Korešpondenčná súťaž v školskom roku 2013/2014

Riešenia 1. série úloh korešpondenčnej súťaže

1. Janko, Anička a Peter sú súrodenci. V tomto roku má Anička dvakrát toľko rokov ako Janko. O tri roky bude mať Janko polovicu Petrovho veku a pred tromi rokmi mal Peter dvakrát toľko rokov ako Anička. Určte vek každého z nich.

Riešenie: Označme vek Janka ako x. Potom má Anička v tomto roku $2x$ rokov. O tri roky bude mať Janko $x + 3$ rokov, čo je polovica Petrovho veku. To znamená, že o tri roky bude mať Peter $2x + 6$ rokov, a teda tento rok má $2x + 3$ rokov a pred tromi rokmi mal $2x$ rokov. Anička mala pred tromi rokmi $2x - 3$ rokov. Keďže pred tromi rokmi mal Peter dvakrát toľko rokov ako Anička, musí platiť

$$2x \quad 2 \quad 2x \quad 3 ,$$

odkiaľ po úprave dostávame, že

$$x \quad 3.$$

To znamená, že Janko má tento rok 3 roky, Anička 6 rokov a Peter 9 rokov.

2. V košíku sú len dubáky a muchotrávky – spolu 30 húb. Keď vytiahneme ľubovoľných 12 húb z košíka, bude medzi nimi určite aspoň jeden dubák. Keď vytiahneme ľubovoľných 20 húb z košíka, bude medzi nimi určite aspoň jedna muchotrávka. Koľko je v košíku dubákov a koľko muchotrávok?

Riešenie: Keďže pri vytiahnutí 12 húb z košíka vytiahneme aspoň jeden dubák, maximálne 11 húb môžu byť muchotrávky (ak by ich bolo aspoň 12, tak môžeme vytiahnuť práve týchto 12 a medzi nimi nebude ani jeden dubák). Podobne dostaneme, že v košíku môže byť maximálne 19 dubákov, pretože pri vytiahnutí 20 húb už nájdeme aspoň jednu muchotrávku. To znamená, že v košíku je aspoň $11 + 19 = 30$ húb. Keďže húb je práve 30, jediné riešenie je 11 muchotrávok a 19 dubákov.

3. Nájdite dve päťciferné čísla, ktorých súčet dáva 123 456, pričom požadujeme, aby jeden zo sčítancov mal tri cifry rovnaké a aby sa medzi použitými ciframi nevyskytovala jednotka.

Riešenie: Táto úloha má veľmi veľa riešení, napríklad 99 999 + 23 457, 99 879 + + 23 577, 44 436 + 79 020. Dokonca aj za podmienky, že obe čísla majú po tri cifry rovnaké, existuje viacero riešení, napr. 44 456 + 79 000.

4. Pri otváraní športových hier nastupovali vlajkonosiči s vlajkami jednotlivých štátov. Pri prvej oslavnej salve nastúpila prvá skupina vlajkonosičov. Pri druhej salve nastúpili ďalší vlajkonosiči a zaradili sa tak, že medzi každých dvoch vlajkonosičov na štadióne sa postavil ďalší vlajkonosič. Pri ďalšej salve znova medzi každú dvojicu vlajkonosičov pristúpil ďalší. Po tretej salve stálo na ploche štadióna 113 vlajkonosičov. Koľko vlajkonosičov nastúpilo pri prvej salve?

Riešenie: Označme počet vlajkonosičov na začiatku pri prvej salve x. Pri druhej salve pribudlo o jedného menej (vedľa každého vlajkonosiča okrem toho, ktorý je najviac vpravo, sa vpravo postavil jeden nový), teda $x - 1$ vlajkonosičov, takže ich tam bolo $2x - 1$. Pri ďalšej salve pribudlo o jedného menej, teda $2x - 2$. To znamená, že ich tam bolo spolu $4x - 3$. Preto musí platiť $4x \quad 3 \quad 113$, odkiaľ dostávame, že $x \quad 29$. To znamená, že pri prvej salve nastúpilo 29 vlajkonosičov. Skúškou sa presvedčíme, že pri druhej salve nastúpilo 28 vlajkonosičov a bolo ich celkovo 57. Pri tretej salve nastúpilo ďalších 56 vlajkonosičov a bolo ich na ploche štadióna celkovo 113.

