Zadania 1. série úloh korešpondenčnej súťaže

1. Vyjadrite číslo 3 000 pomocou piatich rovnakých číslic a znakov matematických operácií.

2. Čísla 46 a 96 majú zaujímavú vlastnosť. Ich súčin sa nezmení, ak v každom z nich zameníme poradie číslic, teda platí 46 . 96 = 64 . 69. Nájdite všetky „pravé“ dvojice prirodzených čísel s touto vlastnosťou, teda nesmie platiť, že jedna bude obrátenou podobou tej druhej (napríklad 12 a 21) alebo to budú čísla s rovnakými číslicami (napríklad 11 a 33).

3. Kamilka si stavala pyramídu z kociek.. Najvyššie poschodie malo jednu kocku, pod ním 3 x 3, nižšie 5 x 5, 7 x 7 atď. Povrch jednej kocky je 6 dm^2, celá pyramída bola vysoká jeden meter. Aký povrch má celá pyramída? Plocha, ktorou pyramída leží na zemi, sa neráta.

4. Koľko existuje takých päťciferných čísel, že sa v nich vyskytuje číslica 2 presne štyrikrát a 0 nie je na prvom mieste?

5. Peter s Jurajom si vymysleli novú hru s kolkami, pretože ich už nebavili klasické pravidlá. Postavili vedľa seba 13 kolkov a zo vzdialenosti 5 metrov ich zhadzovali pomocou kopania do futbalovej lopty. Vyhrá ten, kto zhodí posledný kolok, alebo ten, ktorého súper nezhodí ani jeden z kolkov, ktoré ešte stoja. Vzhľadom na vzdialenosti medzi kolkami je možné v jednom kole zhodiť maximálne dva kolky (ak práve dva, tak susedné). Keďže sú aj dobrí futbalisti, vždy trafia to, čo si zaumienia. Peter trafil v prvom kole druhý kolok zľava. Ako má ďalej postupovať Juraj, aby určite vyhral?

6. Dokážte, že v štvoruholníku s nerovnobežnými protiľahlými stranami sú stredy uhlopriečok a stredy protiľahlých strán vrcholmi rovnobežníka.

7. Dokážte, že z ľubovoľnej sedmice prirodzených čísel dokážeme vybrať dve také, ktorých súčet alebo rozdiel bude deliteľný desiatimi.

8. Predpokladajme, že každý bod roviny je ofarbený jednou z dvoch farieb. Dokážte, že potom pre jednu z týchto dvoch farieb platí, že pre každé kladné reálne číslo existuje dvojica bodov ofarbených touto farbou, ktorých vzdialenosť sa rovná tomuto číslu.

9. Dokážte, že číslo $2^{1092} - 1$ je deliteľné číslom 1093^2.

10. Nájdite všetky prirodzené čísla *m*, *n*, ktoré sú riešeniami rovnice $2^m - 3^n = 7$.

11. Zistite, či existuje množina 4 004 takých prirodzených čísel, že súčet čísel ľubovoľnej 2 003-prvkovej podmnožiny tejto množiny nie je deliteľný číslom 2 003.

12. Nech a, b, c sú kladné reálne čísla, ktorých súčin nie je väčší ako ich súčet. Dokážte, že potom platí nerovnosť

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{3}abc.$$

13. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je definovaná predpisom $a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1}$, pričom $a_1 = 20$, $a_2 = 30$. Nájdite všetky prirodzené čísla *n*, pre ktoré je $5a_{n+1}a_n + 1$ druhou mocninou celého čísla.

14. Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla n platí nasledujúca nerovnosť:

$$\left(2n^2 + 3n + 1\right)^n \geq 6^n \cdot \left(n!\right)^2$$

Termín odoslania riešení úloh 1. série: do 19. 11. 2012

Riešenia zasielajte na adresu:

P-MAT, n. o.
Ing. Mgr. Martin Hriňák – MATMIX
P. O. BOX 2
814 99 Bratislava 1