Čo sa skrýva pod skratkou MEMO?

MEMO je skratka Stredoeurópskej matematickej olympiády (Middle European Mathematical Olympiad). Táto súťaž vznikla rozšírením rakúsko-poľskej matematickej súťaže o nové krajiny vrátane Slovenska. Jej prvý ročník sa uskutočnil v septembri v roku 2007 v Rakúskom Eisenstadte. Každý rok v apríli/máji vyberie Slovenská komisia Matematickej olympiády na základe výsledkov výberového sústredenia šesťčlenné družstvo, ktoré sa v septembri zúčastní tejto súťaže. Člen družstva musí spĺňať tieto podmienky:

- nebude členom družstva na medzinárodnej matematickej olympiáde v prebiehajúcom ročníku;
- v školskom roku po uskutočnení tejto súťaže bude ešte na strednej škole.

Podrobnejšie informácie o súťaži nájdete na stránke http://www.kms.sk/memo.php.

Zadania súťažných úloh MEMO 2007

Súťaž jednotlivcov

1. Nech *a*, *b*, *c*, *d* sú kladné reálne čísla, pričom $a+b+c+d=4$. Dokážte, že

$$a^2bc+b^2cd+c^2da+d^2ab\le 4.$$

(*Švajčiarsko*)

2. Množina loptičiek obsahuje *n* loptičiek, ktoré sú označené číslami 1, 2, 3, ..., *n*. Daných je $k>1$ takých množín. Chceme zafarbiť všetky loptičky dvoma farbami, čiernou a bielou, a to tak, aby

(*i*) loptičky označené rovnakým číslom mali rovnakú farbu,

(*ii*) každá množina $k+1$ loptičiek označených (nie nutne rôznymi) číslami a_1, a_2, ..., a_{k+1}, ktoré spĺňajú podmienku $a_1+a_2+\ldots+a_k=a_{k+1}$, obsahovala z každej farby aspoň jednu loptičku.

V závislosti od *k* nájdite najväčšie možné číslo *n*, pre ktoré existuje takéto zafarbenie.

(*Slovinsko*)

3. Nech *k* je kružnica a k_1, k_2, k_3, k_4 sú štyri menšie kružnice so stredmi O_1, O_2, O_3, O_4 ležiacimi na *k*. Pre $i=1,2,3,4$ a $k_5=k_1$ sa kružnice k_i a k_{i+1} pretínajú v bodoch A_i a B_i tak, že A_i leží na *k*. Body O_1, A_1, O_2, A_2, O_3, A_3, O_4, A_4 ležia v tomto poradí na *k* a sú navzájom rôzne. Dokážte, že $B_1B_2B_3B_4$ je pravouholník.

(*Švajčiarsko*)

4. Určte všetky dvojice (x, y) kladných celých čísel spĺňajúcich rovnosť

$$x! + y! = x^y .$$

(*Česko*)

Súťaž družstiev

5. Nech a, b, c, d sú ľubovoľné reálne čísla z uzavretého intervalu $\left\langle \frac{1}{2}, 2 \right\rangle$ spĺňajúce podmienku $abcd = 1$. Nájdite maximálnu hodnotu výrazu

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{d}\right)\left(d + \frac{1}{a}\right).$$

(*Česko*)

6. Pre ľubovoľnú množinu P piatich bodov v rovine vo všeobecnej polohe označíme $a(P)$ počet ostrouhlých trojuholníkov s vrcholmi v P (body sú vo všeobecnej polohe, ak sú navzájom rôzne a žiadne tri z nich neležia na jednej priamke). Určte najväčšiu možnú hodnotu $a(P)$.

(*Švajčiarsko*)

7. Nech $s(T)$ označuje súčet dĺžok hrán štvorstena T. Uvažujme štvorsteny s vlastnosťou, že dĺžky ich šiestich hrán sú navzájom rôzne kladné celé čísla, pričom jedno je 2 a jedno je 3. Nazvime ich MEMO-štvorstenmi.

a) Nájdite všetky kladné celé čísla n, pre ktoré existuje MEMO-štvorsten T taký, že $s(T) = n$.

b) Koľko existuje navzájom nezhodných MEMO-štvorstenov T takých, že platí $s(T) = 2\,007$?

Dva štvorsteny sú nezhodné, ak jeden nemôže byť zobrazený na druhý pomocou súmerností podľa rovín, posunutí a otočení.
(Nie je potrebné dokázať, že štvorsteny uvažované v riešení sú nedegenerované, t. j. že majú nenulový objem.)

(*Rakúsko*)

8. Určte všetky kladné celé čísla k s nasledujúcou vlastnosťou: existuje celé číslo a také, že $(a + k)^3 - a^3$ je násobkom čísla 2 007.

(*Rakúsko*)

Zadania súťažných úloh MEMO 2008

Súťaž jednotlivcov

1. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť celých kladných čísel s vlastnosťou: pre každú štvoricu indexov (i, j, k, l), kde $1 \le i < j \le k < l$ a $i + l = j + k$, platí nerovnosť $a_i + a_l > a_j + a_k$. Určte najmenšiu možnú hodnotu čísla a_{2008}.

(*Rakúsko*)

2. Uvažujme šachovnicu $n \times n$, kde $n > 1$. Koľkými spôsobmi môžeme vybrať $2n - 2$ polí tejto šachovnice tak, aby spojnica stredov žiadnych dvoch vybraných polí nebola rovnobežná so žiadnou diagonálou šachovnice?

(*Švajčiarsko*)

3. Nech *ABC* je rovnoramenný trojuholník s ramenami *AC* a *BC*. Kružnica vpísaná tomuto trojuholníku sa dotýka strany *AB* v bode *D* a strany *BC* v bode *E*. Priamka rôzna od *AE* prechádza bodom *A* a pretína vpísanú kružnicu v bodoch *F* a *G*. Priamky *EF* a *EG* pretínajú priamku *AB* v bodoch *K* a *L*. Dokážte, že platí $|DK| = |DL|$.

(*Maďarsko*)

4. Nájdite všetky také celé čísla *k*, že čísla $4n + 1$ a $kn + 1$ sú nesúdeliteľné pre každé celé číslo *n*.

(*Maďarsko*)

Súťaž družstiev

5. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pre ktoré platí

$$xf(x + xy) = xf(x) + f(x^2) f(y)$$

pre všetky reálne čísla *x*, *y*.

(*Švajčiarsko*)

6. Na tabuli je napísaných *n* celých kladných čísel, pričom $n \ge 2$. V jednom kroku vyberieme dve z napísaných čísel a každé z nich nahradíme ich súčtom. Určte všetky hodnoty *n*, pre ktoré môžeme z akejkoľvek začiatočnej *n*-tice prirodzených čísel po konečnom počte krokov dostať *n*-ticu rovnakých čísel.

(*Slovensko*)

7. Nech ABC je ostrouhlý trojuholník. Bod E leží v opačnej polrovine s hraničnou priamkou AC ako bod B a D je vnútorný bod úsečky AE. Nech $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle CDE|$, $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle ECD|$ a $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle EBA|$. Dokážte, že body B, C a E sú kolineárne.

(*Slovinsko*)

8. Nech súčet všetkých kladných deliteľov celého kladného čísla n je mocninou čísla 2. Dokážte, že aj počet týchto deliteľov je mocninou čísla 2.

(*Česko*)