Jednota slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Bratislava 1
P-MAT, n. o., Gajova 4, 811 09 Bratislava

Ročník: 18
Číslo: 1
Šk. rok: 2012/2013

Matematický časopis pre žiakov základných a stredných škôl

MAT MIX

Musíte byť matematikmi, aby ste mohli pociťovať tú zvláštnu krásu, akú môže poskytnúť matematická veta, alebo obdivovať línie dovršených partií tejto vedy.

Ludwig Sylow

Redakčná pošta

Milí čitatelia,

časopis MATMIX sa v tomto roku dožíva veku dospelosti – vychádza už jeho 18. ročník. Tento čas je aj časom bilancovania toho, čo časopis za svoj dlhý život dosiahol. Keďže sa školský rok len začína, ponechám si hodnotiace slová do posledného čísla, v ktorom sa pokúsim stručne zhrnúť jeho históriu do niekoľkých viet.

Okrem tohto pekného veku mám pre vás ešte jednu dobrú správu – vydávanie časopisu je tento rok podporené dotáciou Ministerstva školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky, ktorá bola zameraná na vydávanie periodickej tlače. Vďaka tejto dotácii máme možnosť zachovať cenu predplatného pre našich verných čitateľov na úrovni 1 € za jedno číslo časopisu. Zároveň bude priebežne na našom webe prístupný opäť kompletný archív čísel aktuálneho ročníka časopisu.

Pripravili sme pre vás opäť korešpondenčnú súťaž a zaujímavé články z histórie matematiky, ale aj množstvo iných zaujímavých úloh – v článku Poprázdninové matematické úlohy 1 si môžete vyskúšať, ako zvládate matematiku základnej školy. Ako tradičnú prílohu prvého čísla časopisu v tomto školskom roku pripájame aj zadania 62. ročníka Matematickej olympiády v kategóriách Z5 – Z9 a A, B, C.

Prajem vám úspešný vstup do nového školského roka a veľa úspechov pri riešení úloh korešpondenčnej súťaže.

Martin Hriňák

Sophus Lie – vnímal matematické úlohy v ich všeobecnosti

Kto to je?

V odbornej matematickej literatúre sa dozviete, že vo fyzike elementárnych častíc (kalibračné teórie a teória strún) sú Lieove grupy podstatné. „*Mimoriadny význam diela S. Lie pre všeobecný rozvoj geometrie nemôže byť precenený; som presvedčený, že v budúcnosti bude stále narastať.*“ (F. Klein, 1849 – 1925) Kto bol **Sophus Lie** (17. 12. 1842 – 18. 2. 1899)?

Stručne zo života

Bol šiestym a najmladším dieťaťom luteránskeho kňaza v Nórsku. Vyrastal v Mosse neďaleko Kristiánie (dnes Oslo). V Osle vyštudoval v rokoch 1859 až 1865 gymnázium aj univerzitu. Ovplyvnil ho matematik Ludwig Sylow, aj keď neodhalil hneď jeho matematický talent. **Marius Sophus Lie** mal nielen intelektuálne nadanie, ale bol aj telesne zdatný a vynikal v športoch (napr. v gymnastike). Pre matematiku sa rozhodol v roku 1868 až keď sa zoznámil s dielami Plückera a Ponceleta z modernej geometrie. V Berlíne sa v rokoch 1869 – 1870 stretol so známym nemeckým matematikom Felixom Kleinom. V lete 1870 sa v Paríži stretol s francúzskymi matematikmi Darbouxom a Jordanom. Za prusko-francúzskej vojny dočasne zatkli S. M. Lia ako špióna, lebo si pomýlili jeho matematické poznámky s tajnými šifrovanými vojenskými správami. Od roku 1872 bol profesorom matematiky v Osle, v roku 1874 sa oženil (mal dve dcéry a syna). Od roku 1886 pôsobil v Lipsku. Bádal, prednášal, bol unavený z vedenia slabých a nesamostatných doktorandov. Dostal sa aj do konfliktov s kolegami (v roku 1892 aj s F. Kleinom), trpel nespavosťou a depresiami, chýbal mu duchovný vplyv nórskej prírody. V roku 1898 sa Lie vrátil do Nórska. Ochorel zhubnou anémiou. Je pochovaný na cintoríne v Osle.

Odborné práce

Sophus Lie pochopil, že o priestore možno uvažovať aj tak, že jeho základnými prvkami nie sú body, ale zložitejšie objekty (priamky, krivky i plochy). Usiloval sa porozumieť skúmaným matematickým úlohám v ich všeobecnosti. Spoznal, že medzi transformačnými grupami a všeobecnými symetriami sú podstatné súvislosti. Hneď pochopil, prečo F. Klein definoval geometriu ako skúmanie tých vlastností priestoru, ktoré sú invariantné vzhľadom na nejakú grupu transformácií. *Keby som len vedel, ako vzbudiť záujem matematikov o transformačné grupy a ich aplikáciu na diferenciálne rovnice… Položil som si prirodzený problém: vybudovať všeobecnú teóriu integrácie pre všetky diferenciálne rovnice, ktoré pripúšťajú konečné alebo*

infinitezimálne transformácie. Lie vytušil, že jeho teória transformačných grúp sa dá použiť na vybudovanie užitočnej teórie na riešenie diferenciálnych rovníc. Spolu s G. Scheffersom vydal v roku 1891 *Prednášky o diferenciálnych rovniciach*. Jeho veľké dielo o transformačných grupách bolo publikované (spolu s F. Engelom) v rokoch 1888 – 1893.

