Korešpondenčná súťaž v školskom roku 2008/2009

Riešenia 3. série úloh korešpondenčnej súťaže

1. Určte 2 009. číslicu v postupnosti 1234567891011121314... bez toho, aby ste celé číslo vypisovali.

Riešenie: Jednociferné čísla zaberú 9 číslic. Dvojciferných čísel je 90 a keďže každé z nich má dve cifry, tak zaberú 180 číslic. Keďže každé trojciferné číslo má tri číslice a trojciferných čísel je 900, zaberú spolu 2 700 číslic. Keďže hľadáme číslicu na 2 009. mieste, bude niektorou cifrou niektorého trojciferného čísla.

Vieme, že na trojciferné čísla nám ostalo $2\,009 - 180 - 9 = 1\,820$ číslic. Keďže platí $1\,820 : 3 = 606$, zv. 2, tak 2 009. číslica bude 2. číslicou 607. trojciferného čísla, lebo prvých 606 trojciferných čísel zaberie 1 818 číslic. Týmto 607. trojciferným číslom je číslo $99 + 607 = 706$. Jeho druhou cifrou je 0, takže 2 009. číslica v uvedenej postupnosti je 0.

2. Z číslic 0, 1, 2, 3, ..., 8, 9 vytvorte dva zlomky tak, aby sa ich súčet rovnal 1. Použite pritom všetky číslice a každú len raz.

Riešenie: Vyhovujú napríklad tieto dve riešenia:

$$\frac{16}{32} + \frac{485}{970} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

$$\frac{27}{54} + \frac{309}{618} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

3. Uvažujme všetky letiská v Európe. Z každého vzlietne v rovnakom čase jedno lietadlo a smeruje na najbližšie letisko. Predpokladajme, že všetky vzdialenosti medzi letiskami sú rôzne. Dokážte, že na každom letisku pristane maximálne 5 lietadiel.

Riešenie: Predpokladajme, že by na niektorom letisku L pristálo aspoň 6 lietadiel, ktoré vzlietli z letísk, ktoré si označíme $A_1, A_2, \ldots, A_n$, pričom $n \geq 6$. Označme si A a B tie dve z nich, pre ktoré uhol ALB nadobúda najmenšiu kladnú hodnotu. Ak je takých dvojíc viacero, zvolíme si ľubovoľnú z nich. O trojuholníku ALB vieme, že úsečka AL je kratšia ako AB a BL je kratšia ako AB, pretože lietadlá z A, resp. B leteli na L. To znamená, že úsečka AB je najdlhšou stranou v trojuholníku ALB. To znamená, že oproti nej musí ležať najväčší uhol v trojuholníku ALB. Uhol ALB má však

veľkosť maximálne 60°, pretože $n \geq 6$ a $360° : 6 = 60°$. Ak by mal veľkosť menej ako 60°, tak jeden zo zvyšných dvoch uhlov bude väčší ako 60°, čím dostávame spor s predpokladom. Ak by bol tento uhol 60°, museli by byť aj zvyšné dva uhly 60°, aby sme nedostali hneď spor. Avšak ak sú všetky tri uhly rovnaké, tak ide o rovnostranný trojuholník, a teda vzdialenosti medzi mestami nie sú rôzne.

Iný dôkaz spočíva v tom, že opäť vyberieme rovnako letiská *A* a *B* a ukážeme, že uhol *ALB* má maximálne 60°. Bez ujmy na všeobecnosti nech je úsečka *BL* dlhšia ako *AL*. Zostrojme rovnostranný trojuholník nad stranou *BL* tak, aby obsahoval bod *A*. To sa určite dá, lebo $|\sphericalangle ALB| \leq 60°$ a $|AL| < |BL|$. To ale znamená, že dĺžka úsečky *BA* je menšia ako dĺžka úsečky *BL*, čo je však v spore s tým, že lietadlo z *B* letelo na *L*. To teda znamená, že náš prvý predpoklad nebol správny, a teda na žiadne letisko nemohlo priletieť aspoň 6 lietadiel.

4. Zistite, či existuje taká mocnina čísla 2, ktorá končí na dvojčíslie 22.

Riešenie: Každá aspoň druhá mocnina čísla 2 je deliteľná 4. Zrejme číslo 2 nekončí na 22. Každá ďalšia prirodzená mocnina 2 už bude deliteľná 4. Keďže číslo je deliteľné 4 práve vtedy, keď je štyrmi deliteľné jeho posledné dvojčíslie, tak by muselo byť štyrmi deliteľné aj číslo 22. To však neplatí, preto neexistuje taká mocnina čísla 2, ktorá by končila na dvojčíslie 22.

