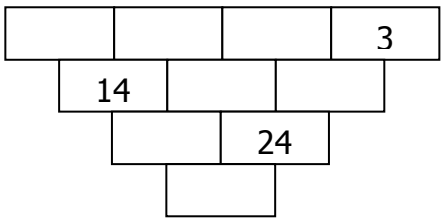
Zadania úloh 59. ročníka Matematickej olympiády

Kategória Z4

Z4 – I – 1

Doplňte čísla do súčinovej pyramídy. Každé číslo v tehličkách (od druhého riadku) sa rovná súčinu čísel v tehličkách bezprostredne nad ním. V prvom riadku sú iba jednociferné čísla.



(M. Kollár)

Z4 – I – 2

Janka delila lentilky sebe a sestre Danke. Sebe dala 11 lentiliek, Danke 2. Potom sebe 10 a Danke 4. Potom sebe 9 a Danke 6... týmto spôsobom sebe dala vždy o 1 menej a Danke o 2 viac ako predtým. V delení pokračovala, až sa jej lentilky minuli. Na svoje i Dankino počudovanie dievčatá zistili, že majú lentiliek rovnako. Koľko bolo všetkých lentiliek?

(M. Dillingerová)

Z4 – I – 3

Doplň čísla od 1 do 12 (každé práve raz) do tabuľky. V jednotlivých riadkoch sú príklady na sčítanie, odčítanie, násobenie a delenie a tie musia byť všetky splnené. Navyše v každom riadku sú doplňané čísla usporiadané zľava doprava od najväčšieho po najmenšie.

	+		+		=	33
	-		-		=	0
	.		.		=	35
	:		:		=	1

(M. Kollár)

Z4 – I – 4

Jurko chodí domov zo školy okolo školského latkového plota. V pondelok sa rozhodol, že cestou zo školy bude na každú druhú latku robiť značku bielou kriedou. V utorok, stredu i štvrtok to zopakoval s každou druhou ešte neoznačenou latkou. V piatok ráno zistil, že mu ostalo už iba 7 latiek neoznačených. Koľko najmenej a koľko najviac latiek mohol mať plot školy?

(M. Dillingerová)

Z4 – I – 5

Samo má tri staršie sestry. Každá robí niečo iné a každá chová jedno zvieratko. Ľudka hrá tenis. Najmladšia je klaviristka. Ivana neštuduje jazyky. Mária nie je prostredná. Na klavíri sedáva veľká čierna mačka. Prostredná má papagája. Tretím zvieraťom je pes. Vypíš, ako sa volá najstaršia sestra, čo robí a aké zviera chová.

(M. Dillingerová)

Z4 – I – 6

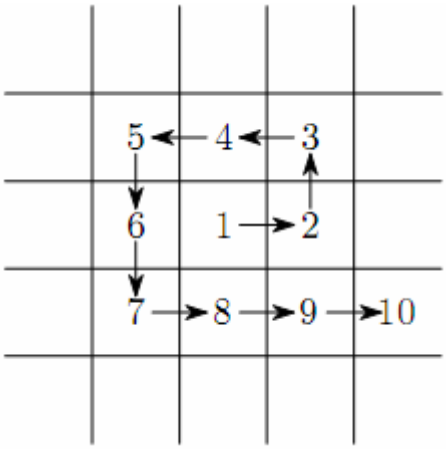
Martin má vystrihnutý z papiera jeden obdĺžnik s rozmermi 2 cm a 6 cm. Okrem toho má ešte jeden obdĺžnik a jeden štvorec. Zo všetkých troch útvarov vie bez prekrývania a dier zložiť jeden veľký štvorec. Aké rozmery môžu mať jeho útvary? Nájdi dve riešenia.

(M. Dillingerová)

Kategória Z5

Z5 – I – 1

Húsenica Leona spadla doprostred štvorcovej siete. Rozhodla sa, že polezie „do špirály“ tak, ako je naznačené na obrázku; na žiadnom štvorčeku nebude dvakrát a žiaden štvorček nevynechá.



Z prvého štvorčeka na druhý liezla smerom na východ, z druhého na tretí smerom na sever, z tretieho na štvrtý smerom na západ, zo štvrtého na piaty tiež na západ, z piateho na šiesty na juh... Ktorým smerom liezla z 81. na 82. štvorček?