Poznámky na záver

Marius Sophus Lie ovplyvnil diferenciálnu geometriu, prehĺbil výskum teórie diferenciálnych rovníc. Spoznal, že niektoré fyzikálne zákony majú grupový teoretický charakter. *Moje životné dielo prekoná všetky skúšky času a bude stále viac oceňované, o tom nepochybujem.* Sophus Lie sa stal významným nórskym matematikom a svojím dielom hlboko ovplyvnil celé matematické poznanie. „*Znalosť klasických základov a moderných grupových teoretických metód sa stala dôležitou súčasťou matematickej kultúry pre každého, kto zostrojuje a skúma matematické modely problémov vzatých z prírody.*“ (N. H. Ibragimov) V roku 1992 vydala Kráľovská nórska akadémia vied a písomníctva pamätnú medailu s portrétom S. Lia. „*Musíte byť matematikmi, aby ste mohli pociťovať tú zvláštnu krásu, akú môže poskytnúť matematická veta, alebo obdivovať línie dovŕšených partií tejto vedy.*“ (L. Sylow)

Dušan Jedinák

Poprázdninové matematické úlohy 1

(vraciame sa do základnej školy)

1. Zapíšte desatinným číslom 1 hod. 15 min.

2. Nech P = 11/15 a Q = 23/32. Stanovte, ktoré z čísel P, Q je menšie.

3. Vypočítajte, koľko je 3/19 delené 12/38.

4. Ak sme zjedli najprv 3/5 celej torty a potom ešte 2/3 zvyšku, aká časť torty ešte zostala?

5. Nájdite najmenšie prirodzené číslo, ktoré po delení dvomi, tromi, štyrmi, piatimi, aj po delení šiestimi, dáva vždy zvyšok 1.

6. Ak od trojnásobku môjho veku, ktorý budem mať za tri roky, odčítate trojnásobok veku, ktorý som mal pred tromi rokmi, dostanete môj vek. Koľko mám rokov?

7. Polovica nákladov vzrástla o 20 % a druhá polovica nákladov klesla o 30 %. O koľko percent sa zmenili celkové náklady?

8. V danom štvorcifernom čísle je hodnota prvej číslice dvakrát väčšia než hodnota štvrtej číslice a tiež je o dve väčšia ako hodnota druhej číslice. Hodnota tretej číslice je o jednu väčšia ako hodnota prvej číslice a o päť väčšia ako hodnota štvrtej číslice. Stanovte spomínané číslo.

9. Vypočítajte časový údaj, v ktorom platí: Za 2 minúty bude do 13. hodiny chýbať dvakrát viac minút, ako ich uplynulo od času 25 minút po poludní.

10. Stanovte, najviac koľko rôznych prirodzených trojciferných čísel obsahuje vo svojom vyjadrení práve jednu trojku (číslicu 3).

11. Stanovte minimálny objem nádoby, v ktorej môžeme zriediť 5 litrov roztoku s koncentráciou 70 % neznámej látky vodou na roztok s koncentráciou 50 %.

12. V pravouhlom trojuholníku je daná veľkosť prepony 8 cm a veľkosť jednej odvesny 4 cm. Stanovte veľkosť vnútorného uhla trojuholníka medzi preponou a danou odvesnou.

13. Stanovte veľkosti vnútorných uhlov rovnoramenného ostrouhlého trojuholníka, ak veľkosť jeho výšky spustenej z vrcholu základne na rameno je polovicou veľkosti ramena.

14. Stanovte mierku mapy, v ktorej je 360-hektárový pozemok znázornený ako plocha o veľkosti 10 cm^2.

15. Stanovte, koľkokrát viac farby treba na náter gule s priemerom 120 cm než na náter gule s priemerom 0,3 m.

Je ťažké presvedčiť žiakov, že ich v živote čakajú problémy podstatne horšie ako tie, ktoré poznajú z hodín algebry a geometrie. (Edgar W. Howe)

Správne odpovede nájdete na stránke www.era.topindex.sk.

Zostavil D. Jedinák

Korešpondenčná súťaž v školskom roku 2012/2013

Redakcia časopisu MATMIX vyhlasuje v tomto školskom roku korešpondenčnú súťaž pre žiakov základných a stredných škôl. Zapojiť sa do nej môžu všetci, ktorí majú záujem o matematiku a sú ochotní venovať niekoľko minút riešeniu úloh. V školskom roku 2012/2013 bude mať korešpondenčná súťaž dve série. Zadania úloh budú uverejnené v číslach 1 a 2, riešenia úloh a výsledkové listiny v číslach 2 a 3. Výsledky korešpondenčnej súťaže budú priebežne zverejňované aj na internete na našej webovej stránke www.matmix.sk.

Žiakom druhého stupňa základnej školy a žiakom 1. až 4. ročníka osemročných gymnázií je určená kategória Z a sú pre nich určené úlohy č. 1 až 4. Prvákom stredných škôl a žiakom 5. ročníka osemročných gymnázií je určená kategória C s úlohami 3 až 6. Druhákom stredných škôl a žiakom 6. ročníka osemročných gymnázií je určená kategória B s úlohami 5 až 8. Tretiakom a štvrtákom stredných škôl a žiakom 7. a 8. ročníka osemročných gymnázií je určená kategória A s úlohami 7 až 10. Žiakom, ktorí majú záujem o náročnejšie úlohy, je určená kategória π. Pre túto kategóriu sú v každej sérii určené úlohy 11 až 14. V prípade, že máte nejasnosti v zadaní alebo máte iné otázky, môžete svoje pripomienky adresovať na e-mailovú adresu hrinak@matmix.sk.

Prihlášku do korešpondenčnej súťaže nám pošlite spolu s prvou sériou vašich riešení. Uveďte na nej svoje meno, priezvisko, školu, triedu, vek, súťažnú kategóriu a e-mailovú adresu. Ak chcete dostávať svoje opravené riešenia s komentármi späť domov, napíšte nám to v prihláške a zašlite nám dve známky v hodnote 0,6 € (podľa platného cenníka Slovenskej pošty, pričom riešenia môžeme zasielať aj viacerým riešiteľom na jednu adresu). Zaslaním svojich riešení na našu adresu nám udeľujete súhlas na spracovanie zaslaných osobných údajov v zmysle § 7 zákona č. 428/2002 Z. z. o ochrane osobných údajov v platnom znení na spracúvanie týchto osobných údajov za účelom evidencie súťažiacich v korešpondenčnej súťaži časopisu MATMIX a pri jej vyhodnocovaní, za účelom vykonávania marketingových činností, napr. zasielania informačných mailov. Súčasne súhlasíte s využitím svojej e-mailovej adresy za účelom doručovania informácií a so zverejnením nasledujúcich údajov vo výsledkovej listine: meno, priezvisko, ročník, počet bodov, umiestnenie, škola. Súhlas sa poskytuje na dobu neurčitú a môže byť kedykoľvek odvolaný prostredníctvom písomného oznámenia o odvolaní doručeného do redakcie. Zároveň potvrdzujete, že ste boli riadne poučení o existencii práv dotknutej osoby uvedených v § 20 Zákona.

