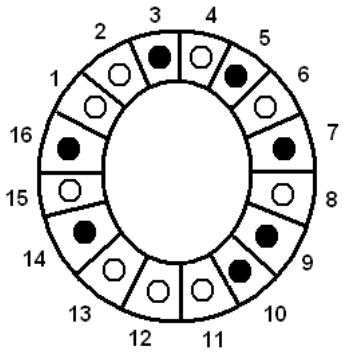
Korešpondenčná súťaž v školskom roku 2008/2009

Riešenia 2. série úloh korešpondenčnej súťaže

1. Lenka sa z nudy hrala takúto hru. V priehradkách na kruhu sú guľôčky. Začala na určitom poli počítať a zobrala si z každého piateho poľa guľôčku. Zistila, že sa tak dajú vybrať naraz všetky čierne. Miesto, z ktorého guľôčku zobrala preč, vyškrtla a už ďalej nepočítala. Začala čiernou guľôčkou, to je jedna a zobrala ju preč. Ďalej zobrala preč piatu, desiatu, pätnástu až tridsiatu a boli to vždy čierne guľôčky (čísla na obrázku tam sú pre lepší popis riešenia, nie sú to tie, ako Lenka počítala). Kde Lenka začala počítať a ktorým smerom postupovala (v smere alebo proti smeru hodinových ručičiek)?



Riešenie: Na základe zadania pre prvé dve čierne guľôčky, ktoré Lenka zobrala, vieme, že musia mať medzi sebou 3 iné guľôčky. Keď sa pozrieme na obrázok, vidíme, že existujú len tri dvojice takých guľôčok – 3 a 7, resp. 5 a 9, resp. 10 a 14. Teraz ich len vyskúšame. Začnime 3 a pôjdeme v smere otáčania hodinových ručičiek. Postupne budeme brať guľôčky 7 a 12 – a dostali sme sa k bielej. Ak začneme 7, potom zoberieme 3, 14, 9 a 2, ale tá už je biela. Ak začneme 5 a pôjdeme v smere otáčania hodinových ručičiek, zoberieme postupne tieto guľôčky: 5, 9, 14, 3, 10, 16 a 7, čím sme našli jedno riešenie úlohy, lebo sme zobrali všetky čierne guľôčky. Ak začneme 9 a pôjdeme proti smeru otáčania hodinových ručičiek, zoberieme 5, 16 a 11, ktorá je opäť biela. Ostali nám už len dve možnosti. Ak začneme 10 a pôjdeme v smere otáčania hodinových ručičiek, dostaneme sa na 14, 3 a 8, ktorá je zase biela. Ak začneme 14 a pôjdeme proti smeru otáčania hodinových ručičiek, zoberieme 10, 5, 16, 9, 3 a 12, ktorá je biela.

Úloha má jediné riešenie – Lenka začala počítať na čísle 5 a postupovala v smere otáčania hodinových ručičiek.

2. Chceme bez zvyšku vydláždiť obdĺžnikovú podlahu s rozmermi 160 cm a 120 cm. Pre túto prácu môžeme kúpiť dva druhy dlaždíc:

a) tvaru obdĺžnika s rozmermi 20 cm a 30 cm v cene 21 strieborných za kus,

b) tvaru štvorca so stranou dĺžky 20 cm v cene 18 strieborných za kus.

Ktorá kúpa je výhodnejšia a prečo?

Riešenie: V prvom prípade budeme potrebovať $8 \cdot 4 = 32$ dlaždíc v cene $32 \cdot 21 = 672$ strieborných. V druhom prípade budeme potrebovať $8 \times 6 = 48$ dlaždíc v cene $48 \cdot 18 = 864$ strieborných. Porovnaním týchto dvoch cien vidíme, že výhodnejšia je prvá možnosť.

3. Súčet cifier trojciferného prirodzeného čísla x označíme y. Určte hodnotu x, ak viete, že $x + y$ a xy sú také prirodzené čísla, ktorých všetky cifry sú rovnaké.