5. Nájdite všetky prirodzené čísla *n*, pre ktoré je číslo $3^{n+2} + 4^{2n+1}$ deliteľné 13.

Riešenie: Keďže platí

$$3^{n+2} + 4^{2n+1} = 9 \cdot 3^n + 4 \cdot 16^n = 9 \cdot 3^n + 4 \cdot (13+3)^n \equiv 9 \cdot 3^n + 4 \cdot 3^n = 13 \cdot 3^n \equiv 0 \pmod{13},$$

tak číslo $3^{n+2} + 4^{2n+1}$ je deliteľné číslom 13 pre všetky prirodzené čísla *n*.

6. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo *n* je kombinačné číslo $\binom{2n+1}{n}$ deliteľné číslom $2n+1$.

Riešenie: Využijeme, že platí

$$\binom{2n+1}{n} = \frac{(2n+1)!}{n! \cdot (n+1)!} = \frac{2n+1}{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} = \frac{2n+1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}.$$

Keďže kombinačné číslo $\binom{2n}{n}$ je pre všetky prirodzené čísla *n* celé, stačí dokázať, že číslo $n+1$ nedelí číslo $2n+1$.

Keďže vieme, že platí $2\cdot(n+1)-(2n+1)=1$, tak to znamená, že čísla $n+1$ a $2n+1$ sú nesúdeliteľné, a teda číslo $n+1$ nedelí číslo $2n+1$. Tým sme tvrdenie úlohy dokázali.

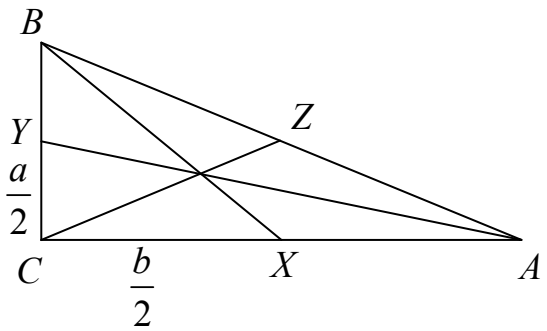
7. Dokážte, že existuje taký násobok čísla 2 009, ktorý obsahuje všetkých 10 číslic.

Riešenie: Uvažujme čísla 2 009, $2\cdot 2\,009=4\,018$, $3\cdot 2\,009=6\,027$, $4\cdot 2\,009=8\,036$ a $5\cdot 2\,009=10\,045$. Ak tieto násobky napíšeme za sebou (4 018 nemusíme, lebo číslice v ňom obsiahnuté sú aj vo zvyšných násobkoch 2 009), dostaneme číslo 20 096 027 803 610 045, ktoré obsahuje všetky číslice a je určite deliteľné 2 009.

Iné riešenie: Uvažujme čísla 12 345 678 900 000 až 12 345 678 902 008. Je to 2 009 za sebou idúcich prirodzených čísel, ktoré majú prvých 10 cifier rovnakých a navzájom rôznych. Práve jedno z nich je deliteľné 2 009 a práve to spĺňa podmienky zo zadania úlohy.

8. V akom pomere musia byť odvesny pravouhlého trojuholníka, aby jeho ťažnice tvorili tiež strany pravouhlého trojuholníka?

Riešenie: Označme si jednotlivé prvky v trojuholníku štandardne podľa obrázka. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $a\le b$.



Pre dĺžku ťažnice t_a na stranu a platí na základe Pytagorovej vety v pravouhlom trojuholníku CAY

$$t_a=\frac{1}{2}\sqrt{4b^2+a^2}\,.$$

Pre dĺžku ťažnice t_b na stranu b platí na základe Pytagorovej vety v pravouhlom trojuholníku CXB

$$t_b=\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+b^2}\,.$$

V každom pravouhlom trojuholníku pri štandardnom označení platí $t_c = \frac{c}{2}$. Využitím Pytagorovej vety v pravouhlom trojuholníku *ABC* dostávame, že platí

