Korešpondenčná súťaž v školskom roku 2012/2013

Riešenia 1. série úloh korešpondenčnej súťaže

1. Vyjadrite číslo 3 000 pomocou piatich rovnakých číslic a znakov matematických operácií.

Riešenie: Jedným z možných riešení je napríklad $5^5 - 5 \cdot 5 \cdot 5 = 3\,125 - 125 = 3\,000$.

2. Čísla 46 a 96 majú zaujímavú vlastnosť. Ich súčin sa nezmení, ak v každom z nich zameníme poradie číslic, teda platí 46 . 96 = 64 . 69. Nájdite všetky „pravé“ dvojice prirodzených čísel s touto vlastnosťou, teda nesmie platiť, že jedna bude obrátenou podobou tej druhej (napríklad 12 a 21) alebo to budú čísla s rovnakými číslicami (napríklad 11 a 33).

Riešenie: Uvažujme prvé dvojciferné číslo v tvare $10a + b$ a druhé číslo v tvare $10c + d$, kde a, b, c, d sú cifry, pričom a a c sú nenulové, nesmie súčasne platiť $a = d$ a $b = c$, ani súčasne $a = b$ a $c = d$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $a \le c$ (ak by to neplatilo, vymeníme poradie týchto dvoch čísel).

Ak v daných dvoch číslach zameníme poradie ich číslic, dostaneme čísla $10b + a$, resp. $10d + c$. Na základe informácií v zadaní potom musí platiť

$$(10a + b)(10c + d) = (10b + a)(10d + c).$$

Postupnými úpravami dostaneme, že platí

$$100ac + 10(ad + bc) + bd = 100bd + 10(ad + bc) + ac,$$

$$100ac + bd = 100bd + ac,$$

$$ac = bd.$$

Keďže a a c sú nenulové, nemôže sa nule rovnať ani jedna z cifier b, d. Teraz už len v tabuľke rozoberieme možnosti, ktoré vyhovujú, pričom musíme brať do úvahy vyššie stanovené podmienky. Nakoniec nám ostanú tieto riešenia:

a	c	$ac = bd$	b	d	Overenie
1	4	4	2	2	$12 \cdot 42 = 504 = 21 \cdot 24$
1	6	6	2	3	$12 \cdot 63 = 756 = 21 \cdot 36$
1	6	6	3	2	$13 \cdot 62 = 806 = 31 \cdot 26$
1	8	8	2	4	$12 \cdot 84 = 1\,008 = 21 \cdot 48$
1	8	8	4	2	$12 \cdot 84 = 1\,008 = 21 \cdot 48$
1	9	9	3	3	$13 \cdot 93 = 1\,209 = 31 \cdot 39$
2	6	12	3	4	$23 \cdot 64 = 1\,472 = 32 \cdot 46$
2	6	12	4	3	$24 \cdot 63 = 1\,512 = 42 \cdot 36$
2	8	16	4	4	$24 \cdot 84 = 2\,016 = 42 \cdot 48$

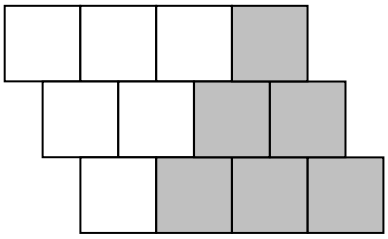
2	9	18	3	6	$23 \cdot 96 = 2\ 208 = 32 \cdot 69$
2	9	18	6	3	$26 \cdot 93 = 2\ 418 = 62 \cdot 39$
3	8	24	4	6	$34 \cdot 86 = 2\ 924 = 43 \cdot 68$
3	8	24	6	4	$36 \cdot 84 = 3\ 024 = 63 \cdot 48$
4	9	36	6	6	$46 \cdot 96 = 4\ 416 = 64 \cdot 69$

3. Kamilka si stavala pyramídu z kociek.. Najvyššie poschodie malo jednu kocku, pod ním 3 x 3, nižšie 5 x 5, 7 x 7 atď. Povrch jednej kocky je 6 dm^2, celá pyramída bola vysoká jeden meter. Aký povrch má celá pyramída? Plocha, ktorou pyramída leží na zemi, sa neráta.

Riešenie: Keďže povrch jednej kocky je 6 dm^2, dĺžka hrany kocky musí byť 1 dm, pretože povrch kocky s hranou dĺžky a vypočítame ako $6a^2$. A ak má platiť $6a^2 = 6$, tak musí platiť $a = 1$, pretože dĺžka je nezáporná. Potom výška pyramídy v decimetroch predstavuje počet jej poschodí. Keďže výška pyramídy je jeden meter, musí mať 10 poschodí.