Riešenie: Keďže x je trojciferné číslo, tak hodnota y môže byť maximálne 27, teda pre ohraničenie hodnôt xy dostávame

$$100 = 100 \cdot 1 \leq xy \leq 999 \cdot 27 = 26\,973.$$

To znamená, že xy môže nadobúdať len tieto hodnoty: 111, 222, ..., 999, 1 111, 2 222, ..., 9 999, 11 111 a 22 222. Ak je xy trojciferné, tak je deliteľné 111, teda 37 a 3. To znamená, že jedno z čísel x, y musí byť deliteľné 3 a jedno 37 (môže to byť aj to isté). Keďže na základe kritéria deliteľnosti tromi vieme, že prirodzené číslo je deliteľné tromi práve vtedy, keď je jeho ciferný súčet deliteľný tromi, buď sú deliteľné tromi obe čísla x, y, alebo ani jedno z nich. Keďže je tromi deliteľné aspoň jedno z nich, tak sú trojkou deliteľné obe. Číslo y nemôže byť deliteľné 37, lebo je menšie ako 37, preto 37 delí x. To znamená, že x je deliteľné $3 \cdot 37 = 111$. Číslo $x + y$ musí mať všetky cifry rovnaké. Avšak číslo x má všetky cifry rovnaké (lebo je trojciferné a deliteľné 111) a rozdiel dvoch rôznych trojciferných čísel, ktoré majú rovnaké cifry, je aspoň 111, čo je viac ako y. Môžeme to však dokázať aj vyskúšaním 9 možností 111, ..., 999, keď zistíme, že ani jedno z nich nevyhovuje.

Uvažujme teraz štvorciferné možnosti. Čísla tvaru *aaaa* sú deliteľné číslom 1 111, ktoré si môžeme zapísať ako súčin 11 a 101. Keďže 101 je prvočíslo, tak musí deliť x. Keďže x už nemôže byť deliteľné 11, lebo by malo hodnotu aspoň 1 111, musí byť 11 deliteľné y. Avšak ciferný súčet x je párny a menší ako 20, lebo sčítavame dve rovnaké číslice (x môže byť len 101, 202, ..., 909), teda ani v tomto prípade úloha nemá riešenie.

Pri päťciferných číslach tvaru *aaaaa* dostávame, že sú deliteľné číslom 11 111. Keďže $11111 = 41 \cdot 271$ je rozklad na prvočísla, musí byť x deliteľné aj 41 aj 271, lebo y môže byť maximálne 27. To ale znamená, že x musí byť deliteľné 11 111, čo je v spore s tým, že je to trojciferné číslo.

Spojením týchto troch prípadov dostávame, že neexistuje číslo x s hľadanou vlastnosťou.

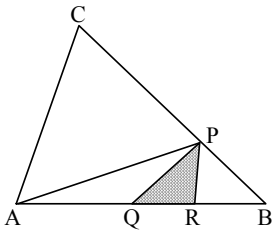
4. Otec má synov Juraja a Tomáša. Každý rok im dáva väčšiu sumu peňazí. Toho roku ho to vyšlo o 50 % viac ako pred piatimi rokmi. Sumu, ktorú im každoročne dáva, vypočíta takto: Každý rok vytvorí druhú mocninu veku syna (v rokoch). Určí rozdiel oproti druhej mocnine z minulého roku a to je počet stokorunáčok, ktoré dostane chlapec tento rok. Juraj má 11 rokov. Koľko rokov má Tomáš?

Riešenie: Tento rok dostal Juraj $11^2 - 10^2 = 21$ stokorunáčok. Ak označíme vek Tomáša ako t, potom Tomáš dostal $t^2 - (t-1)^2 = 2t - 1$ stokorunáčok. Spolu dostali $21 + 2t - 1 = 2t + 20$ stokorunáčok. Pred piatimi rokmi mal Juraj 6 rokov a Tomáš $t - 5$. Dostali preto spolu

$$6^2 - 5^2 + (t-5)^2 - (t-6)^2 = 2t$$

stokorunáčok. Na základe informácie zo zadania musí platiť $2t + 20 = 1{,}5 \cdot 2t$. Túto lineárnu rovnicu vyriešime a dostaneme $t = 20$, teda Tomáš má 20 rokov.