Upozorňujeme vás, aby ste riešenia písali **čitateľne** na papiere **formátu A4** (kancelársky papier) a na každé riešenie napísali **hlavičku** – svoje **meno, školu a číslo úlohy**. V prípade, že sa riešenie jednej úlohy nachádza na viacerých pa-

pieroch, zopnite ich. Na jednom papieri nemôžu byť napísané riešenia viacerých úloh. **Hodnotiť budeme len také riešenia, ktoré budú spĺňať tieto kritériá.**

Do súťaže sa môžete zapojiť aj v druhej sérii. Podmienkou zaradenia do súťaže je aj v takomto prípade zaslanie prihlášky spolu s riešeniami, ktoré vypracujete.

Riešenia súťažných úloh vypracujte sami! V prípade, že zistíme, že nejaká skupina navzájom odpisovala, **každý** jej člen dostane za danú úlohu 0 bodov, aj keby bolo riešenie správne. Plný počet bodov (5) patrí len úplnému riešeniu. Preto treba zdôvodniť všetky tvrdenia, ktoré v riešení použijete. V prípade, že použijete vetu alebo tvrdenie, ktoré nie je všeobecne známe, uveďte aj literatúru, kde sa nachádza jeho dôkaz. Uvedenie iba výsledku nie je postačujúce. Ak niektorá úloha nemá riešenie, treba ukázať, prečo ho nemá.

Riešenia každej série zasielajte do uvedeného termínu – rozhoduje pečiatka na obálke (nezabudnite na pekné známky) Ak pošlete riešenia po tomto termíne, strhneme vám za každý deň omeškania jeden bod (pod 0 bodov však klesnúť nemôžete). Svoje riešenia píšte v slovenskom jazyku. Riešenia zasielajte na adresu:

P-MAT, n. o.
Ing. Mgr. Martin Hriňák – MATMIX
P. O. BOX 2
814 99 Bratislava 1

V prípade, že nebudete spokojní s ohodnotením vášho riešenia, môžete nám poslať reklamáciu spolu s vaším riešením, odôvodnením a požadovaným počtom bodov. Vaše riešenie si ešte raz prezrieme a oznámime vám výsledok.

Veľa zážitkov a krásnych chvíľ pri riešení súťažných úloh vám praje redakcia časopisu MATMIX.

Prihláška do korešpondenčnej súťaže časopisu MATMIX

Priezvisko: ..... Meno: .....
Kategória: ..... Trieda: .....
Škola: .....
Telefón: ..... E-mail: .....
Mám záujem dostávať späť opravené riešenia s komentármi: áno nie
Adresa pre korešpondenciu: .....
.....
Podpis: .....

Skôr než začnete písať svoje riešenia

Vzhľadom na skúsenosti z minulých rokov sme sa rozhodli uverejniť zopár rád, ktoré vám môžu pomôcť pri písaní vášho riešenia, presnejšie, akých chýb sa máte vyvarovať.

Mnohí z vás používajú pri dokazovaní rovnosti dvoch čísel kalkulačku. Takéto riešenia nikdy nebudú hodnotené ako správne z jednoduchého dôvodu – kalkulačky majú len obmedzenú presnosť, a ak vám vyjde na kalkulačke, že sa dve čísla rovnajú, neznamená to nutne, že sa rovnajú aj v skutočnosti. Možno sa líšia už na prvom nezobrazovanom desatinnom mieste. Kalkulačku teda nemôžete používať na dokazovanie rovností. V prípade dokazovania nerovností ju však už môžete využiť v rozumnej miere – teda pri zisťovaní rozdielov na prvých dvoch – troch desatinných miestach. Napríklad na skonštatovanie, že $\pi^2 < 10$.

K riešeniam pomocou počítača: Je veľa úloh, v ktorých treba vyskúšať veľmi veľa možností, ak človek nenájde šikovnú skratku, ktorá mu počet týchto možností zníži. Preto napríklad riešenie typu „vyskúšame všetky možnosti“ nebude hodnotené ako správne. A to aj v prípade, že by ste v riešení uviedli úvahy o tom, že možností je len konečne veľa a podobne. V prípade, že chcete, aby ste za takéto riešenie získali nenulový počet bodov, musíte všetky možnosti vypísať, aby ste zistili, že to nie je tá správna cesta.

Taktiež si treba uvedomiť, že ak vypíšete niekoľko možností a pri nich dokážete, že tvrdenie platí, nie je to dôkaz tvrdenia vo všeobecnosti.

V prípade, ak máte dokázať nejaké tvrdenie a postupujete spôsobom, že predpokladáte platnosť tohto tvrdenia a dospejete k pravdivému tvrdeniu, tak ste nedokázali vôbec nič. Uvedieme príklad: Predpokladajme, že $1 = 2$. Vynásobením oboch strán rovnosti nulou dostávame pravdivé tvrdenie $0 = 0$. Môžeme teraz tvrdiť, že sme dokázali platnosť tvrdenia $1 = 2$? Sami vidíte, že sme nič nedokázali... Ak však používame ekvivalentné úpravy, už je to iné. Ale to treba spomenúť.

Pri písaní svojich riešení dávajte pozor aj na označenie, aby bolo jasné, čo čo znamená. Pri nesprávnom označení môžete stratiť body, aj keď je riešenie v princípe správne. Ďalej treba dávať pozor aj na to, aby ste na dvoch rôznych miestach neoznačili jedným označením dve rôzne skutočnosti.

Na záver vám odporúčame, aby ste si svoje riešenia nakoniec vždy ešte raz prečítali. Možno sami zistíte, že tomu, čo ste napísali, nerozumiete ani vy sami, lebo opravovatelia sú tvory, ktoré nemajú telepatické schopnosti.