Na pyramídu sa môžeme pozrieť z piatich strán, keďže spodná stena sa neráta. Zo štyroch bočných pohľadov vyzerá pyramída rovnako. Celkový povrch pyramídy potom pozostáva z 5 častí – z jednotlivých bočných strán (tie sú štyri a sú rovnaké) a z povrchu vodorovných častí.

Štyri bočné strany predstavujú „hranaté trojuholníky“, ktoré sú tvorené 1, 3, 5, ..., 19 štvorcami vedľa seba (počet štvorcov sa rovná počtu kociek v danom poschodí a určíme ho ako dvojnásobok poradia poschodia od vrchu zmenšený o jednotku, pretože ľahko overíme, že v prvom, druhom či treťom poschodí to platí, a keď ideme o jedno poschodie ďalej, tak sa počet kociek v ňom zvýši o dve).



Ak priložíme dva hranaté trojuholníky k sebe a jeden otočíme o 180°, dostaneme „hranatý rovnobežník“, ktorý bude mať 10 poschodí a v každom z nich bude 20 štvorcov. To znamená, že je tvorený $10 \cdot 20 = 200$ jednotkovými štvorcami. Keďže hranaté trojuholníky máme štyri, dostávame dva hranaté rovnobežníky. Ich spoločný obsah potom bude 400 dm^2.

Keď sa pozrieme na pyramídu zhora, uvidíme štvorec 19 dm x 19 dm. Jeho obsah je $(19\ \mathrm{dm})^2 = 361\ \mathrm{dm}^2$. Sčítaním čiastkových výsledkov dostávame, že povrch pyramídy je 761 dm^2.

4. Koľko existuje takých päťciferných čísel, že sa v nich vyskytuje číslica 2 presne štyrikrát a 0 nie je na prvom mieste?

Riešenie: Keďže sa v čísle vyskytujú práve štyri číslice 2 a číslo je päťciferné, práve jedna číslica bude rôzna od dvojky. Ak je táto číslica na prvom mieste, máme pre ňu 8 možností, pretože 0 ani 2 nemôžeme použiť. Ak bude na zvyšných štyroch miestach, v každom prípade dostaneme 9 možností, pretože tam už môžeme použiť aj číslicu 0. Celkovo teda dostávame $8+9+9+9=44$ čísel, ktoré spĺňajú stanovené požiadavky.

5. Peter s Jurajom si vymysleli novú hru s kolkami, pretože ich už nebavili klasické pravidlá. Postavili vedľa seba 13 kolkov a zo vzdialenosti 5 metrov ich zhadzovali pomocou kopania do futbalovej lopty. Vyhrá ten, kto zhodí posledný kolok, alebo ten, ktorého súper nezhodí ani jeden z kolkov, ktoré ešte stoja. Vzhľadom na vzdialenosti medzi kolkami je možné v jednom kole zhodiť maximálne dva kolky (ak práve dva, tak susedné). Keďže sú aj dobrí futbalisti, vždy trafia to, čo si zaumienia. Peter trafil v prvom kole druhý kolok zľava. Ako má ďalej postupovať Juraj, aby určite vyhral?

Riešenie: Úlohu budeme riešiť pomocou tzv. vyhrávajúcich a prehrávajúcich pozícií. Vyhrávajúca pozícia je tá, pri ktorej existuje taká stratégia pre hráča na ťahu, že pri ľubovoľnej hre súpera dokáže vyhrať. Prehrávajúca pozícia je tá, pri ktorej pri ľubovoľnej hre hráča na ťahu dokáže druhý hráč hrať tak, že vyhrá. Je zrejmé, že ak je niektorá pozícia vyhrávajúca pre jedného hráča, tak je prehrávajúca pre druhého a naopak. Ľahko nahliadneme, že vyhrávajúca pozícia sa vykonaním správneho trafenia (môže ich byť aj viac) prvým hráčom mení na prehrávajúcu pre druhého hráča, a pri ľubovoľnom trafení v prehrávajúcej pozícii sa pozícia zmení na vyhrávajúcu pre druhého hráča.