$$t_c = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}\ .$$

Keďže predpokladáme, že platí $a \le b$, tak pre ťažnice platí $t_c < t_b \le t_a$. Ak ťažnice tvoria strany pravouhlého trojuholníka, tak vzhľadom na uvedené usporiadanie musí platiť

$$t_c^2 + t_b^2 = t_a^2,$$

po dosadení

$$\frac{a^2 + b^2}{4} + \frac{4a^2 + b^2}{4} = \frac{a^2 + 4b^2}{4}.$$

Po jednoduchom upravení dostávame, že platí

$$4a^2 = 2b^2,$$

teda

$$\frac{b}{a} = \sqrt{2}.$$

Strany pravouhlého trojuholníka musia byť v pomere $\sqrt{2}:1$. K prevrátenej hodnote tohto pomeru by sme sa dostali, ak by sme predpokladali, že strana *a* je dlhšia.

9. Dokážte, že postupnosť $\sqrt{2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, ... konverguje a nájdite jej limitu.

Riešenie: Jednotlivé členy postupnosti si označme a_n, $n = 1, 2, \ldots$ Potom

$$a_1 = \sqrt{2},$$
$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}.$$

Najprv si matematickou indukciou dokážeme, že táto postupnosť je ohraničená zdola číslom 0 a zhora číslom 2. Dolný odhad je triviálny vzhľadom na definíciu odmocniny. Dokážme teraz tvrdenie pre horné ohraničenie. Pre $n = 1$ tvrdenie platí. Predpokladajme, že pre nejaké *n* platí $a_n \le 2$. Potom

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \le \sqrt{2 + 2} = 2,$$

pričom sme využili, že druhá odmocnina je rastúca funkcia. To znamená, že tvrdenie platí aj pre $n + 1$. Preto pre všetky prirodzené čísla *n* platí $a_n \le 2$.

Teraz si ukážeme, že uvedená postupnosť je rastúca. To je zrejmé zo zápisu jednotlivých členov, ale môžeme si to dokázať aj matematickou indukciou. Dokazované tvrdenie bude: Pre všetky prirodzené čísla *n* platí $a_n < a_{n+1}$.

Pre $n=1$ tvrdenie platí, lebo platí

$$a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}>\sqrt{2+\sqrt{0}}=\sqrt{2}=a_1.$$

Predpokladajme, že pre nejaké prirodzené číslo n platí $a_n<a_{n+1}$. Potom platí aj:

$$2+a_n<2+a_{n+1},$$

$$\sqrt{2+a_n}<\sqrt{2+a_{n+1}},$$

$$a_{n+1}<a_{n+2},$$

čo sme chceli dokázať (opäť sme využili to, že druhá odmocnina je rastúca funkcia).

Keďže uvedená postupnosť je rastúca a ohraničená zhora, konverguje. Označme túto limitu a. Limitným prechodom pre $n\to\infty$ v rovnici $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ dostávame, že platí

$$a=\sqrt{2+a}.$$

Riešením tejto rovnice dostávame jediné kladné riešenie $a=2$, ktoré je hľadanou limitou postupnosti.

10. Majme daných $2n$ rôznych bodov v rovine. Dokážte, že existuje taký kruh, ktorý pokrýva práve n z týchto bodov.

Riešenie: Uvažujme nejaký kruh, ktorý obsahuje všetky tieto body ako svoje vnútorné body. Tento kruh začnime teraz posúvať v nejakom smere. Ak ho posunieme dostatočne ďaleko, tak nebude obsahovať ani jeden z daných $2n$ bodov. Teraz nám stačí dokázať, že existuje taký kruh a smer, v ktorom sa počet bodov vnútri kruhu počas posúvania mení vždy o práve jeden.

Ak by sa niekedy počas posúvania zmenil počet bodov vnútri kruhu v jednom okamihu aspoň o 2, znamenalo by to, že na určujúcej kružnici tohto kruhu ležali v danom okamihu aspoň 2 body z daných bodov. To ale znamená, že stred kruhu musel v tomto okamihu ležať na osi úsečky spájajúcej tieto dva body. Keďže daných bodov je konečne veľa, aj osí všetkých dvojíc úsečiek nimi určených je konečne veľa. Tieto osi rozdelia rovinu na konečný počet častí. Aspoň jedna z týchto častí však nemá konečný obsah. Keďže vznikla ako prienik konečného počtu polrovín, existuje v nej polpriamka, ktorá celá patrí jej vnútru. To znamená, že existuje polpriamka, ktorá nemá spoločný bod ani s jednou z uvedených osí.