(M. Petrová)

Z5 – I – 2

Miša si z papiera vystrihla dva rovnaké štvorce, jeden obdĺžnik s rozmermi 10 cm × 24 cm a ešte jeden obdĺžnik. Aké rozmery mohol mať tento obdĺžnik, ak sa zo všetkých štyroch útvarov dal zložiť štvorec bez toho, aby sa jednotlivé diely prekrývali? Takých obdĺžnikov sa dá nájsť niekoľko, uveď aspoň štyri.

(L. Šimůnek)

Z5 – I – 3

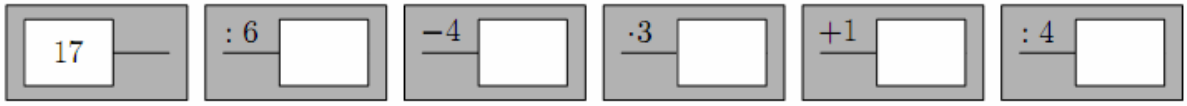
Vyrieš nasledujúci algebrogram a nájdi všetky riešenia. Rovnaké písmená nahraď rovnakými číslicami, rôzne rôznymi.

$$\begin{array}{r} OSEL \\ SEL \\ EL \\ L \\ \hline 10034 \end{array}$$

(M. Volfová)

Z5 – I – 4

Nina dostala od pani učiteľky nasledujúce kartičky:



Má z nich zostaviť príklad pre svojich spolužiakov, pričom každú kartičku použije práve raz. Pomôž Nine a zostav jeden taký príklad tak, aby každé delenie vyšlo bezo zvyšku. Aký bude výsledok?

(M. Petrová)

Z5 – I – 5

Našich 84 žiakov išlo do kina. Lístok síce stál 2 €, ale každý 12. žiak mal polovičnú zľavu a každý 35. vstup zdarma. Koľko stálo vstupné pre všetkých žiakov?

(M. Volfová)

Z5 – I – 6

Chlapci našli starý plán mínového poľa (obrázok). Čísla sú na políčkach, kde žiadne míny nie sú, a udávajú počet zamínovaných susedných políčok. Urči, koľko je v poli mín spolu a kde sú. (Políčka susedia práve vtedy, keď majú spoločný vrchol alebo stranu.)

1		2		2
	3		3	
3				3
	2			
			2	

(M. Volfová)

Kategória Z6

Z6 – I – 1

Janko s Marienkou chodia k babičke, ktorá má cukráreň a predáva perníky. Obe deti jej samozrejme pomáhajú, hlavne so zdobením. Kým babička ozdobí päť perníkov, ozdobí Marienka tri a Janko dva. Pri poslednej návšteve ozdobili všetci traja spolu

päť plných tácok. Marienka s babičkou zdobili po celý čas, Janko najprv zdobil a potom zrovnával perníky po dvanásť na jednu tácku a odnášal ich do komory. Všetci traja v ten istý okamih začali i skončili.

1. Koľko perníkov ozdobil Janko?
2. Ako dlho im trvala celá práca, ak babička ozdobí jeden perník za 4 minúty?
3. Ako dlho pomáhal Janko zdobiť?

(M. Petrová)

Z6 – I – 2

Štvormiestny PIN kód Rasťovho mobilu je zaujímavý:

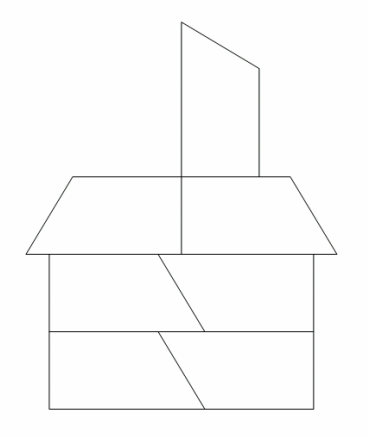
- jednotlivé číslice sú prvočísla,
- 1. a 2. číslica v tomto poradí vytvorí prvočíslo,
- 2. a 3. číslica v tomto poradí vytvorí prvočíslo,
- 3. a 4. číslica v tomto poradí vytvorí prvočíslo.