5. Určte, akú časť obsahu trojuholníka *ABC* tvorí trojuholník *PQR*, ak viete, že bod *P* delí stranu *BC* v pomere 1:2, bod *Q* delí stranu *AB* v pomere 1:1, a bod *R* delí stranu *AB* v pomere 3:1.



Riešenie: Trojuholníky *ABP* a *ACP* majú rovnakú výšku na stranu *BP*, resp. *CP*. Preto sú obsahy týchto trojuholníkov v pomere rovnajúcom sa pomeru dĺžok strán *BP* a *CP*, teda 1:2. To znamená, že obsah trojuholníka *ABP* je jednou tretinou obsahu trojuholníka *ABC*.

Keďže bod *R* delí stranu *AB* v pomere 3:1 a *Q* je jej stredom, je dĺžka úsečky *QR* jedna štvrtina dĺžky úsečky *AB*. Trojuholníky *ABP* a *PQR* majú rovnakú výšku na stranu *AB*, resp. *QR*, preto je analogicky ako vyššie pomer obsahov trojuholníkov *PQR* a *ABP* 1:4. Celkovo dostávame, že pomer obsahov trojuholníkov *PQR* a *ABC* je 1:12, pretože platí

$$\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABP}} \cdot \frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

6. Pri golfe boli jamky od seba vzdialené 150, 300, 250, 325, 275, 350, 225, 400 a 425 yardov. Robot Golfík sa dá nastaviť tak, aby odpaľoval loptičky na dve rôzne vzdialenosti. (Napr. keď ho nastavíme na odpaľovanie na vzdialenosti 4 yardy a 10 yardov, poradí si hravo s jamkou vzdialenou o 18 yardov – zvládne to na tri údery 10, 4, 4; pri jamke vzdialenej 48 yardov potrebuje pri tomto nastavení aspoň 6 úderov 10, 10, 10, 10, 4, 4.) Ako treba nastaviť Golfíka, aby mu na prejdenie cez všetkých deväť jamiek stačilo menej ako 38 úderov?

Riešenie: Golfíka nastavíme na vzdialenosti 25 a 100 yardov. Potom by mal odpaľovať takto:

100, 25, 25 ... 150 yardov, 3 údery
100, 100, 100 ... 300 yardov, 3 údery
100, 100, 25, 25 ... 250 yardov, 4 údery
100, 100, 100, 25 ... 325 yardov, 4 údery
100, 100, 25, 25, 25 ... 275 yardov, 5 úderov
100, 100, 100, 25, 25 ... 350 yardov, 5 úderov
100, 100, 25 ... 225 yardov, 3 údery
100, 100, 100, 100 ... 400 yardov, 4 údery
100, 100, 100, 100, 25 ... 425 yardov, 5 úderov

Spolu potreboval 36 úderov.

7. Nájdite všetky prvočísla *x*, *y*, *z*, pre ktoré platí $x^y + 1 = z$.

Riešenie: Najprv si všimnime, že *z* sa nemôže rovnať 2. Ak by tak bolo, potom by muselo platiť $x^y = 1$, čo však za podmienky prvočíselnosti *x* a *y* nemôže platiť. To znamená, že *z* musí byť nepárne, a teda x^y musí byť párne. To znamená, že *x* musí byť párne. Keďže párne prvočíslo je len jedno, platí $x = 2$.