Zvoľme teraz stred nášho kruhu v krajnom bode tejto polpriamky a jeho polomer taký, aby obsahoval všetkých $2n$ bodov vo svojom vnútri. Posúvajme teraz tento kruh po tejto polpriamke. Ak ho posunieme dostatočne ďaleko, nebude tento kruh pokrývať ani jeden z daných bodov. Keďže počet bodov vnútri neho sa mení vždy o 1, existuje taká jeho poloha, v ktorej pokrýva práve n bodov, čo sme chceli dokázať.

Iné riešenie: Zvoľme si stred kruhu v nejakom bode roviny rôznom od daných bodov. Ak bude tento polomer dostatočne malý, tak kruh nebude pokrývať žiaden z daných bodov, ak bude dostatočne veľký, kruh pokryje všetky body. Analogicky ako v predchádzajúcom riešení ukážeme, že ak stred nebude patriť žiadnej osi úsečky určenej dvoma z daných bodov, tak pri spojitej zmene polomeru sa bude meniť počet bodov vnútri kruhu vždy o 1, teda niekedy dosiahne počet n.

11. Určte hodnotu nekonečného súčinu

$$\left(1+2^{-1}\right)\left(1+2^{-2}\right)\left(1+2^{-4}\right)\left(1+2^{-8}\right)\cdots$$

Riešenie: Označme hľadanú hodnotu uvedeného súčinu ako x. Definujme si pomocnú postupnosť $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$:

$$x_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right).$$

Zrejme platí $x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

Po prenásobení x_n jednou polovicou v špeciálnom tvare postupne dostávame, že platí:

$$x_n\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right),$$

$$\frac{x_n}{2}=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right),$$

$$\frac{x_n}{2}=\left(1-\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right),$$

$$\vdots$$

$$\frac{x_n}{2}=\left(1-\frac{1}{2^{2^n}}\right)\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right),$$

$$\frac{x_n}{2}=1-\frac{1}{2^{2^{n+1}}},$$

$$x_n=2-\frac{2}{2^{2^{n+1}}}.$$

Potom

$$x=\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{2}{2^{2^{n+1}}}\right)=2.$$

Hodnota nekonečného súčinu v zadaní je 2.

12. Dokáže, že v desatinnom zápise čísla $\sqrt{2}$ existuje aspoň jedna nenulová číslica medzi milióntym a trojmilióntym desatinným miestom (vrátane oboch).

Riešenie: Tvrdenie dokážeme sporom. Predpokladajme, že medzi milióntym a trojmilióntym desatinným miestom sú samé nuly. Označme r racionálne číslo, ktoré dostaneme odseknutím desatinného rozvoja čísla $\sqrt{2}$ za milióntym miestom, a θ nech je iracionálne číslo definované ako $\theta = \sqrt{2} - r$.

Ľahko nahliadneme, že $r < 2$ a ak definujeme $N = 10^{1\,000\,000}$, tak Nr je prirodzené číslo. Keďže $r < \sqrt{2}$, tak $\theta > 0$. Z predpokladu o nulových čísliciach vyplýva, že platí nerovnosť

$$0 < \theta < 10^{-3\,000\,000} = N^{-3}.$$

Vynásobením vzťahu $r + \theta = \sqrt{2}$ číslom N a umocnení na druhú postupne dostaneme, že platí

$$\left[\sqrt{2}N\right]^2 = \left[(\theta + r)N\right]^2,$$

$$2N^2 = (rN)^2 + 2r\theta N^2 + (\theta N)^2.$$

Keďže $2N^2$ a $(rN)^2$ sú prirodzené čísla, tak aj $2r\theta N^2 + (\theta N)^2$ je prirodzené číslo. Avšak platí odhad

$$0 < 2r\theta N^2 + (\theta N)^2 < 2 \cdot 2 \cdot N^{-3} \cdot N^2 + \left(N^{-3} \cdot N\right)^2 = 4N^{-1} + N^{-4} < 1,$$

čo znamená, že $2r\theta N^2 + (\theta N)^2$ nemôže byť prirodzeným číslom. Tým sme dostali spor a tvrdenie úlohy sme dokázali.

