Zadania 2. série úloh korešpondenčnej súťaže

1. Dvaja nosiči vo Vysokých Tatrách nesú náklad potravín na Téryho chatu. Keby zobral druhý od prvého dve škatule, náklad druhého by bol dvakrát ťažší ako prvého. Keby zobral prvý od druhého dve škatule, náklad oboch by bol rovnaký. Koľko škatúľ niesol prvý a koľko druhý?

2. Škola objednala spolu 324 bielych, ružových a červených astier na kytice. Ružových astier bolo o 36 viac ako bielych a červených bolo dvakrát toľko ako bielych. Koľko rovnakých kytíc (rovnaký počet kvetov aj farieb) by mohli zviazať z týchto kvetov? Koľko kvetov jednotlivých farieb by bolo v každej kytici? Napíšte všetky možnosti.

3. Máme 12 navonok rovnakých mincí, z ktorých jedna je falošná. Má inú hmotnosť ako ostatné, avšak nevieme, či je ľahšia alebo ťažšia. Navrhnite postup, ktorým odhalíte falošnú mincu a určíte, či je ťažšia alebo ľahšia, pomocou troch vážení na rovnoramenných váhach bez závaží.

4. Na štadióne pripravujú bežecké dráhy. Navrhnite rozmiestnenie štartovacích blokov pre 4 pretekárov, aby pri jednom obehu štadióna (s cieľom na rovine) bežali rovnako dlhú dráhu. Dĺžka rovných úsekov je 100 m, polomer vnútornej dráhy 20 m a dráha je široká 1 m.

5. Aký najmenší počet čísel je nutné vyčiarknuť z množiny čísel 1, 2, 3, ..., 2011 tak, aby sa ani jedno zo zostávajúcich čísel nerovnalo súčinu iných dvoch zostávajúcich (nevyčiarknutých) čísel? Akým spôsobom to treba urobiť?

6. Určte počet všetkých štvorciferných prirodzených čísel, ktorých desiatkový zápis obsahuje práve dve jednotky a ktoré sú deliteľné šiestimi.

7. Paľko ukladá svoje dvojcentové mince do štvorca. Keď zaplnil celý štvorec, zostalo mu 30 centov. Keď chcel utvoriť štvorec so stranou o 1 dlhšou, chýbalo mu 32 centov. Koľko mal Paľko dvojcentových mincí?

8. Nech $f(x) = ax^2 + bx + c$, $x \in \mathbb{R}$, pričom reálne koeficienty a, b, c sú také, že rovnica $f(x) = x$ nemá reálne riešenie. Dokážte, že ani rovnica $f(f(x)) = x$ nemá reálne riešenie.

9. Dokážte, že číslo $2^{1092}-1$ je deliteľné číslom 1093^2.

10. Nájdite všetky prirodzené čísla *m*, *n*, ktoré sú riešeniami rovnice $2^m-3^n=7$.

11. Zistite, či existuje množina 4 004 takých prirodzených čísel, že súčet čísel ľubovoľnej 2 003-prvkovej podmnožiny tejto množiny nie je deliteľný číslom 2 003.

12. Nech a, b, c sú kladné reálne čísla, ktorých súčin nie je väčší ako ich súčet. Dokážte, že potom platí nerovnosť

$$a^2+b^2+c^2\geq\sqrt{3}abc.$$

13. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je definovaná predpisom $a_{n+1}=3a_n-a_{n-1}$, pričom $a_1=20$, $a_2=30$. Nájdite všetky prirodzené čísla *n*, pre ktoré je $5a_{n+1}a_n+1$ druhou mocninou celého čísla.

14. Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla n platí nasledujúca nerovnosť:

$$\left(2n^2+3n+1\right)^n\geq 6^n\cdot\left(n!\right)^2$$

Termín odoslania riešení úloh 2. série: do 16. 5. 2011

Riešenia zasielajte na adresu:

P-MAT, n. o.
Ing. Mgr. Martin Hriňák
P. O. BOX 2
814 99 Bratislava 1