5. Kam treba dať vo výraze 5 000 – 4 999 + 4 998 – ... + 4 – 3 + 2 – 1) ľavú zátvorku, aby vyšiel výsledok 2 013?

Riešenie: Ak dáme ľavú zátvorku za plusom, tak je to to isté, ako keby sme žiadne zátvorky nemali. Daný výraz by sa potom rovnal súčtu 2 500 jednotiek, pretože rozdiel dvoch za sebou idúcich čísel sa rovná jednej, teda 2 500. Toto číslo sa však nerovná 2 013. Preto zátvorka musí byť umiestnená za mínusom. Označme si jej umiestnenie podľa toho, pred ktorým číslom sa nachádza. Keďže bude za mínusom, bude pred nepárnym číslom. Preto si túto pozíciu môžeme označiť ako $2k - 1$, kde k je prirodzené číslo:

$$5\,000 \quad 4\,999 \quad 4\,998 \quad \dots \quad 2k \quad 2k \quad 1 \quad 2k \quad 2 \quad 2k \quad 3 \quad \dots \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 .$$

V zátvorke potom dostaneme tento výraz:

$$2k \quad 1 \quad 2k \quad 2 \quad 2k \quad 3 \quad 2k \quad 4 \quad 2k \quad 5 \quad \dots \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 .$$

Rozdiely v zložených zátvorkách sa rovnajú jednej. Počet zložených zátvoriek sa rovná polovici počtu prirodzených čísel, ktoré sa nachádzajú od 1 po $2k - 2$. Tých je $2k - 2$, takže hodnota výrazov v zložených zátvorkách je

$$2k \quad 2 : 2 \quad k \quad 1.$$

Hodnota výrazu v okrúhlych zátvorkách preto bude

$$2k \quad 1 \quad k \quad 1 \quad 3k \quad 2.$$

Teraz sa pozrieme na výraz pred ľavou okrúhlou zátvorkou:

$$5\,000 \quad 4\,999 \quad 4\,998 \quad 4\,997 \quad \dots \quad 2k \quad 2 \quad 2k \quad 1 \quad 2k.$$

Analogicky dostaneme, že hodnota každej zloženej zátvorky je jedna a potrebujeme zistiť, koľko ich tam je. Ich počet sa rovná polovici počtu prirodzených čísel od $2k + 1$ po 5 000. Tých je

$$\frac{5\,000 \quad 2k \quad 1 \quad 1}{2} \quad 2\,500 \quad k.$$

Preto bude celkový súčet čísel pred okrúhlou zátvorkou

$$2\,500 \quad k \quad 2k \quad 2\,500 \quad k.$$

Celková hodnota výrazu zo zadania potom bude

$$2\,500 \quad k \quad 3k \quad 2 \quad 2\,502 \quad 2k.$$

To znamená, že musíme riešiť rovnicu

$$2\,502 \quad 2k \quad 2\,013,$$

riešením ktorej dostávame, že má platiť

$$2k \quad 489,$$

čo však nie je možné. Preto do daného výrazu v zadaní nie je možné umiestniť ľavú zátvorku tak, aby bola jeho hodnota 2 013.

6. Dvojciferné číslo nazývame „súčtosúčinové“, ak preň platí, že súčet jeho číslic so súčinom jeho číslic sa rovná tomuto číslu (napr. $39 = 3 + 9 + 3 \cdot 9$). Určte súčet všetkých súčtosúčinových čísel.