13. Nájdite všetky také postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ reálnych čísel, pre ktoré $a_1 = 1$ a platí

$$|a_n - a_m| \le \frac{2mn}{m^2 + n^2}$$

pre všetky prirodzené čísla m a n.

Riešenie: Zvoľme $m = 1$. Potom má pre všetky prirodzené čísla n platiť:

$$0 \le |a_n - a_1| \le \frac{2n}{1 + n^2},$$

$$0 \le |a_n - 1| \le \frac{2n}{1 + n^2}.$$

Keďže

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2n}{1 + n^2} = 0,$$

tak existuje aj $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n - 1|$ a platí

$$\lim_{n\to\infty}|a_n - 1| = 0.$$

To znamená, že existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ a platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Ak teraz zvolíme *m* ľubovoľné a *n* idúce do nekonečna, dostaneme, že platí

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2mn}{m^2+n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2m}{\frac{m^2}{n}+n} = 0,$$

a teda analogicky platí

$$\lim_{n\to\infty}|a_m - a_n| = 0,$$

z čoho dostávame, že platí

$$a_m = \lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

To znamená, že zadaniu vyhovuje jediná postupnosť $\{1\}_{n=1}^{\infty}$.

14. Nájdite všetky funkcie *f* definované na celých číslach, pre ktoré platí

$$f(n+m) + f(n-m) = 2\big(f(m) + f(n)\big)$$

pre všetky celé čísla *m*, *n*.

Riešenie: Pre $m = n = 0$ dostávame, že platí

$$f(0) + f(0) = 2\big(f(0) + f(0)\big),$$

čo znamená, že $f(0) = 0$.

Ak zvolíme $n = 0$, dostaneme, že pre všetky celé čísla *m* platí

$$f(m) + f(-m) = 2\big(f(m) + f(0)\big),$$

odkiaľ po dosadení $f(0) = 0$ a úprave dostávame, že platí

$$f(-m) = f(m).$$

Matematickou indukciou dokážeme, že pre všetky nezáporné celé čísla *k* platí

$$f(kn) = k^2 f(n).$$

Pre $k = 0$ a $k = 1$ sme už tvrdenie dokázali. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre všetky prirodzené čísla menšie ako $k+1$. Potom dostávame, že platí

$$\begin{aligned} f\big((k+1)n\big) &= f(kn+n) = 2\big(f(kn) + f(n)\big) - f(kn-n) = \\ &= 2k^2 f(n) + 2f(n) - (k-1)^2 f(n) = \big(k^2 + 2k + 1\big) f(n) = \\ &= (k+1)^2 f(n), \end{aligned}$$

čo sme chceli dokázať.

Vzhľadom na to, že sme ukázali, že funkcia f je párna, pre všetky celé čísla k platí

$$f(kn) = k^2 f(n).$$

Ak označíme $f(1) = c$, tak dostávame, že pre funkciu f musí platiť $f(n) = cn^2$. Dosadením tohto vyjadrenia do funkcionálnej rovnice v zadaní dostávame, že pre každé reálne číslo c je funkcia $f(n) = cn^2$ riešením úlohy.

Výsledkové listiny po 3. sérii úloh

Kategória Z

Por.	Priezvisko	Meno	Trieda	Škola	PS	1	2	3	4	Spolu
1.	Hrušková	Martina	4. B	ZŠ Svit, Mierová 134	22	5	5	–	5	37
2.	Hornyáková	Viktória	kvarta	G P. Pázmanya Nové Zámky	15	2	5	–	4	26

Kategória C

Por.	Priezvisko	Meno	Trieda	Škola	PS	3	4	5	6	Spolu
1.	Chudá	Fatima	1. A	Súkromné konzervatórium Nitra	23	–	–	–	–	23

Kategória A

Por.	Priezvisko	Meno	Trieda	Škola	PS	7	8	9	10	Spolu
1.	Hornyák	Zsolt	septima C	G P. Pázmanya Nové Zámky	27	–	4	3	0	34
2.	Svatý	Lukáš	septima	G Nitra, Párovská 1	33	–	–	–	–	33
3.	Beznák	Samuel	1. C	G Dubnica nad Váhom, Školská 2	26	–	–	–	–	26

Kategória π

Por.	Priezvisko	Meno	Trieda	Škola	PS	11	12	13	14	Spolu
1.	Hornyák	Zsolt	septima C	G P. Pázmanya Nové Zámky	5	4	–	–	4	13