopis pre žiakov základných a stredných škôl, vydáva Ing. Mgr. Martin Hriňák a Jednota slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Bratislava 1, ako pomocnú literatúru pre predmetové komisie matematiky a pre žiakov so záujmom o matematiku.

Šéfredaktor: Ing. Mgr. Martin Hriňák
Redakcia: Dušan Jedinák, Bc. Katarína Škrovinová
Vydavateľ: Ing. Mgr. Martin Hriňák
Adresa redakcie: P-MAT, n. o., Ing. Mgr. Martin Hriňák, P. O. BOX 2,
814 99 Bratislava 1
E-mail: matmix@matmix.sk
Webová stránka: http://www.matmix.sk
Registračné číslo MK SR: EV 2029/08
ISSN: 1336-7854
Náklad: 50 ks. Vychádza 3-krát ročne.