Na zjednodušenie zápisu jednotlivých situácií budeme používať zápis $x - y - \ldots - z$, ktorý bude označovať, že zľava stojí práve x kolkov, potom je vedľa nich aspoň jeden zhodený (ak ich je zhodených viac vedľa seba, používame stále jedinú pomlčku), ďalej je práve y kolkov vedľa seba, vedľa nich aspoň jeden zhodený, ..., na konci je z kolkov sprava. Na začiatku máme situáciu, ktorú charakterizujeme číslom 13. Po prvom Petrovom kole sme dostali situáciu 1 – 11. Ľahko nahliadneme, že nie je dôležité poradie, v ktorom sú počty kolkov medzi pomlčkami, pretože v jednom ťahu sa môžu zhadzovať len kolky v jednom súvislom úseku kolkov. Jednotlivé zhadzovania budeme ďalej nazývať ťahmi. Hráč, ktorý je na ťahu, bude tzv. prvý hráč.

Postupne si budeme budovať zoznam víťazných a prehrávajúcich pozícií:

1, 2: Víťazné pozície. Stačí zhodiť tento kolok/dva susedné kolky.

$n - n$: Prehrávajúca pozícia. Prvý hráč môže urobiť ľubovoľný ťah a druhý hráč zrkadlovo zopakuje tento ťah na druhej polovici kolkov. To môže urobiť vždy, pretože obe časti sú na začiatku symetrické. To znamená, že posledný ťah urobí druhý hráč, a teda prvý hráč prehrá.
$n - n - 1$, $n - n - 2$: Vyhrávajúce pozície. Prvý hráč odstráni 1, resp. 2 kolky z poslednej skupiny a pripraví prehrávajúcu pozíciu $n - n$ pre druhého hráča.
$n - (n + 1)$, $n - (n + 2)$: Vyhrávajúce pozície. Prvý hráč odstráni 1, resp. 2 kolky z poslednej skupiny a pripraví prehrávajúcu pozíciu $n - n$ pre druhého hráča.
$2n + 1$: Víťazná pozícia. Stačí zhodiť stredný kolok, pretože po jeho zhodení dostaneme prehrávajúcu pozíciu $n - n$.
$2n$: Víťazná pozícia. Stačí zhodiť dva stredné kolky (n-tý a $(n + 1)$-vý zľava), pretože po ich zhodení dostaneme prehrávajúcu pozíciu $(n - 1) - (n - 1)$.
$1 - 2$: Víťazná pozícia. Prvý hráč zhodí jeden kolok z dvoch, ktoré sú vedľa seba. Tým transformoval pozíciu pre druhého hráča na $1 - 1$, o ktorej vieme, že je prehrávajúca.
$1 - 3$: Víťazná pozícia. Prvý hráč zhodí dva susedné kolky z troch. Tým transformoval pozíciu pre druhého hráča na $1 - 1$, o ktorej vieme, že je prehrávajúca.
$1 - 4$: Prehrávajúca pozícia. Ak prvý hráč zhodí jeden kolok z jedného, dostane pozíciu 4 pre druhého hráča, ktorá je výherná. Zo štyroch kolkov môže zhodiť buď jeden – dostane pozíciu $1 - 3$ (jeden krajný) alebo $1 - 1 - 2$ (nie krajný), alebo dva – dostane pozíciu $1 - 2$ (krajné dva) alebo $1 - 1 - 1$ (stredné dva). Všetko to sú víťazné pozície, preto pozícia $1 - 4$ je prehrávajúca.

V ďalšom texte skrátime zápis a budeme uvádzať len pozície, ku ktorým daný ťah vedie – buď je to zníženie jedného z čísel x, y, ..., z o 1 alebo o 2 (predstavuje zhodenie jedného alebo dvoch kolkov skraja), alebo rozdelenie niektorého čísla $č$ na dve tak, že ich súčet sa rovná $č - 1$ alebo $č - 2$ (zhodenie jedného alebo dvoch kolkov, ktoré nie sú na kraji). Pre prehľadnosť budeme pozície zapisovať vo vzostupnom poradí čísel.
$n - n - m - m$: Prehrávajúca pozícia. Prvý hráč môže urobiť ľubovoľný ťah (buď na úseku dlhom n alebo m kolkov) a druhý hráč zrkadlovo zopakuje tento ťah na rovnakej časti kolkov. To môže urobiť vždy, pretože obe časti dlhé n/m kolkov sú na začiatku symetrické. Preto posledný ťah urobí druhý hráč, a teda prvý hráč prehrá.
$n - n - m - m - 1$, $n - n - m - m - 2$: Vyhrávajúce pozície. Prvý hráč odstráni 1, resp. 2 samostatné kolky a pripraví prehrávajúcu pozíciu $n - n - m - m$ pre druhého hráča.
$n - n - m - (m + 1)$, $n - n - m - (m + 2)$: Vyhrávajúce pozície. Prvý hráč odstráni jeden, resp. dva krajné kolky z poslednej skupiny a pripraví prehrávajúcu pozíciu $n - n - m - m$ pre druhého hráča.