Teraz si dokážeme pomocné tvrdenie: $2^{2k+1} + 1$ je pre každé prirodzené číslo *k* zložené číslo. Dôkaz vyplýva z jednoduchých úprav:

$$2^{2k+1} + 1 = 2 \cdot 2^{2k} + 1 = 2 \cdot 4^k + 1 \equiv 2 \cdot 1^k + 1 = 3 \equiv 0 \pmod 3.$$

Keďže *k* je prirodzené číslo, hodnota $2^{2k+1} + 1$ je aspoň 9, teda číslo 3 je netriviálnym deliteľom čísla $2^{2k+1} + 1$, teda číslo $2^{2k+1} + 1$ je zložené.

V našom prípade to znamená, že ak by bolo *y* nepárne prvočíslo, potom by bolo $2^y + 1$ zložené číslo. Ostáva nám preto jediná možnosť, a to $y = 2$, ktorá vedie k riešeniu $z = 5$. Úloha má preto jediné riešenie $x = y = 2$, $z = 5$.

8. Riešte rovnicu

$$\frac{1}{x^2 + 2x - 3} + \frac{18}{x^2 + 2x + 2} = \frac{18}{x^2 + 2x + 1}.$$

Riešenie: Zaveďme substitúciu

$$t = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2.$$

Po dosadení tejto substitúcie dostávame, že má platiť

$$\frac{1}{t - 4} + \frac{18}{t + 1} = \frac{18}{t}.$$

Táto rovnica má zmysel pre $t \neq 4, 0, -1$. Po prenásobení všetkými troma menovateľmi a upravení dostávame ekvivalentnú rovnicu $t^2 - 17t + 72 = 0$, ktorá má dva reálne korene 8 a 9. Teraz prejdeme späť k neznámej *x*.

- Ak $(x+1)^2 = 8$, tak $|x+1| = 2\sqrt{2}$, odkiaľ dostávame dve riešenia: $x_1 = -1 + 2\sqrt{2}$ a $x_2 = -1 - 2\sqrt{2}$.
- Ak $(x+1)^2 = 9$, tak $|x+1| = 3$, odkiaľ dostávame dve riešenia: $x_3 = 2$ a $x_4 = -4$.

Úloha má celkovo štyri riešenia: $x_1 = -1 + 2\sqrt{2}$, $x_2 = -1 - 2\sqrt{2}$, $x_3 = 2$ a $x_4 = -4$.

9. Rozložte polynóm $x^8 + x^4 + 1$ na súčin dvoch nekonštantných polynómov s celočíselnými koeficientmi.

Riešenie: Polynóm zo zadania upravíme:

$$x^8 + x^4 + 1 = x^8 + 2x^4 + 1 - x^4 = \left(x^4 + 1\right)^2 - \left(x^2\right)^2 = \left(x^4 + x^2 + 1\right)\left(x^4 - x^2 + 1\right),$$

čo je jeden z možných rozkladov, keďže oba polynómy na pravej strane sú nekonštantné a majú celočíselné koeficienty.

10. Nech a_1, a_2, …, a_{10} a b_1, b_2, …, b_{10} sú dve permutácie čísel 1, 2, …, 10. Dokážte, že čísla a_1b_1, a_2b_2, …, $a_{10}b_{10}$ nemôžu dávať rozdielne zvyšky po delení číslom 11.

Riešenie: Tvrdenie úlohy dokážeme sporom. Predpokladajme, že existujú také dve permutácie čísel 1, 2, …, 10 – a_1, a_2, …, a_{10} a b_1, b_2, …, b_{10}, že čísla a_1b_1, a_2b_2, …, $a_{10}b_{10}$ dávajú rozdielne zvyšky po delení číslom 11. Keďže každé z čísel a_1, a_2, …, a_{10}, b_1, b_2, …, b_{10} sa rovná niektorému z čísel 1, 2, …, 10, žiadne z nich sa nerovná 11. Potom ani jedno z čísel a_1b_1, a_2b_2, …, $a_{10}b_{10}$ nemôže byť deliteľné 11, lebo 11 je prvočíslo. To znamená, že čísla a_1b_1, a_2b_2, …, $a_{10}b_{10}$ dávajú zvyšky 1, 2, ..., 10 po delení jedenástimi. To znamená, že platí

$$a_1a_2\ldots a_{10} \equiv 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 10 \equiv a_1b_1a_2b_2\ldots a_{10}b_{10} \pmod{11},$$

pričom sme využili, že a_1, a_2, …, a_{10} je permutáciou čísel 1, 2, …, 10.