Rasťo zabudol svoj PIN kód, ale pamätá si všetky vyššie uvedené vlastnosti. Snaží sa zaktivovať vypnutý mobil. Ktoré čísla by mal vyskúšať?

(M. Petrová)

Z6 – I – 3

Na nasledujúcom obrázku je útvar zložený zo siedmich rovnakých štvoruholníkových dielikov stavebnice. Aký je obvod tohto útvaru, ak obvod jedného štvoruholníkového dielika je 17 cm?



(K. Pazourek)

Z6 – I – 4

Ocko sa rozhodol, že bude dávať svojmu synovi Mojmírovi raz za mesiac vreckové. Prvé vreckové dostal Mojmír v januári. Ocko každý mesiac vreckové zvyšoval vždy o 4 €. Keby Mojmír neutrácal, mal by po dvanástom vreckovom pred Vianocami 900 €. Koľko eur dostal Mojmír v januári ako prvé vreckové?

(L. Hozová)

Z6 – I – 5

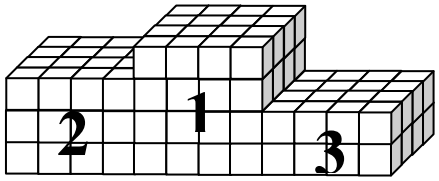
Doplň miesto hviezdičiek čísla tak, aby súčet výsledkov nasledujúcich dvoch príkladov bol 5842.

$$\begin{array}{cccc} * & 2 & * & 7 \\ 3 & * & 4 & * \\ \hline 4 & * & 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & 2 & * & 9 & * \\ - & * & 2 & * & 4 \\ \hline & * & 5 & 4 & * \end{array}$$

(M. Dillingerová)

Z6 – I – 6

Na školskú olympiádu vytvorili žiaci stupne víťazov z drevených kociek, pozri obrázok. Koľko kociek použili celkom? Zostavené stupne natreli po celom povrchu (okrem podstavy) na bielo a po vyhlásení výsledkov svoj výtvor rozobrali. Koľko kociek malo 6, koľko 5, 4, 3, 2, 1 či žiadnu stenu bielu?



(M. Dillingerová, M. Volfová)

Kategória Z7

Z7 – I – 1

Do predajne vína sa v noci dostal kocúr. Vyskočil na policu, na ktorej boli v dlhom rade vyrovnané fľaše s vínom — prvá tretina fliaš skraja stála po 8 €, nasledujúca tretina fliaš stála po 6,5 € a posledná tretina po 5 €. Najprv kocúr zhodil na zem fľašu za 8 €, ktorá stála úplne na začiatku radu, a potom postupoval ďalej a zhadzoval bez vynechania jednu fľašu za druhou. Než ho to prestalo baviť, zhodil 25 fliaš a tie sa všetky rozbili. Ráno majiteľ ľutoval, že kocúr nezačal so zhadzovaním na druhom okraji police. Aj keby totiž rozbil rovnako veľa fliaš, bola by škoda o 33 € nižšia. Koľko fliaš bolo pôvodne na polici?

(L. Šimůnek)

Z7 – I – 2

Na tabuli sú napísané tri prirodzené čísla *a, b, c*, pre ktoré platí:

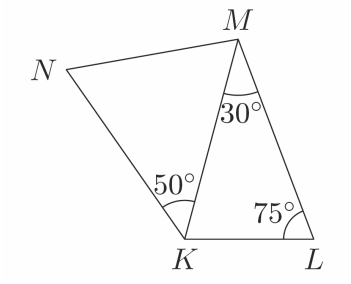
- najväčší spoločný deliteľ čísel *a, b* je 15,
- najväčší spoločný deliteľ čísel *b, c* je 6,
- súčin čísel *b, c* je 1800,
- najmenší spoločný násobok čísel *a, b* je 3150.

Ktoré sú to čísla?

(L. Šimůnek)

Z7 – I – 3

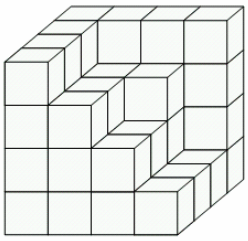
V štvoruholníku *KLMN* poznáme vyznačené uhly a vieme, že platí |*KN*| = |*LM*|. Zisti veľkosť uhla *KNM*.