$n - n - (2m + 1)$, $n - n - 2m$: Vyhrávajúce pozície. Prvý hráč odstráni stredný alebo dva stredné kolky z poslednej skupiny podľa jej parity a pripraví prehrávajúcu pozíciu $n - n - m - m$, resp. $n - n - (m - 1) - (m - 1)$ pre druhého hráča. To znamená, že vo všeobecnosti pozícia $n - n - o$ je vyhrávajúca.

$n - n - m - m - o - o$: Prehrávajúca pozícia. Analogicky sa budú robiť symetrické ťahy ako v pozícii typu $n - n - m - m$.

$n - n - m - m - o - (o + 1)$, $n - n - m - m - o - (o + 2)$: Vyhrávajúca pozícia. Prvý hráč odstráni jeden, resp. dva krajné kolky z poslednej skupiny a pre druhého hráča pripraví prehrávajúcu pozíciu $n - n - m - m - o - o$.

1 – 2 – 3: Prehrávajúca pozícia. Po ťahu prvého hráča môžu ostať tieto pozície: 2 – 3, 1 – 3, 1 – 1 – 3, 1 – 2 – 2, 1 – 1 – 2, 1 – 1 – 1 – 2. Vzhľadom na vyššie uvedené ide o vyhrávajúce pozície, a teda táto pozícia je prehrávajúca.

2 – 5: Vyhrávajúca pozícia. Zhodením 2. kolku skraja z piatich dostávame pozíciu 1 – 2 – 3, ktorá je prehrávajúca.

2 – 6: Vyhrávajúca pozícia. Zhodením 2. a 3. kolku skraja zo šiestich dostávame pozíciu 1 – 2 – 3, ktorá je prehrávajúca.

1 – 7: Vyhrávajúca pozícia. Zhodením 3. a 4. kolku skraja zo siedmich dostávame pozíciu 1 – 2 – 3, ktorá je prehrávajúca.

1 – 2 – 4, 1 – 2 – 5: Vyhrávajúca pozícia. Zhodením krajného kolku zo štyroch, resp. dvoch krajných z piatich, dostávame pozíciu 1 – 2 – 3, ktorá je prehrávajúca.

1 – 1 – 1 – 4: Prehrávajúca pozícia. Po ťahu prvého hráča môžu ostať tieto pozície: 1 – 1 – 4, 1 – 1 – 1 – 3, 1 – 1 – 1 – 1 – 2, 1 – 1 – 1 – 1 – 1. Vzhľadom na vyššie uvedené ide o vyhrávajúce pozície, a teda táto pozícia je prehrávajúca.

1 – 1 – 7: Vyhrávajúca pozícia: Zhodením 2. a 3. kolku skraja zo siedmich dostávame pozíciu 1 – 1 – 1 – 4, ktorá je prehrávajúca.

2 – 7: Prehrávajúca pozícia: Po ťahu prvého hráča môžu ostať tieto pozície: 1 – 7, 7, 2 – 6, 2 – 5, 1 – 2 – 5, 1 – 2 – 4, 2 – 2 – 4, 2 – 2 – 3, 2 – 3 – 3. Vzhľadom na vyššie uvedené ide o vyhrávajúce pozície, a teda táto pozícia je prehrávajúca.

3 – 7: Víťazná pozícia. Po odobratí jedného krajného kolku z troch dostávame prehrávajúcu pozíciu 2 – 7.

1 – 2 – 7: Víťazná pozícia. Po odobratí jedného samostatného kolku dostávame prehrávajúcu pozíciu 2 – 7.

1 – 1 – 1 – 1 – 3: Víťazná pozícia. Po odobratí stredného kolku z troch dostávame prehrávajúcu pozíciu 1 – 1 – 1 – 1 – 1 – 1.