Keďže čísla a_1, a_2, …, a_{10} sú nesúdeliteľné s číslom 11, po predelení kongruencie číslom $a_1a_2\ldots a_{10}$ dostávame, že má platiť

$$10! = b_1b_2\ldots b_{10} \equiv 1 \pmod{11}.$$

Avšak na základe Wilsonovej vety (dá sa to však overiť aj výpočtom na kalkulačke alebo aj bez nej) platí $10! \equiv -1 \pmod{11}$, teda sme dostali spor, pretože neplatí $1 \equiv -1 \pmod{11}$. Tým sme tvrdenie dokázali.

11. Dokážte, že platia nasledujúce odhady:

$$2\sqrt{101} - 2 < \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{\sqrt{n}} < 20.$$

Riešenie: Najprv si dokážeme pomocné tvrdenie:
Lema: Ak *n* je prirodzené číslo, potom platia nerovnosti

$$2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right).$$

Najprv si dokážeme ľavú nerovnosť. Dôkaz vyplýva z toho, že platí:

$$2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Analogicky dokážeme aj pravú nerovnosť:

$$2\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right) = 2\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right) \cdot \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} > \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

S využitím lemy dostávame, že platí

$$2\sum_{n=1}^{100}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) < \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sum_{n=1}^{100}\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right).$$

Sčítance v oboch krajných sumách sa postupne odčítajú, v každej z nich ostane len prvý a posledný člen, teda platí nerovnosť, ktorú sme chceli dokázať:

$$2\left(\sqrt{101} - 1\right) < \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\left(\sqrt{100} - \sqrt{0}\right).$$

12. Dokážte, že rovnica $a^2 + b^3 = c^4$ má v prirodzených číslach nekonečne veľa riešení.

Riešenie: Dosadením si ukážeme, že pre každé prirodzené číslo *n* je riešením usporiadaná trojica $\left(28n^6, 8n^4, 6n^3\right)$:

$$\left(28n^6\right)^2 + \left(8n^4\right)^3 = 1296n^{12} = \left(6n^3\right)^4$$

Tieto riešenia sú pre každé prirodzené číslo *n* rôzne, čo znamená, že sme našli nekonečne veľa riešení tejto rovnice.

Komentár: Ukážeme si, ako sme dostali vyššie uvedené riešenie. Vieme, že platí

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 .$$

Na základe tohto vzťahu dostaneme, že platí

$$\left(\frac{(n-1)n}{2} \right)^2 + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 .$$

Teraz už len stačí nájsť nekonečne veľa takých *n*, pre ktoré je číslo

$$\left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

druhou mocninou nejakého celého čísla. Na dôkaz tohto tvrdenia môžeme použiť poznatky z teórie čísel o Pellovej rovnici. Dá sa však postupovať aj inak. Vyskúšaním niekoľkých prirodzených čísel dospejeme k riešeniu $(28, 8, 6)$. Potom si už len stačí uvedomiť, že ak máme jedno riešenie, tak keď vynásobíme každé z čísel vhodnou mocninou *n*, tak opäť dostaneme nejaké riešenie danej rovnice.

Ak by sme úlohu riešili iným spôsobom, mohli by sme nájsť aj iné riešenia tejto rovnice, jedno z nich, ktoré nemá vyššie uvedený tvar, je riešenie $(27, 18, 9)$.