(L. Hozová)

Z7 – I – 4

Kocka bola zložená z 64 kocôčok s hranou dĺžky 2 cm. Potom bolo niekoľko kocôčok z viditeľnej strany odobraných, pozri obrázok.



1. Urč objem a povrch získaného telesa.
2. Teleso bolo na celom povrchu natreté červenou farbou, potom rozobrané na pôvodné kocôčky. Koľko z nich malo 6, koľko 5, 4, 3, 2, 1 či žiadnu stenu červenú?

(M. Volfová)

Z7 – I – 5

Na číselnej osi sú znázornené čísla $12x$ a $-4x$. Znázorni na tejto osi nulu a číslo x.



(M. Petrová)

Z7 – I – 6

Doplň miesto hviezdičiek čísla tak, aby súčet výsledkov nasledujúcich dvoch príkladov bol 5842.

$$\begin{array}{cccc} * & 2 & * & 7 \\ 3 & * & 4 & * \\ \hline 4 & * & 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & 2 & * & 9 & * \\ - & * & 2 & * & 4 \\ \hline & * & 5 & 4 & * \end{array}$$

Úloha má viac riešení, urč aspoň dve.

(M. Dillingerová)

Kategória Z8

Z8 – I – 1

Napíšte číslo 75 ako súčet niekoľko bezprostredne po sebe idúcich prirodzených čísel. Nájdite aspoň štyri riešenia.

(M. Volfová)

Z8 – I – 2

Tri kamarátky sa zišli na chalupe a vyrazili na huby. Našli spolu 55 hríbov. Po návrate si urobili praženicu, rozdelili ju na štyri rovnaké porcie a pozvali na ňu kamaráta Petra. Ľuba dala na praženicu šesť zo svojich hríbov, Marienka osem a Šárka päť. Každej po tom zostal rovnaký počet hríbov. Peter im daroval bonboniéru, v ktorej bolo 38 bonbónov, a povedal, že sa majú spravodlivo rozdeliť podľa toho, akým dielom prispeli na jeho jedlo.

1. Koľko hríbov našla každá?
2. Ako si mali podľa Petra bonbóny podeliť? Určte koľko bonbónov si mali jednotlivé kamarátky vziať.

(M. Volfová)

Z8 – I – 3

Sedadlá v divadelnom sále sú rozdelené do troch kategórií podľa ich vzdialenosti od javiska. „I. miesta“ sú najbližšie k javisku, tvoria dve pätiny kapacity sály a predávajú sa za 11 €. „II. miesta“ tvoria ďalšie dve pätiny kapacity sály a predávajú sa za 10 €. Ostatné „III. miesta“ sa predávajú za 9 €. Pred zahájením predpredaja na slávnostnú premiéru bolo rozdaných 150 vstupeniek zadarmo pozvaným hosťom. Vstupenky boli rozdávané postupne od predných miest sály dozadu. Všetky ostatné vstupenky sa potom predali. Keby sa však voľné vstupenky rozdávali postupne od zadných miest dopredu, bola by tržba o 216 € väčšia. Koľko miest bolo v sále?

(L. Šimůnek)

Z8 – I – 4

Dostali sme kocku, ktorá mala dĺžku hrany vyjadrenú v centimetroch celým číslom. Všetky jej steny sme nafarbili na červeno a potom sme ju rozrezali bezo zvyšku na kocôčky s hranou dĺžky 1 cm.

- Lukáš tvrdí, že kocôčok s dvomi nafarbenými stenami je desaťkrát viac než tých s tromi nafarbenými stenami.
- Martina tvrdí, že kocôčok s dvomi nafarbenými stenami je pätnásťkrát viac než tých s tromi nafarbenými stenami.

Pravdu má však iba jeden – kto? Koľko cm merala hrana pôvodnej kocky?

(L. Šimůnek)

Z8 – I – 5

Zo štvorca so stranou dĺžky 6 cm odstrihneme od každého vrcholu zhodný rovnoramenný pravouhlý trojuholník tak, aby sa obsah štvorca zmenšil o 32 %. Zistite dĺžku odvesien odstrihnutých trojuholníkov.