Martin Hriňák

Zadania 1. série úloh korešpondenčnej súťaže

1. Vyjadrite číslo 3 000 pomocou piatich rovnakých číslic a znakov matematických operácií.

2. Čísla 46 a 96 majú zaujímavú vlastnosť. Ich súčin sa nezmení, ak v každom z nich zameníme poradie číslic, teda platí 46 . 96 = 64 . 69. Nájdite všetky „pravé“ dvojice prirodzených čísel s touto vlastnosťou, teda nesmie platiť, že jedna bude obrátenou podobou tej druhej (napríklad 12 a 21) alebo to budú čísla s rovnakými číslicami (napríklad 11 a 33).

3. Kamilka si stavala pyramídu z kociek.. Najvyššie poschodie malo jednu kocku, pod ním 3 x 3, nižšie 5 x 5, 7 x 7 atď. Povrch jednej kocky je 6 dm^2, celá pyramída bola vysoká jeden meter. Aký povrch má celá pyramída? Plocha, ktorou pyramída leží na zemi, sa neráta.

4. Koľko existuje takých päťciferných čísel, že sa v nich vyskytuje číslica 2 presne štyrikrát a 0 nie je na prvom mieste?

5. Peter s Jurajom si vymysleli novú hru s kolkami, pretože ich už nebavili klasické pravidlá. Postavili vedľa seba 13 kolkov a zo vzdialenosti 5 metrov ich zhadzovali pomocou kopania do futbalovej lopty. Vyhrá ten, kto zhodí posledný kolok, alebo ten, ktorého súper nezhodí ani jeden z kolkov, ktoré ešte stoja. Vzhľadom na vzdialenosti medzi kolkami je možné v jednom kole zhodiť maximálne dva kolky (ak práve dva, tak susedné). Keďže sú aj dobrí futbalisti, vždy trafia to, čo si zaumienia. Peter trafil v prvom kole druhý kolok zľava. Ako má ďalej postupovať Juraj, aby určite vyhral?

6. Dokážte, že v štvoruholníku s nerovnobežnými protiľahlými stranami sú stredy uhlopriečok a stredy protiľahlých strán vrcholmi rovnobežníka.

7. Dokážte, že z ľubovoľnej sedmice prirodzených čísel dokážeme vybrať dve také, ktorých súčet alebo rozdiel bude deliteľný desiatimi.

8. Predpokladajme, že každý bod roviny je ofarbený jednou z dvoch farieb. Dokážte, že potom pre jednu z týchto dvoch farieb platí, že pre každé kladné reálne číslo existuje dvojica bodov ofarbených touto farbou, ktorých vzdialenosť sa rovná tomuto číslu.

9. Dokážte, že číslo $2^{1092} - 1$ je deliteľné číslom 1093^2.

10. Nájdite všetky prirodzené čísla *m*, *n*, ktoré sú riešeniami rovnice $2^m - 3^n = 7$.

11. Zistite, či existuje množina 4 004 takých prirodzených čísel, že súčet čísel ľubovoľnej 2 003-prvkovej podmnožiny tejto množiny nie je deliteľný číslom 2 003.

12. Nech a, b, c sú kladné reálne čísla, ktorých súčin nie je väčší ako ich súčet. Dokážte, že potom platí nerovnosť

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{3}abc.$$

13. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je definovaná predpisom $a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1}$, pričom $a_1 = 20$, $a_2 = 30$. Nájdite všetky prirodzené čísla *n*, pre ktoré je $5a_{n+1}a_n + 1$ druhou mocninou celého čísla.

14. Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla n platí nasledujúca nerovnosť:

$$\left(2n^2 + 3n + 1\right)^n \geq 6^n \cdot \left(n!\right)^2$$

Termín odoslania riešení úloh 1. série: do 19. 11. 2012

Riešenia zasielajte na adresu:

P-MAT, n. o.
Ing. Mgr. Martin Hriňák – MATMIX
P. O. BOX 2
814 99 Bratislava 1

Črepky z histórie matematickej kultúry

Ceny za matematické objavy

Nobelova cena sa neudeľuje za matematiku. Kráľovská švédska akadémia vied udeľuje každých sedem rokov Crafoordovu cenu aj za matematiku. Matematici udeľujú na svojich medzinárodných kongresoch každé štyri roky Fieldsovu prémiu za významné práce z uznávaných matematických disciplín pre svojich súkmeňovcov, ktorých vek neprevŕšil 40 rokov. V Jeruzaleme od roku 1978 udeľujú Wolfovu cenu aj za matematiku. Tzv. Nobelovu cenu za ekonómiu v roku 1975 dostal ruský matematik Ľ. V. Kantorovič (1912 – 1986, na obrázku). Cesta k najprestížnejšiemu oceneniu tak nie je zarúbaná ani pre praktických matematikov.

Dušan Jedinák

****

KATEGÓRIA Z5

Z5 – I – 1

Mamička zaplatila v kníhkupectve 270 €. Platila dvoma druhmi bankoviek, dvadsaťeurovými a päťdesiateurovými, a presne. Koľko ktorých bankoviek mohla použiť? Uveďte všetky možnosti. (*M. Krejčová*)

Z5 – I – 2

Pat napísal na tabuľu čudný príklad:

$$550 + 460 + 359 + 340 = 2\,012.$$

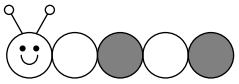
Mat to chcel napraviť, preto pátral po neznámom čísle, ktoré by pripočítal ku každému z piatich uvedených čísel, aby potom bol príklad vypočítaný správne. Aké to bolo číslo? (*L. Hozová*)

Z5 – I – 3

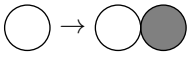
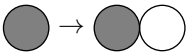
Rudo dostal na narodeniny budík. Mal z neho radosť a nastavil na ňom presný čas. Odvtedy každé ráno, keď vstával (vrátane sobôt, nedieľ a prázdnin), stlačil presne na 4 sekundy tlačidlo, ktorým sa osvetľuje ciferník. Pritom si všimol, že počas stlačenia tlačidla je čas na budíku zastavený. Inak sa ale budík vôbec neoneskoruje. Popoludní 11. decembra sa Rudo pozrel na svoj budík a zistil, že ukazuje presne o 3 minúty menej, ako by mal. Aký je dátum Rudových narodenín? (*M. Petrová*)

Z5 – I – 4

Červík sa skladá z bielej hlavy a niekoľkých článkov, pozri obrázok.



