Zadania 1. série úloh korešpondenčnej súťaže v školskom roku 2009/2010

1. Fľaša s pohárom váži rovnako ako džbán. Samotná fľaša váži toľko ako pohár a tanier. Dva džbány vážia rovnako ako tri taniere. Koľko pohárov váži rovnako ako fľaša?

2. Gustáv a Gréta majú spolu 80 rokov. Pred štyrmi rokmi bol Gustáv osemkrát starší ako Gréta. Koľko má každý z nich rokov?

3. Traja cestovatelia cestujú po krajine ľudožrútov. Majú troch domorodých sprievodcov. Keďže im veľmi nedôverujú, snažia sa, aby ľudožrúti nemali nad nimi nikdy presilu. Týchto 6 ľudí sa potrebuje preplaviť cez rieku v loďke, ktorá odvezie len dve osoby. Akým spôsobom to majú urobiť, aby dodržali po celý čas uvedené pravidlo? (Na okolí sa nenachádza žiadna iná osoba ani zviera, ktoré by im mohlo pomôcť, nemôžu použiť ani lano alebo iné predmety – musia sa spoľahnúť len sami na seba.)

4. Počas pravidelnej cyklistickej prechádzky Gabriel zistil, že ak sa pohybuje rýchlosťou 20 km/h, tak sa vráti domov o 13.00. Ak sa pohybuje rýchlosťou 30 km/h, tak sa vráti o 11.00. Akou rýchlosťou sa má Gabriel pohybovať, aby prišiel domov o 12.00?

5. Gábor dostal na Mikuláša 3 balíčky cukríkov a 3 cukríky, Gertrúda dostala 1 balíček cukríkov a 17 cukríkov a Gregor dostal 2 balíčky cukríkov a 8 cukríkov. Z týchto troch detí Gertrúda nemá ani najviac ani najmenej cukríkov. Koľko cukríkov mohla dostať Gertrúda? (V každom balíčku je rovnaký počet cukríkov.)

6. Máme kváder s danými rozmermi. Ak by sme jeden rozmer kvádra zväčšili o 1cm, zväčšil by sa povrch o $54\,\mathrm{cm}^2$. Ak by sme pôvodnému kvádru zväčšili druhý rozmer o 2cm, zväčšil by sa povrch o $96\,\mathrm{cm}^2$. A ak by pôvodný kváder mal tretí rozmer o 3 cm väčší, zväčšil by sa povrch o $126\,\mathrm{cm}^2$. Určte rozmery pôvodného kvádra.

7. Dvaja hráči striedavo ukladajú na obdĺžnikový stôl kruhové mince (všetky sú rovnaké) – v každom ťahu jednu, pričom minca sa musí dotýkať celou svojou plochou stranou dosky stola. Prehráva ten hráč, ktorý už nemá kam položiť svoju mincu. Určte, pre ktorého hráča existuje víťazná stratégia v tejto hre.

8. Sú dané reálne čísla a, b, pričom $a < b$. Majme funkciu $y = f(x)$, ktorá je definovaná tak, že $f(x) = 0$ pre $x < a$ a pre $x > b$, a $f(x) = 1$ pre $a < x < b$. Pre $x = a$ a $x = b$ funkcia f nie je definovaná. Vyjadrite túto funkciu jedinou rovnicou, v ktorej sa môžu vyskytovať len operácie sčítania, odčítania, násobenia, delenia a prechodov k absolútnej hodnote.

9. Na Peťovej kalkulačke sa vôbec nezobrazuje číslica 1, dokonca sa vynecháva (namiesto 15 113 sa napíše 53). Peťo umocnil nejaké prirodzené číslo väčšie ako 3 333, ale menšie ako 4 444 na druhú, a dostal výsledok 43 008. Aké číslo chcel umocniť a čo mu malo vyjsť?

10. Nájdite všetky prirodzené čísla m, n, ktoré sú riešeniami rovnice $2^m - 3^n = 7$.

11. Zistite, či existuje množina 4 004 takých prirodzených čísel, že súčet čísel ľubovoľnej 2 003-prvkovej podmnožiny tejto množiny nie je deliteľný číslom 2 003.

12. Nech a, b, c sú kladné reálne čísla, ktorých súčin nie je väčší ako ich súčet. Dokážte, že potom platí nerovnosť

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{3}abc.$$

13. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je definovaná predpisom $a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1}$, pričom $a_1 = 20$, $a_2 = 30$. Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré je $5a_{n+1}a_n + 1$ druhou mocninou celého čísla.

14. Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla n platí nasledujúca nerovnosť:

$$\left(2n^2 + 3n + 1\right)^n \geq 6^n \cdot (n!)^2$$

Termín odoslania riešení úloh 1. série: do 11. 1. 2010

Riešenia zasielajte na adresu:

P-MAT, n. o.
Ing. Mgr. Martin Hriňák
P. O. BOX 2
814 99 Bratislava 1