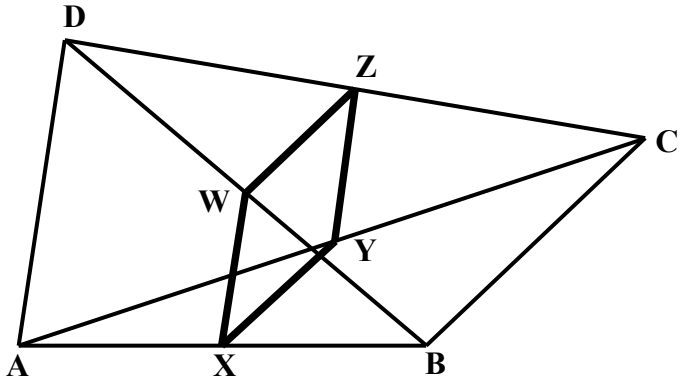
1 – 3 – 5: Vyhrávajúca pozícia: Po odobratí 2. a 3. kolku z piatich dostávame prehrávajúcu pozíciu 1 – 1 – 3 – 3.

1 – 3 – 6: Vyhrávajúca pozícia: Po odobratí 2. a 3. kolku zo šiestich dostávame prehrávajúcu pozíciu 1 – 1 – 3 – 3.
1 – 1 – 1 – 2 – 3: Prehrávajúca pozícia: Po ťahu prvého hráča môžu ostať tieto pozície: 1 – 1 – 2 – 3, 1 – 1 – 1 – 1 – 3, 1 – 1 – 1 – 3, 1 – 1 – 1 – 2 – 2, 1 – 1 – 1 – 1 – 2, 1 – 1 – 1 – 1 – 1 – 2. Vzhľadom na vyššie uvedené ide o vyhrávajúce pozície, a teda táto pozícia je prehrávajúca.
1 – 2 – 3 – 4: Vyhrávajúca pozícia: Po odobratí 2. a 3. kolku zo štyroch dostávame prehrávajúcu pozíciu 1 – 1 – 1 – 2 – 3.
1 – 1 – 1 – 7: Vyhrávajúca pozícia: Po odobratí 3. a 4. kolku zo siedmich dostávame prehrávajúcu pozíciu 1 – 1 – 1 – 2 – 3.
1 – 3 – 7: Prehrávajúca pozícia: Po ťahu prvého hráča môžu ostať tieto pozície: 3 – 7, 1 – 2 – 7, 1 – 1 – 7, 1 – 1 – 1 – 7, 1 – 3 – 6, 1 – 3 – 5, 1 – 1 – 3 – 5, 1 – 1 – 3 – 4, 1 – 2 – 3 – 4, 1 – 2 – 3 – 3, 1 – 3 – 3 – 3. Vzhľadom na vyššie uvedené ide o vyhrávajúce pozície, a teda táto pozícia je prehrávajúca.

Keďže z pozície 1 – 11 sa vieme zhodením 4. kolku skraja z 11 dostať na pozíciu 1 – 3 – 7, je pozícia 1 – 11 vyhrávajúca a Juraj môže na základe vyššie uvedeného postupu vyhrať, keď zhodí 4. kolok skraja z 11.

6. Dokážte, že v štvoruholníku s nerovnobežnými protiľahlými stranami sú stredy uhlopriečok a stredy protiľahlých strán vrcholmi rovnobežníka.

Riešenie: Označme si štvoruholník zo zadania *ABCD*. Stredy úsečiek *AB*, *CD*, *AC*, *BD* označme postupne *X*, *Z*, *Y*, *W*.



Na základe vlastností stredných priečok v trojuholníku *ABD* vieme, že platí, že *WX* je rovnobežné s *AD*. Podobne z trojuholníka *ACD* dostávame, že *ZY* je rovnobežné s *AD*, teda *WX* je rovnobežné s *ZY*. Analogicky dostaneme, že *WZ* je rovnobežné s *XY*. Navyše platí

$$|WX| = \tfrac{1}{2}|AD| = |ZY|,$$
$$|XY| = \tfrac{1}{2}|BC| = |WZ|.$$

Aby bol štvoruholník $XYZW$ rovnobežníkom, stačí ukázať, že body X, Y, Z a W neležia na jednej priamke. Avšak priamka WX je rovnobežná s priamkou AD a priamka XY je rovnobežná s priamkou BC. Podľa zadania sú priamky AD a BC rôznobežné. Potom sú aj priamky XW a XY rôznobežné, a teda body X, Y, Z a W neležia na jednej priamke. Z toho vyplýva, že $XYZW$ je rovnobežníkom, čo sme chceli dokázať.