Keď sa červík narodí, má hlavu a jeden biely článok. Každý deň pribudne červíkovi nový článok jedným z nasledujúcich spôsobov:

- buď sa niektorý biely článok rozdelí na biely a sivý: 
- alebo sa niektorý sivý článok rozdelí na sivý a biely: 

(V oboch prípadoch opisujeme situáciu pri pohľade na červíka od hlavy.) Na štvrtý deň červík dospieva a ďalej nerastie – jeho telo sa skladá z hlavy a štyroch článkov. Koľko najviac rôznych farebných variantov dospelých červíkov tohto druhu môže existovať? (*E. Novotná*)

Z5 – I – 5

Vypočítajte $3 \cdot 15 + 20 : 4 + 1$. Potom doplňte do zadania jeden alebo viac párov zátvoriek tak, aby výsledok bol:

1. čo najväčšie celé číslo,
2. čo najmenšie celé číslo. (*M. Volfová*)

Z5 – I – 6

Sedem trpaslíkov sa postavilo po obvode svojej záhradky, do každého rohu jeden, a napli medzi sebou povraz okolo celej záhrady. Snehulienka vyšla od Kýblika a išla pozdĺž povrazu. Najskôr išla štyri metre na východ, kde stretla Vedka. Od neho pokračovala dva metre na sever, kým dorazila k Dudrošovi. Od Dudroša išla na západ a po dvoch metroch natrafila na Plaška. Ďalej pokračovala tri metre na sever, až došla k Smejkovi. Vydala sa na západ a po štyroch metroch stretla Kýchala, odkiaľ jej zostávali tri metre na juh k Spachtošovi. Nakoniec pozdĺž povrázka došla najkratšou cestou ku Kýblikovi a tým obišla celú záhradu. Koľko metrov štvorcových má celá záhrada? (*M. Mach*)

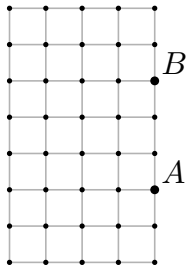
KATEGÓRIA Z6

Z6 – I – 1

Ľuboš si myslí trojciferné prirodzené číslo, ktoré má všetky svoje cifry nepárne. Ak k nemu pripočíta 421, dostane trojciferné číslo, ktoré nemá ani jednu svoju cifru nepárnu. Nájdite všetky čísla, ktoré si môže Ľuboš myslieť. (*L. Šimůnek*)

Z6 – I – 2

Na obrázku sú vyznačené mrežové body štvorčekovej siete, z ktorých dva sú pomenované A a B. Nech bod C je jeden zo zvyšných mrežových bodov. Nájdite všetky možné polohy bodu C tak, aby trojuholník ABC mal obsah 4,5 štvorčeka. (*E. Novotná*)



Z6 – I – 3

Obri Koloman a Bartolomej hovoria niektoré dni iba pravdu a niekedy iba klamú. Koloman hovorí pravdu v pondelok, v piatok a v nedeľu, ostatné dni klame. Bartolomej hovorí pravdu v stredu, štvrtok a piatok, ostatné dni klame.

1. Určte, kedy môže Koloman povedať: „Včera som hovoril pravdu.“
2. Jedného dňa obaja povedali: „Včera som klamal.“ V ktorý deň to bolo?

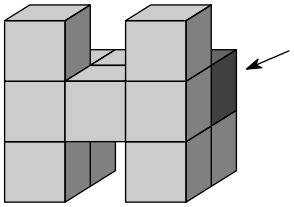
(*M. Volfová*)

Z6 – I – 4

Eva má tri lístočky a na každom z nich je napísané jedno prirodzené číslo. Keď vynásobí medzi sebou všetky možné dvojice čísel z lístočkov, dostane výsledky 48, 192 a 36. Ktoré čísla sú napísané na Eviných lístočkoch? (*E. Novotná*)

Z6 – I – 5

Na obrázku je útvar zložený z dvanástich zhodných kociek. Na koľko rôznych miest môžeme premiestniť tmavú kocku (označenú šípkou), ak chceme, aby sa povrch zostaveného telesa nezmenil?



Rovnako ako pri pôvodnom telese sa aj pri novom telese musia kocky dotýkať celými stenami. Poloha svetlých kociek sa meniť nemôže.

(*D. Reichmann*)

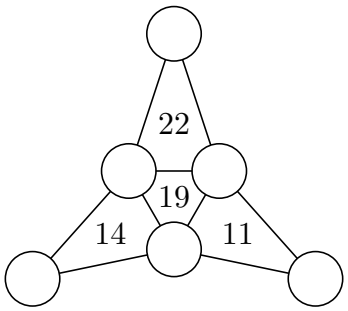
Z6 – I – 6

Obsluhujúci v bufete U Švindliara vždy započítava platiacemu hosťovi do účtu aj dátum: celkovú minutú sumu zväčší o toľko centov, koľký deň v mesiaci práve je. V septembri sa v bufete dvakrát zišla trojica priateľov. Prvýkrát platil každý z nich zvlášť, obsluhujúci teda vždy pripísal dátum a žiadal od každého 1,68 €. O štyri dni tam olovrantovali znova a dali si presne to isté čo minule. Tentoraz však jeden platil za všetkých dokopy. Obsluhujúci teda pripísal dátum do účtu iba raz a vypýtal si 4,86 €. Priateľom sa nezdalo, že aj keď sa ceny v jedálnom lístku nezmenili, majú olovrant lacnejší ako minule, a podvod odhalili. Koľkého septembra práve bolo, keď podvod odhalili? (*L. Šimůnek*)