(M. Krejčová)

Z8 – I – 6

V dvoch miestnostiach vzdelávacieho centra sa konali prednášky. Priemerný vek ôsmich ľudí prítomných v prvej miestnosti bol 20 rokov, priemerný vek dvanástich ľudí prítomných v druhej miestnosti bol 45 rokov. Počas prednášky odišiel jeden účastník

a tým sa priemerný vek všetkých osôb v oboch miestnostiach zvýšil o jeden rok. Koľko rokov mal účastník, ktorý odišiel?

(L. Hozová)

Kategória Z9

Z9 – I – 1

Dostal som zadané dve prirodzená čísla. Potom som ich obe zaokrúhlil na desiatky. Ktoré čísla som dostal zadané, ak viete, že súčasne platí:

- podiel zaokrúhlených čísel je rovnaký ako podiel pôvodných čísel,
- súčin zaokrúhlených čísel je o 295 väčší než súčin pôvodných čísel,
- súčet zaokrúhlených čísel je o 6 väčší než súčet pôvodných čísel.

(L. Šimůnek)

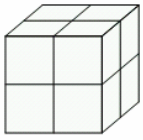
Z9 – I – 2

Pat a Mat boli na výlete. Vyšli ráno po ôsmej hodine v čase, keď veľká a malá ručička na Patových hodinkách ležali na opačných polpriamkach. Na opačných polpriamkach ležali ručičky Patových hodiniek aj v čase, keď sa obaja priatelia pred poludním vrátili. Mat dobu trvania výletu meral stopkami. Určite aj vy s presnosťou na sekundy, ako dlho trval výlet. Predpokladajte, že Patove hodinky a Matove stopky išli presne.

(M. Volfová)

Z9 – I – 3

Na obrázku je kocka s hranou dĺžky 2 cm tvorená ôsmimi kocôčkami s hranou dĺžky 1 cm. Osem stien kocôčok je nafarbených na čierno, ostatné sú biele. Pritom sa z nich dá zložiť kocka, ktorej povrch je biely. Koľkými spôsobmi môžu byť kocôčky nafarbené? Predpokladajte, že rovnako nafarbené kocôčky nedokážeme odlíšiť, možno ich teda zamieňať.



(K. Pazourek)

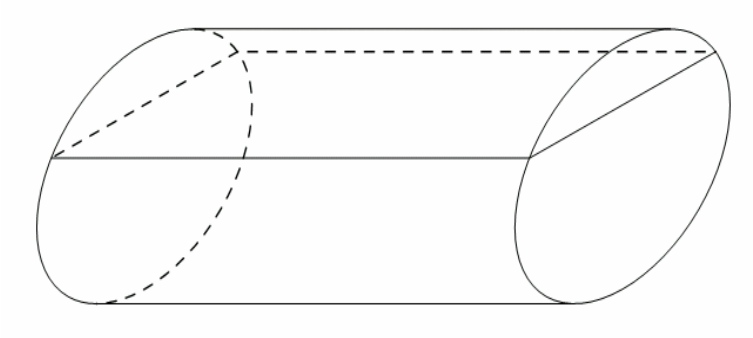
Z9 – I – 4

Adam a Eva dostali košík, v ktorom bolo 31 jabĺk. Prvý deň zjedla Eva tri štvrtiny toho, čo zjedol Adam. Druhý deň zjedla Eva dve tretiny toho, čo zjedol druhý deň Adam. Druhý deň večer bol košík prázdny. Koľko jabĺk zjedla z košíku Eva? (Adam i Eva jablká jedia celé a nedelia si ich.)

(L. Hozová)

Z9 – I – 5

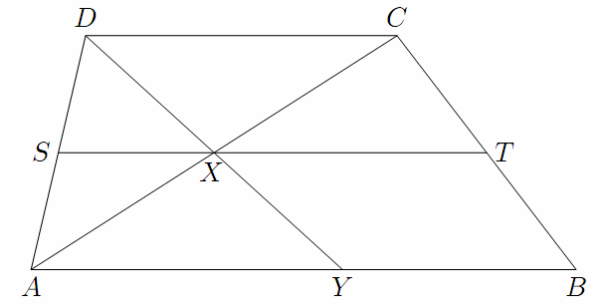
Vodič prevára mlieko v cisterne tvaru valca. Priemer podstavy je 180 cm, dĺžka cisterny je 4 m. Koľko hl mlieka je v cisterne, ak je naplnená do troch štvrtín priemeru?



