Zadania 1. série úloh korešpondenčnej súťaže

1. Učiteľka hovorí žiakom v triede: „Keby som dala každému z vás 7 jabĺk, zostalo by mi 24 jabĺk. Ale keby som vám chcela dať po 9 jabĺk, chýbalo by mi 32 jabĺk.“ Koľko má učiteľka jabĺk a koľko žiakov v triede?

2. Súčet číslic dvojciferného čísla je 12. Keď číslicu na mieste desiatok násobíme dvoma, číslicu na mieste jednotiek troma a súčiny sčítame, dostaneme číslo 29. Aké bolo pôvodné číslo?

3. Klobúk, plášť a čižmy stoja dokopy 137 €. Určte, koľko stojí každý kus oblečenia, ak plášť je šesťkrát drahší ako klobúk a čižmy sú o 20 € drahšie ako plášť.

4. V minulosti sa na našom území používali rôzne platidlá, ktorých používanie bolo náročnejšie ako v súčasnosti. Mohli ste sa stretnúť so zlatými, zlatkami, toliarmi, dukátmi, grošmi, denármi, grajciarmi a inými menami. Ako už názov hovorí, boli to zlaté, ale aj strieborné či medené mince. Obsah drahých kovov sa postupne v týchto minciach zmenšoval, čo znižovalo aj ich hodnotu. Aj preto sa častokrát na trhoch neplatilo len mincami, ale aj v naturáliách. Napríklad za osem lyžíc ste mohli vymeniť tri taniere. Ak ste však mali mince, mohli ste si za jeden zlatý kúpiť tri krčahy a desať lyžíc. Pri platbe za päť krčahov, päť tanierov a desať lyžíc ste z platby dvoma zlatými dostali výdavok desať grajciarov.

a) Určte, koľko grajciarov stojí jedna lyžica, jeden tanier a jeden krčah, ak viete, že päť tanierov stojí o jedenásť grajciarov viac ako šesť lyžíc.
b) Určte, koľko grajciarov dostanete za jeden zlatý.

5. Ukážte, že prirodzené číslo n možno vyjadriť ako súčet štyroch po sebe idúcich prirodzených čísel práve vtedy, keď $n \geq 10$ a n dáva zvyšok 2 po delení štyrmi.

6. Dokážte, že pre ľubovoľné reálne čísla a, b platí nerovnosť $a^4 + b^4 \geq a^3 b + ab^3$.

7. Dokážte, že z ľubovoľnej sedmice prirodzených čísel dokážeme vybrať dve také, ktorých súčet alebo rozdiel bude deliteľný desiatimi.

8. Predpokladajme, že každý bod roviny je ofarbený jednou z dvoch farieb. Dokážte, že potom pre jednu z týchto dvoch farieb platí, že pre každé kladné reálne číslo existuje dvojica bodov ofarbených touto farbou, ktorých vzdialenosť sa rovná tomuto číslu.

9. Dokážte, že číslo $2^{1092}-1$ je deliteľné číslom 1093^2.

10. Nájdite všetky prirodzené čísla *m*, *n*, ktoré sú riešeniami rovnice $2^m-3^n=7$.

11. Zistite, či existuje množina 4 024 takých prirodzených čísel, že súčet čísel ľubovoľnej 2 013-prvkovej podmnožiny tejto množiny nie je deliteľný číslom 2 013.

12. Nech *a*, *b*, *c* sú kladné reálne čísla, ktorých súčin nie je väčší ako ich súčet. Dokážte, že potom platí nerovnosť

$$a^2+b^2+c^2\geq\sqrt{3}abc.$$

13. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je definovaná predpisom $a_{n+1}=3a_n-a_{n-1}$, pričom $a_1=20$, $a_2=30$. Nájdite všetky prirodzené čísla *n*, pre ktoré je $5a_{n+1}a_n+1$ druhou mocninou celého čísla.

14. Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla *n* platí nasledujúca nerovnosť:

$$\left(2n^2+3n+1\right)^n\geq 6^n\cdot\left(n!\right)^2$$

Termín odoslania riešení úloh 1. série: do 18. 11. 2014

Riešenia zasielajte na adresu:

APROMOD, s. r. o.
MATMIX
Bratislavská 716/2
900 46 Most pri Bratislave