KATEGÓRIA Z7

Z7 – I – 1

Na obrázku je šesť krúžkov, ktoré tvoria vrcholy štyroch trojuholníkov. Napíšte do krúžkov navzájom rôzne jednociferné prirodzené čísla tak, aby v každom trojuholníku platilo, že číslo vnútri je súčtom čísel napísaných v jeho vrcholoch. Nájdite všetky riešenia. (*E. Novotná*)



Z7 – I – 2

Pred našou školou je kvetinový záhon. Jednu pätinu všetkých kvetov tvoria tulipány, dve deväťiny narcisy, štyri pätnástiny hyacinty a zvyšok sú sirôtky. Koľko kvetov je celkom na záhone, ak zo žiadneho druhu ich nie je viac ako 60 ani menej ako 30? (*M. Petrová*)

Z7 – I – 3

Obri Bartolomej a Koloman hovoria niektoré dni iba pravdu a niektoré dni iba klamú. Bartolomej hovorí pravdu iba cez víkendy, ostatné dni klame. Koloman hovorí pravdu v pondelok, v piatok a v nedeľu, ostatné dni klame.

Jedného dňa Bartolomej povedal: „Včera sme obaja klamali.“

Koloman však nesúhlasil: „Aspoň jeden z nás hovoril včera pravdu.“

Ktorý deň v týždni môžu obri viesť takýto rozhovor? (*M. Volfová, V. Žádník*)

Z7 – I – 4

Pani učiteľka napísala na tabuľu nasledujúce čísla:

$$1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16,\ 19,\ 22,\ 25,\ 28,\ 31,\ 34,\ 37,\ 40,\ 43.$$

Dve susedné čísla sa líšia vždy o rovnakú hodnotu, v tomto prípade o 3. Potom z tabule zotrela všetky čísla okrem 1, 19 a 43. Ďalej medzi čísla 1 a 43 dopísala niekoľko celých čísel tak, že sa každé dve susedné čísla opäť líšili o rovnakú hodnotu a pritom žiadne číslo nebolo napísané viackrát. Koľkými spôsobmi mohla pani učiteľka čísla doplniť? (*K. Pazourek*)

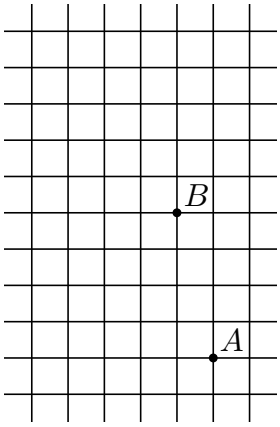
Z7 – I – 5

V športovom areáli je upravená plocha tvaru obdĺžnika $ABCD$ s dlhšou stranou AB. Uhlopriečky AC a BD zvierajú uhol $60°$. Bežci trénujú na veľkom okruhu $ACBDA$ alebo na malej

dráhe ADA. Mojmír bežal desaťkrát po veľkom okruhu a Vojtech pätnásťkrát po malej dráhe, teda pätnásťkrát z A do D a pätnásťkrát z D do A. Dokopy ubehli celkom 4,5 km. Aká dlhá je uhlopriečka AC? (*L. Hozová*)

Z7 – I – 6

Máme štvorčekovú sieť so 77 mrežovými bodmi. Dva z nich sú označené A a B ako na obrázku. Bod C nech je jeden zo zvyšných mrežových bodov. Nájdite všetky možné polohy bodu C tak, aby trojuholník ABC mal obsah 6 štvorčekov. (*E. Novotná*)



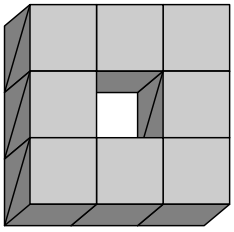
****

KATEGÓRIA Z8

Z8 – I – 1

Súčin troch prirodzených čísel je 600. Keby sme jedného činiteľa zmenšili o 10, zmenšil by sa súčin o 400. Keby sme namiesto toho jedného činiteľa zväčšili o 5, zväčšil by sa súčin na dvojnásobok pôvodnej hodnoty. Ktoré tri prirodzené čísla majú túto vlastnosť? (*L. Hozová*)

Z8 – I – 2



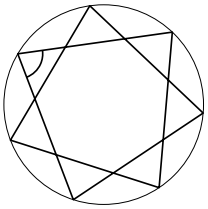
Stano zložil 7 zhodných útvarov, každý zlepený z 8 rovnakých sivých kociek s hranou 1 cm tak ako na obrázku.

Potom všetky ponoril do bielej farby a následne každý z útvarov rozobral na pôvodných 8 dielov, ktoré tak mali niektoré steny sivé a iné biele. Pridal k nim ešte 8 nových kociek, ktoré boli rovnaké ako ostatné, akurát celé biele. Zo všetkých kociek dokopy zložil jednu veľkú kocku a snažil sa pritom, aby čo najväčšia časť povrchu vzniknutej kocky bola sivá. Koľko cm^2 povrchu bude určite bielych? (*M. Mach*)

Z8 – I – 3

Dedo zabudol štvorciferný kód svojho mobilu. Vedel len, že na prvom mieste nebola nula, že uprostred boli buď dve štvorky alebo dve sedmičky alebo tiež štvorka so sedmičkou (v neznámom poradí) a že sa jednalo o číslo deliteľné číslom 15. Koľko je možností pre zabudnutý kód? Aká cifra mohla byť na prvom mieste? (*M. Volfová*)

Z8 – I – 4

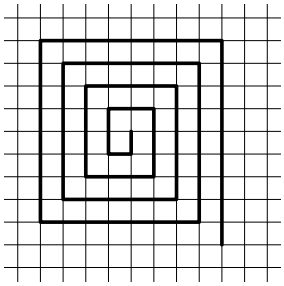


Daná je pravidelná sedemcípa hviezda ako na obrázku. Aká je veľkosť vyznačeného uhla? (*E. Patáková*)

Z8 – I – 5

Dňa 1. septembra 2007 bola založená jazyková škola, v ktorej vyučovalo sedem pedagógov. Dňa 1. septembra 2010 k týmto siedmim učiteľom pribudol nový kolega, ktorý mal práve 25 rokov. Do 1. septembra 2012 jeden z učiteľov zo školy odišiel, a tak ich zostalo opäť sedem. Priemerný vek pedagógov na škole bol vo všetkých troch spomenutých dátumoch rovnaký. Koľko rokov mal 1. septembra 2012 učiteľ, ktorý v škole už nepracoval? Aký bol v ten deň priemerný vek učiteľov na škole? (*L. Šimůnek*)