(M. Krejčová)

Z9 – I – 6

V lichobežníku $ABCD$ so základňami AB a CD dĺžok 7 cm a 4 cm sú body S a T stredy strán AD a BC, pozri obrázok. Bod X je priesečník úsečiek AC a ST, bod Y je priesečník úsečky AB a priamky DX. Obsah štvoruholníka $AYCD$ je 12 cm^2. Vypočítajte obsah lichobežníka $ABCD$.



(M. Dillingerová)

Kategória C

C – I – 1

Erika a Klárka hrali hru „slovný logik“ s týmito pravidlami: Hráč A si myslí slovo zložené z piatich rôznych písmen. Hráč B vysloví ľubovoľné slovo zložené z piatich rôznych písmen a hráč A mu prezradí, koľko písmen uhádol na správnej pozícii a koľko na nesprávnej. Písmená považujeme za rôzne, aj keď sa líšia iba mäkčeňom alebo dĺžňom (napríklad písmena A, Á sú rôzne). Keby si hráč A myslel napríklad slovo LOĎKA a B by vyslovil slovo KOLÁČ, odpovie hráč A, že jedno písmeno uhádol hráč B na správnej pozícii a dve na nesprávnej. Skrátene oznámi „1+2“, lebo sa naozaj obe slová zhodujú iba v písmene O vrátane pozície (druhej zľava) a v písmenách K a L, ktorých pozície sú odlišné. Erika si myslela slovo z piatich rôznych písmen a Klárka vyslovila slová KABÁT, STRUK, SKOBA, CESTA a ZÁPAL. Erika na tieto slová v danom poradí odpovedala 0+3, 0+2, 1+2, 2+0 a 1+2. Zistite, aké slovo si Erika mohla myslieť.

(Peter Novotný)

C – I – 2

Vrcholom C pravouholníka $ABCD$ veďte priamky p a q, ktoré majú s daným pravouholníkom spoločný iba bod C, pričom priamka p má od bodu A najväčšiu možnú vzdialenosť a priamka q vymedzuje s priamkami AB, AD trojuholník s čo najmenším obsahom.

(Leo Boček)

C – I – 3

Určte všetky reálne čísla x, ktoré vyhovujú rovnici $4x - 2\lfloor x \rfloor = 5$. (Symbol $\lfloor x \rfloor$ označuje najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako číslo x, tzv. dolnú celú časť reálneho čísla x.)

(Jaroslav Švrček)

C – I – 4

Kružnica $k(S;r)$ sa dotýka priamky AB v bode A. Kružnica $l(T;s)$ sa dotýka priamky AB v bode B a pretína kružnicu k v krajných bodoch C, D jej priemeru. Vyjadrite dĺžku a úsečky AB pomocou polomerov r, s. Dokážte ďalej, že priesečník M priamok CD, AB je stredom úsečky AB.

(Leo Boček)

C – I – 5

Dokážte, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla a, b platí

$$\sqrt{ab} \le \frac{2\left(a^2 + 3ab + b^2\right)}{5(a+b)} \le \frac{a+b}{2},$$

a pre každú z oboch nerovností zistite, kedy prechádza na rovnosť.

(Ján Mazák)

C – I – 6

Nájdite všetky prirodzené čísla, ktoré nie sú deliteľné desiatimi a ktoré vo svojom dekadickom zápise majú niekde vedľa seba dve nuly, po ktorých vyškrtnutí sa pôvodné číslo 89-krát zmenší.

(Jaromír Šimša)

Kategória B

B – I – 1

Na stole ležia tri kôpky zápaliek: v jednej 2009, v druhej 2010 a v poslednej 2011. Hráč, ktorý je na ťahu, zvolí dve kôpky a z každej z nich odoberie po jednej zápalke. V hre sa pravidelne striedajú dvaja hráči. Hra končí, akonáhle niektorá kôpka zmizne. Vyhráva ten hráč, ktorý urobil posledný ťah. Popíšte stratégiu jedného z hráčov, ktorá mu zaručí výhru.

