Zadania 1. série úloh korešpondenčnej súťaže v školskom roku 2008/2009

1. Podarilo sa nám z mora zachrániť dvoch stroskotancov – Janíčka a Marienku. Janík je dvakrát taký starý ako bola Marienka, keď bol Janík o šesť rokov starší ako je teraz Marienka. Keď bude Marienka o šesť rokov staršia ako je teraz Janík, budú spolu rovnako starí ako bude ich mama, ktorá má teraz 46 rokov. Koľko majú rokov?

2. Na lavičke v parku sedia štyri dievčatá: Jana, Eva, Zuzana a Pavla. Zoraďte dievčatá podľa výšky, podľa veku a podľa krásy, ak viete, že:
a) Zuzana je vyššia ako Eva, ale nižšia a krajšia ako Pavla.
b) Pavla je mladšia ako Zuzana alebo Eva.
c) Eva je krajšia ako Zuzana, ale nie je taká pekná ako Jana.
d) Jana je staršia ako Zuzana a mladšia ako Eva, ale je menšia ako obe.

3. Nech x a y sú také reálne čísla, že čísla $x^2 + y^2$, $x^3 + y^3$ a $x^4 + y^4$ sú racionálne. Dokážte, že aj čísla $x + y$ a xy sú racionálne.

4. Na číselnej osi sú vyznačené tri čísla a, $2a$, $5a - 3$, pričom platia nasledujúce nerovnosti: $a < 2a < 5a - 3$. Zostrojte obraz čísla 2.

5. Štvorec s rozmermi $n \times n$ jednotiek je rozdelený na n^2 jednotkových štvorcov. Určte počet všetkých štvorcov v tomto útvare. Výsledok uveďte v uzavretom tvare, teda takom, ktorý bude obsahovať len konečný počet operácií ako sčítanie, násobenie, delenie a pod. bez ohľadu na veľkosť čísla n.

6. Anton a Braňo vyrazili na svojich motocykloch do susedného mesta. Jazdili pohodlne, držali sa spolu. V pätine cesty si Anton spomenul, že zabudol doma svoje dokumenty. Preto sa otočil a vrátil sa späť domov, pričom svoju rýchlosť zvýšil o 25 %. Braňo pokračoval v ceste, svoju rýchlosť znížil o 25 %. Anton si doma bez straty času vyzdvihol dokumenty a vyrazil znova na cestu. Poslednú časť cesty absolvovali už zase spolu rýchlosťou 48 km/h, pričom oproti pôvodnému plánu meškali 10 minút. Určte vzdialenosť susedného mesta.

7. Nájdite všetky také celé čísla y a prvočísla p, q menšie ako 100, pre ktoré platí

$$1\,999 = 86y + p - q\,.$$

8. Koľko stien má ihlan, ktorý má toľko hrán, ako má vrcholov pravidelný mnohouholník s vnútorným uhlom 160°?

9. Nech *ABCD* je konvexný štvoruholník a nech *M* je stred úsečky *CD*. Priamky *BM* a *AM* sú kolmé a platí $|AB| = |BC| + |AD|$. Dokážte, že priamky *BC* a *AD* sú kolmé.

10. Nájdite aritmetickú postupnosť piatich prvočísel s diferenciou aspoň 11.

11. Nájdite dolnú celú časť čísla $\sqrt[3]{24+\sqrt[3]{24+\cdots+\sqrt[3]{24}}}$, ak viete, že sa v uvedenom výraze nachádza *n* odmocnín (*n* je prirodzené číslo).

12. Dvaja hráči hrajú hru na hracej ploche $1 \times 2\,000$ políčok. Striedavo vpisujú do prázdnych políčok písmená S a O. Hráč, ktorý skompletizuje ako prvý tri za sebou idúce políčka obsahujúce slovo SOS, vyhráva. Ak sú všetky políčka vyplnené písmenami bez toho, aby sa niekde nachádzalo slovo SOS, nastáva remíza. Zistite, či existuje vyhrávajúca stratégia pre jedného z hráčov.

13. Je daných $2n$ bodov v rovine, pričom žiadne tri z nich neležia na jednej priamke. Dokážte, že tieto body môžu byť rozdelené na *n* dvojíc tak, že úsečky určené týmito dvojicami bodov, sa nepretínajú.

14. V tabuľke $m \times n$ políčok je napísaných *mn* reálnych čísel. V každom ťahu je dovolené zmeniť znamienka v ľubovoľnom riadku alebo stĺpci. Dokážte, že je možné po konečnom počte ťahov dosiahnuť stav, že súčet čísel v každom riadku a každom stĺpci bude nezáporný.

Termín odoslania riešení úloh 1. série: do 15. 4. 2009

Riešenia zasielajte na adresu:

MATMIX
Doc. RNDr. Kalina Martin, CSc.
Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Stavebná fakulta STU
Radlinského 11
813 68 Bratislava