Z8 – I – 6



Anička a Hanka chodili v labyrinte po špirálovitej cestičke, ktorej začiatok je schematicky znázornený na obrázku. Strana štvorčeka v štvorčekovej sieti má dĺžku 1 m a celá cestička od stredu bludiska až k východu je dlhá 210 m. Dievčatá vyšli zo stredu bludiska, nikde sa nevracali a po čase každá zastavila v niektorom z rohov. Anička pritom prešla o 24 m viac ako Hanka. V ktorých rohoch mohli dievčatá stáť? Určte všetky riešenia. (*E. Novotná*)

****

KATEGÓRIA Z9

Z9 – I – 1

Na tabuli bolo napísané trojciferné prirodzené číslo. Pripísali sme k nemu všetky ďalšie trojciferné čísla, ktoré možno získať zmenou poradia jeho cifier. Na tabuli tak boli okrem pôvodného čísla ešte tri nové. Súčet najmenších dvoch zo všetkých štyroch čísel je 1 088. Aké cifry obsahuje pôvodné číslo? (*L. Hozová*)

Z9 – I – 2

Trojuholník má dve strany, ktorých dĺžky sa líšia o 12 cm, a dve strany, ktorých dĺžky sa líšia o 15 cm. Obvod tohto trojuholníka je 75 cm. Určte dĺžky jeho strán. Nájdite všetky možnosti. (*L. Šimůnek*)

Z9 – I – 3

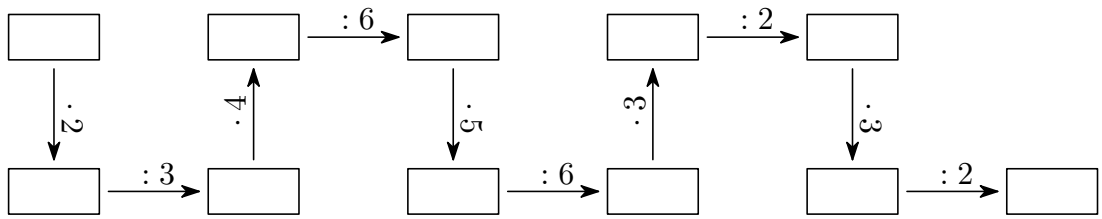
Pri horskej chate nám tréner povedal: „Ak pôjdeme ďalej týmto pohodlným tempom 4 km za hodinu, prídeme na stanicu 45 minút po odchode nášho vlaku.“ Potom ukázal na skupinu, ktorá nás práve míňala: „Tí majú lepšiu obuv, a tak dosahujú priemernú rýchlosť 6 km za hodinu. Na stanici budú už pol hodiny pred odchodom nášho vlaku.“ Ako ďaleko bola stanica od horskej chaty? (*M. Volfová*)

Z9 – I – 4

Do kružnice s polomerom 5 cm je vpísaný pravidelný osemuholník $ABCDEFGH$. Zostrojte trojuholník ABX tak, aby bod D bol ortocentrom (priesečníkom výšok) trojuholníka ABX. (*M. Mach*)

Z9 – I – 5

Do každého políčka schémy na obrázku máme zapísať štvorciferné prirodzené číslo tak, aby všetky naznačené výpočtové operácie boli správne. Koľkými rôznymi spôsobmi možno schému vyplniť? (*L. Šimůnek*)



Z9 – I – 6

Daný je pravouhlý lichobežník $ABCD$ s pravým uhlom pri vrchole B a s rovnobežnými stranami AB a CD. Uhlopriečky lichobežníka sú na seba kolmé a majú dĺžky $|AC| = 12$ cm, $|BD| = 9$ cm. Vypočítajte obvod a obsah tohto lichobežníka. (*M. Krejčová*)

****

KATEGÓRIA A

A – I – 1

Nájdite všetky dvojice prvočísel p, q, pre ktoré existuje prirodzené číslo a také, že

$$\frac{pq}{p+q} = \frac{a^2+1}{a+1}.$$

(*Ján Mazák, Róbert Tóth*)

A – I – 2

Dve kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$ sa zvonka dotýkajú a ležia vo štvorci $ABCD$ so stranou a tak, že k_1 se dotýka strán AD a CD a k_2 sa dotýka strán BC a CD. Dokážte, že aspoň jeden z trojuholníkov AS_1S_2, BS_1S_2 má obsah najviac $\frac{3}{16}a^2$. (*Tomáš Jurík*)

A – I – 3

Označme $p(n)$ počet všetkých n-ciferných čísel zložených len z cifier 1, 2, 3, 4, 5, v ktorých sa každé dve susedné cifry líšia aspoň o 2. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí

$$5 \cdot 2{,}4^{n-1} \leqq p(n) \leqq 5 \cdot 2{,}5^{n-1}.$$

(*Pavel Novotný*)

A – I – 4

Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky nenulové čísla x, y platí

$$x \cdot f(xy) + f(-y) = x \cdot f(x).$$

(*Pavel Calábek*)

A – I – 5

Označme I stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC. Kružnica, ktorá prechádza vrcholom B a dotýka sa priamky AI v bode I, pretína strany AB, BC postupne v bodoch P, Q. Priesečník priamky QI so stranou AC označme R. Dokážte, že platí

$$|AR| \cdot |BQ| = |PI|^2.$$

(*Jaroslav Švrček*)

A – I – 6

V obore reálnych čísel vyriešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 y &= \operatorname{tg}^2 z, \\ \sin^2 y + \cos^2 z &= \operatorname{tg}^2 x, \\ \sin^2 z + \cos^2 x &= \operatorname{tg}^2 y. \end{aligned}$$

(*Pavel Calábek*)

KATEGÓRIA B

B – I – 1

Určte všetky trojice (a, b, c) prirodzených čísel, pre ktoré platí

$$2^a + 4^b = 8^c.$$

(*Jaroslav Švrček*)