(Ján Mazák)

B – I – 2
Na tabuli je napísané štvorciferné číslo, ktoré má presne šesť kladných deliteľov, z ktorých práve dva sú jednociferné a práve dva dvojciferné. Väčší z dvojciferných deliteľov je druhou mocninou prirodzeného čísla. Určte všetky čísla, ktoré môžu byť na tabuli napísané.

(Peter Novotný)

B – I – 3
V rovine je daná úsečka AB. Zostrojte rovnobežník $ABCD$, pre ktorého stredy strán AB, CD, DA označené postupne K, L, M platí: body A, B, L, D ležia na jednej kružnici a aj body K, L, D, M ležia na jednej kružnici.

(Jaroslav Švrček)

B – I – 4
Nájdite 2009 po sebe idúcich štvorciferných čísel, ktorých súčet je súčinom troch po sebe idúcich prirodzených čísel.

(Radek Horenský)

B – I – 5
Vnútri kratšieho oblúka AB kružnice opísanej rovnostrannému trojuholníku ABC je zvolený bod D. Tetiva CD pretína stranu AB v bode E. Dokážte, že trojuholník so stranami dĺžok $|AE|$, $|BE|$, $|CE|$ je podobný s trojuholníkom ABD.

(Pavel Leischner)

B – I – 6
Reálne čísla a, b majú túto vlastnosť: rovnica $x^2 - ax + b - 1 = 0$ má v množine reálnych čísel dva rôzne korene, ktorých rozdiel je kladným koreňom rovnice $x^2 - ax + b + 1 = 0$.

a) Dokážte nerovnosť $b > 3$.
b) Pomocou b vyjadrite korene oboch rovníc.

(Jaromír Šimša)

Kategória A

A – I –1
V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$\sqrt{x^2 - y} = z - 1,$$
$$\sqrt{y^2 - z} = x - 1,$$
$$\sqrt{z^2 - x} = y - 1.$$

(Radek Horenský)

A – I – 2

Do kosoštvorca $ABCD$ je vpísaná kružnica. Uvažujme jej ľubovoľnú dotyčnicu pretínajúcu obe strany BC, CD a označme postupne R, S jej priesečníky s priamkami AB, AD. Dokážte, že hodnota súčinu $|BR| \cdot |DS|$ od voľby dotyčnice nezávisí.

(Leo Boček)

A – I – 3

Na tabuli sú napísané čísla 1, 2, ..., 33. V jednom kroku zvolíme na tabuli dve čísla, z ktorých jedno je deliteľom druhého, obe zotrieme a na tabuľu napíšeme ich (celočíselný) podiel. Takto pokračujeme, kým na tabuli nezostanú iba čísla, z ktorých žiadne nie je deliteľom iného. (V jednom kroku môžeme zotrieť aj dve rovnaké čísla a nahradiť ich číslom 1.) Najmenej koľko čísel môže na tabuli zostať?

(Peter Novotný)

A – I – 4

V ľubovoľnom ostrouhlom rôznostrannom trojuholníku ABC označme O, V a S postupne stred kružnice opísanej, priesečník výšok a stred kružnice vpísanej. Dokážte, že os úsečky OV prechádza bodom S práve vtedy, keď jeden vnútorný uhol trojuholníka ABC má veľkosť 60°.

(Tomáš Jurík)

A – I – 5

V nádrži je r_0 rýb, spoločný úlovok n rybárov. Prichádzajú pre svoj podiel jednotlivo. Každý si myslí, že sa dostavil ako prvý, a aby si vzal presne n-tinu aktuálneho počtu rýb v nádrži, musí predtým jednu z rýb pustiť späť do mora. Určte najmenšie možné číslo r_0 v závislosti od daného $n \geq 2$, keď aj posledný rybár si aspoň jednu rybu odnesie.

(Dag Hrubý)

A – I – 6

Pre dané prvočíslo p určte počet (všetkých) usporiadaných trojíc (a, b, c) čísel z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 2p^2\}$, ktoré spĺňajú vzťah

$$\frac{[a, c]+[b, c]}{a+b} = \frac{p^2+1}{p^2+2} \cdot c,$$

pričom $[x, y]$ označuje najmenší spoločný násobok čísel x a y.

(Tomáš Jurík)