13. Zistite, či existujú dve rastúce funkcie *f* a *g*, pre ktoré platí $f(x) - g(x) = \sin x$.

Riešenie: Také dve funkcie existujú a sú to napríklad $f(x) = 2x + \sin x$ a $g(x) = 2x$. To, že platí $f(x) - g(x) = \sin x$, je zrejmé. Pre všetky reálne čísla *x* sú funkcie *f* a *g* diferencovateľné a platí

$$f'(x) = 2 + \cos x \geq 1 > 0,$$
$$g'(x) = 2 > 0,$$

teda prvé derivácie týchto dvoch funkcií sú kladné, a teda obidve funkcie sú rastúce.
Komentár: Z predpisu zvolených funkcií vidíme, že takých funkcií existuje nekonečne veľa (pričom tieto nie sú jediné možné).

14. Nech a, a_1, …, a_5 sú také prirodzené čísla, že platí $a = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$. Dokážte, že číslo $\dfrac{a!}{a_1!a_2!a_3!a_4!a_5!}$ je prirodzené.

Riešenie: Upravením čísla $\dfrac{a!}{a_1!a_2!a_3!a_4!a_5!}$ dostávame, že platí

$$\frac{a!}{a_1!a_2!a_3!a_4!a_5!}=\frac{(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)!}{a_1!a_2!a_3!a_4!a_5!}=\frac{(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)!}{a_1!(a_2+a_3+a_4+a_5)!}\cdot\frac{(a_2+a_3+a_4+a_5)!}{a_2!a_3!a_4!a_5!}=$$

$$=\binom{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{a_1}\cdot\frac{(a_2+a_3+a_4+a_5)!}{a_2!(a_3+a_4+a_5)!}\cdot\frac{(a_3+a_4+a_5)!}{a_3!a_4!a_5!}=$$

$$=\binom{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{a_1}\cdot\binom{a_2+a_3+a_4+a_5}{a_2}\cdot\frac{(a_3+a_4+a_5)!}{a_3!(a_4+a_5)!}\cdot\frac{(a_4+a_5)!}{a_4!a_5!}=$$

$$=\binom{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{a_1}\cdot\binom{a_2+a_3+a_4+a_5}{a_2}\cdot\binom{a_3+a_4+a_5}{a_3}\cdot\frac{(a_4+a_5)!}{a_4!a_5!}=$$

$$=\binom{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{a_1}\cdot\binom{a_2+a_3+a_4+a_5}{a_2}\cdot\binom{a_3+a_4+a_5}{a_3}\cdot\binom{a_4+a_5}{a_4}.$$

Keďže všetky uvedené kombinačné čísla sú prirodzené, je aj číslo $\frac{a!}{a_1!a_2!a_3!a_4!a_5!}$ prirodzené, čo sme mali dokázať.

Výsledkové listiny po 2. sérii úloh

Kategória Z

Por.	Priezvisko	Meno	Trieda	Škola	PS	1	2	3	4	Spolu
1.	Hrušková	Martina	4. B	ZŠ Svit, Mierová 134	10	3	5	–	4	22
2.	Hornyáková	Viktória	kvarta	G P. Pázmanya Nové Zámky	5	3	5	2	0	15

Kategória C

Por.	Priezvisko	Meno	Trieda	Škola	PS	3	4	5	6	Spolu
1.	Chudá	Fatima	1. A	Súkromné konzervatórium Nitra	6	2	5	5	5	23

Kategória A

Por.	Priezvisko	Meno	Trieda	Škola	PS	7	8	9	10	Spolu
1.	Svatý	Lukáš	septima	G Nitra, Párovská 1	17	3	4	5	4	33
2.	Hornyák	Zsolt	septima C	G P. Pázmanya Nové Zámky	12	5	5	5	–	27
3.	Beznák	Samuel	1. C	G Dubnica nad Váhom, Školská 2	14	2	4	5	1	26

Kategória π

Por.	Priezvisko	Meno	Trieda	Škola	PS	11	12	13	14	Spolu
1.	Hornyák	Zsolt	septima C	G P. Pázmanya Nové Zámky	0	5	–	–	–	5