B – I – 2

V obore reálnych čísel riešte rovnicu

$$x^3 + (3\sqrt{2} - 2)x^2 - (1 + \sqrt{2})x - 14(\sqrt{2} - 1) = 0,$$

ak viete, že má aspoň jeden celočíselný koreň. Prípadné iracionálne korene zapíšte v jednoduchom tvare bez odmocnín z iracionálnych čísel. (*Jaromír Šimša*)

B – I – 3

Nech V je priesečník výšok ostrouhlého trojuholníka ABC. Priamka CV je spoločnou dotyčnicou kružníc k a l, ktoré sa zvonka dotýkajú v bode V a pritom každá z nich prechádza jedným z vrcholov A a B. Ich priesečníky s vnútrami strán AC a BC označme P a Q. Dokážte, že polpriamka VC je osou uhla PVQ a že body A, B, P, Q ležia na jednej kružnici.

(*Jaroslav Švrček*)

B – I – 4

Nájdite najmenšiu hodnotu zlomku

$$V(n) = \frac{n^3 - 10n^2 + 17n - 4}{n^2 - 10n + 18},$$

pričom n je ľubovoľné prirodzené číslo väčšie ako 2. (*Vojtech Bálint*)

B – I – 5

V rovine je daná úsečka AB. Pre ľubovoľný bod X tejto roviny, ktorý je rôzny od A aj B, označme X_A, resp. X_B obraz bodu A, resp. B v osovej súmernosti podľa priamky XB, resp. XA. Nájdite všetky také body X, ktoré spolu s bodmi X_A, X_B tvoria vrcholy rovnostranného trojuholníka. (*Pavel Calábek*)

B – I – 6

Je dané prirodzené číslo $k < 12$. Vo vrcholoch pravidelného 12-uholníka sú napísané čísla $1, 2, \ldots, 12$ (ako na ciferníku hodín). V jednom kroku môžeme buď vymeniť niektoré dve protiľahlé čísla, alebo zvoliť ľubovoľných k susedných vrcholov a v nich napísané čísla zväčšiť o 1. Označme $T(k)$ nasledovné tvrdenie: „Po konečnom počte krokov možno dostať všetkých 12 čísel rovnakých.“ Dokážte, že $T(2)$ neplatí, $T(5)$ platí, a rozhodnite o platnosti $T(3)$. (*Ján Mazák*)

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

62. ročník Školský rok 2012 / 2013 Domáce kolo

****

KATEGÓRIA C

C – I – 1

Štvorcová tabuľka je rozdelená na 16×16 políčok. Kobylka sa po nej pohybuje dvoma smermi: vpravo alebo dole, pričom strieda skoky o dve a o tri políčka (t. j. žiadne dva po sebe idúce skoky nie sú rovnako dlhé). Začína skokom dĺžky dva z ľavého horného políčka. Koľkými rôznymi cestami sa môže kobylka dostať na pravé dolné políčko? (Pod cestou máme na mysli postupnosť políčok, na ktoré kobylka doskočí.) (*Peter Novotný*)

C – I – 2

Pre kladné reálne čísla a, b, c, d platí

$$a + b = c + d, \qquad ad = bc, \qquad ac + bd = 1.$$

Akú najväčšiu hodnotu môže mať súčet $a + b + c + d$? (*Ján Mazák*)

C – I – 3

Daný je obdĺžnik $ABCD$ s obvodom o. V jeho rovine nájdite množinu všetkých bodov, ktorých súčet vzdialeností od priamok AB, BC, CD, DA je rovný $\frac{2}{3}o$. (*Tomáš Jurík*)

C – I – 4

Rozhodnite, či z ľubovoľných siedmich vrcholov daného pravidelného 19-uholníka možno vždy vybrať štyri, ktoré sú vrcholmi lichobežníka. (*Jaromír Šimša*)

C – I – 5

Určte všetky celé čísla n, pre ktoré $2n^3 - 3n^2 + n + 3$ je prvočíslo. (*Jaroslav Švrček*)

C – I – 6

Vnútri pravidelného šesťuholníka $ABCDEF$ s obsahom $30\,\mathrm{cm}^2$ je zvolený bod M. Obsahy trojuholníkov ABM a BCM sú postupne $3\,\mathrm{cm}^2$ a $2\,\mathrm{cm}^2$. Určte obsahy trojuholníkov CDM, DEM, EFM a FAM. (*Pavel Leischner*)

Obsah

Redakčná pošta ..... 2. strana obálky

Dušan Jedinák: Sophus Lie – vnímal matematické úlohy v ich všeobecnosti..... 1

Dušan Jedinák: Poprázdninové matematické úlohy 1..... 2

Korešpondenčná súťaž v školskom roku 2012/2013 4

Martin Hriňák: Skôr než začnete písať svoje riešenia 6

Zadania 1. série úloh korešpondenčnej súťaže 7

Dušan Jedinák: Črepky z histórie matematickej kultúry 8

Zadania úloh 62. ročníka Matematickej olympiády..... 9

MATMIX – matematický časopis pre žiakov základných a stredných škôl, vydáva Ing. Mgr. Martin Hriňák, Jednota slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Bratislava 1, a P-MAT, n. o., ako pomocnú literatúru pre predmetové komisie matematiky a pre žiakov so záujmom o matematiku.

Vydávanie časopisu je spolufinancované z dotácie Ministerstva školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky.

Šéfredaktor: Ing. Mgr. Martin Hriňák
Redakcia: Dušan Jedinák, Mgr. Katarína Škrovinová
Vydavateľ: Ing. Mgr. Martin Hriňák, Havanská 17, 040 13 Košice
Adresa redakcie: P-MAT, n. o., Ing. Mgr. Martin Hriňák – MATMIX, P. O. BOX 2, 814 99 Bratislava 1
Časopis vychádza štyrikrát ročne. Cena 1,35 €. Náklad: 150 ks.
E-mail: matmix@matmix.sk
Webová stránka: http://www.matmix.sk
Registračné číslo MK SR: EV 2029/08
ISSN: 1336-7854