Riešenie: Uvažujme ľubovoľné dvojciferné súčtosúčinové číslo v tvare $10a + b$, kde a, b sú cifry a $a \quad 0$. Potom má platiť:

$$10a \quad b \quad a \quad b \quad ab.$$

Odčítaním $a + b$ od oboch strán rovnice dostávame, že platí

$$9a \quad ab,$$

odkiaľ prenesením $9a$ na druhú stranu rovnice a vyňatím a pred zátvorku dostávame, že platí

$$a \quad b \quad 9 \quad 0.$$

Keďže $a \quad 0$, musí platiť $b \quad 9$, teda ide o všetky dvojciferné čísla, ktoré majú na mieste jednotiek deviatku. Hľadaný súčet sa preto rovná

$$19 \quad 29 \quad \ldots \quad 99.$$

Tento súčet si ďalej upravíme a dostaneme, že platí:

$$19 \quad 29 \quad \ldots \quad 99 \quad 1\ 10 \quad 9 \quad 2\ 10 \quad 9 \quad \ldots \quad 9\ 10 \quad 9$$

$$9\ 9 \quad 10 \quad 1 \quad 2 \quad \ldots \quad 9 \quad 81 \quad 10\ 45 \quad 531.$$

Súčet všetkých súčtosúčinových čísel sa rovná 531.

Zadania 2. série úloh korešpondenčnej súťaže

1. Keď gepard začal prenasledovať antilopu, bola medzi nimi vzdialenosť 60 metrov. Antilopa unikala rýchlosťou 15 m/s, gepard ju dobehol za 12 sekúnd. Akou rýchlosťou bežal gepard?

2. Z 200 žiakov, ktorí podali prihlášku na gymnázium, bol prijatý každý druhý. Pritom bolo prijatých 35 % prihlásených dievčat a nebolo prijatých 40 % prihlásených chlapcov. Koľko chlapcov a dievčat sa hlásilo na gymnázium a koľko chlapcov a dievčat prijali?

3. V klobúku je päť loptičiek a na každej z nich je napísané práve jedno prirodzené číslo. Súčet čísel na loptičkách v klobúku je 27 a čísla na ľubovoľných dvoch loptičkách sa líšia aspoň o dva. Dokážte, že v klobúku nie je loptička s číslom 6.

4. Aký najväčší počet kráľov môžeme umiestniť na šachovnicu 8x8 tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali? Kráľ ohrozuje všetky políčka, ktoré susedia s políčkom, na ktorom sa nachádza. Na jednom políčku môže byť len jeden kráľ.

5. Ukážte, že prirodzené číslo n možno vyjadriť ako súčet štyroch po sebe idúcich prirodzených čísel práve vtedy, keď $n \quad 10$ a n dáva zvyšok 2 po delení štyrmi.

6. Dokážte, že pre ľubovoľné reálne čísla a, b platí nerovnosť $a^4 \quad b^4 \quad a^3b \quad ab^3$.

7. Dokážte, že z ľubovoľnej sedmice prirodzených čísel dokážeme vybrať dve také, ktorých súčet alebo rozdiel bude deliteľný desiatimi.

8. Predpokladajme, že každý bod roviny je ofarbený jednou z dvoch farieb. Dokážte, že potom pre jednu z týchto dvoch farieb platí, že pre každé kladné reálne číslo existuje dvojica bodov ofarbených touto farbou, ktorých vzdialenosť sa rovná tomuto číslu.

9. Dokážte, že číslo $2^{1092} - 1$ je deliteľné číslom 1093^2.

10. Nájdite všetky prirodzené čísla m, n, ktoré sú riešeniami rovnice $2^m - 3^n = 7$.

11. Zistite, či existuje množina 4 024 takých prirodzených čísel, že súčet čísel ľubovoľnej 2 013-prvkovej podmnožiny tejto množiny nie je deliteľný číslom 2 013.

12. Nech a, b, c sú kladné reálne čísla, ktorých súčin nie je väčší ako ich súčet. Dokážte, že potom platí nerovnosť

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{3}abc.$$

13. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je definovaná predpisom $a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1}$, pričom $a_1 = 20$, $a_2 = 30$. Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré je $5a_{n+1}a_n + 1$ druhou mocninou celého čísla.

14. Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla n platí nasledujúca nerovnosť:

$$\left(2n^2 + 3n + 1\right)^n \geq 6^n \cdot \left(n!\right)^2$$

Termín odoslania riešení úloh 2. série: do 28. 2. 2014

Riešenia zasielajte na adresu:

Ing. Mgr. Martin Hriňák
MATMIX
Bratislavská 716/2
900 46 Most pri Bratislave