Korešpondenčná súťaž v školskom roku 2014/2015

Riešenia 1. série úloh korešpondenčnej súťaže

1. Učiteľka hovorí žiakom v triede: „Keby som dala každému z vás 7 jabĺk, zostalo by mi 24 jabĺk. Ale keby som vám chcela dať po 9 jabĺk, chýbalo by mi 32 jabĺk.“ Koľko má učiteľka jabĺk a koľko žiakov v triede?

Riešenie: Označme počet žiakov v triede p a počet jabĺk j. Potom musí platiť:

$$7p + 24 = j,$$
$$9p - 32 = j.$$

Spojením týchto dvoch rovníc dostávame, že musí platiť

$$7p + 24 = 9p - 32.$$

Túto rovnicu si upravíme na tvar $2p = 56$, odkiaľ dostávame, že $p = 28$. Dosadením tejto hodnoty do prvej rovnice dostávame, že platí

$$j = 7 \cdot 28 + 24 = 220.$$

To znamená, že v triede je 28 žiakov a učiteľka mala 220 jabĺk.

2. Súčet číslic dvojciferného čísla je 12. Keď číslicu na mieste desiatok násobíme dvoma, číslicu na mieste jednotiek troma a súčiny sčítame, dostaneme číslo 29. Aké bolo pôvodné číslo?

Riešenie: Označme si dvojciferné číslo $\overline{ab}$, kde a a b sú cifry, pričom a nie je 0. Potom na základe zadania musí platiť:

$$a + b = 12,$$
$$2a + 3b = 29.$$

Z prvej rovnice dostávame, že platí $a = 12 - b$. Toto vyjadrenie dosadíme do druhej rovnice. Postupne dostaneme, že platí

$$2 \cdot (12 - b) + 3b = 29,$$
$$24 - 2b + 3b = 29,$$
$$b = 5.$$

Dosadením tejto hodnoty do rovnice $a = 12 - b$ dostaneme, že platí

$$a = 12 - 5 = 7,$$

teda hľadané číslo je 75.

3. Klobúk, plášť a čižmy stoja dokopy 137 €. Určte, koľko stojí každý kus oblečenia, ak plášť je šesťkrát drahší ako klobúk a čižmy sú o 20 € drahšie ako plášť.

Riešenie: Označme cenu klobúka k, plášťa p a čižiem $č$. Potom musí na základe zadania platiť:

$$k + p + č = 137,$$
$$p = 6k,$$
$$č = p + 20.$$

Dosadením druhej rovnice do tretej dostaneme, že platí $č = 6k + 20$. Teraz dosadíme toto vyjadrenie $č$ spolu s druhou rovnicou do prvej a dostaneme, že platí

$$k + 6k + (6k + 20) = 137.$$

Túto lineárnu rovnicu vyriešime a dostaneme, že platí

$$13k = 117,$$
$$k = 9.$$

Dosadením hodnoty $k = 9$ do vyššie uvedených rovníc pre p a $č$ dostaneme, že platí

$$p = 6k = 6 \cdot 9 = 54,$$
$$č = p + 20 = 54 + 20 = 74.$$

Celkovo dostávame, že klobúk stojí 9 €, plášť 54 € a čižmy 74 €.

4. V minulosti sa na našom území používali rôzne platidlá, ktorých používanie bolo náročnejšie ako v súčasnosti. Mohli ste sa stretnúť so zlatými, zlatkami, toliarmi, dukátmi, grošmi, denármi, grajciarmi a inými menami. Ako už názov hovorí, boli to zlaté, ale aj strieborné či medené mince. Obsah drahých kovov sa postupne v týchto minciach zmenšoval, čo znižovalo aj ich hodnotu. Aj preto sa častokrát na trhoch neplatilo len mincami, ale aj v naturáliách. Napríklad za osem lyžíc ste mohli vymeniť tri taniere. Ak ste však mali mince, mohli ste si za jeden zlatý kúpiť tri krčahy a desať lyžíc. Pri platbe za päť krčahov, päť tanierov a desať lyžíc ste z platby dvoma zlatými dostali výdavok desať grajciarov.

a) Určte, koľko grajciarov stojí jedna lyžica, jeden tanier a jeden krčah, ak viete, že päť tanierov stojí o jedenásť grajciarov viac ako šesť lyžíc.

b) Určte, koľko grajciarov dostanete za jeden zlatý.

Riešenie: Na základe zadania sformulujeme sústavu štyroch rovníc s piatimi neznámymi l (cena lyžice v grajciaroch), t (cena taniera v grajciaroch), k (cena krčaha v grajciaroch), z (hodnota zlatého v grajciaroch) a g (hodnota jedného grajciara):

$$8l = 3t, \tag{1}$$
$$3k + 10l = z, \tag{2}$$
$$5t = 6l + 11g, \tag{3}$$
$$5k + 5t + 10l = 2z - 10g. \tag{4}$$

Dosadením vyjadrenia z z rovnice (2) do rovnice (4) dostaneme, že platí

$$5k + 5t + 10l = 2\left(3k + 10l\right) - 10g,$$

čo upravíme na tvar

$$5t = k + 10l - 10g. \tag{5}$$

Z rovnice (1) dostávame po prenásobení 5, že platí

$$40l = 15t. \tag{6}$$

Ak prenásobíme rovnicu (3) troma, dostávame, že platí

$$15t = 18l + 33g. \tag{7}$$

Porovnaním rovníc (6) a (7) dostávame, že platí

$$40l = 18l + 33g,$$

odkiaľ dostaneme, že

$$22l = 33g,$$

čo znamená, že

$$l = 1{,}5g. \tag{8}$$

Dosadením (8) do (3) dostávame, že platí

$$5t = 6 \cdot 1{,}5g + 11g,$$

teda

$$5t = 20g,$$

odkiaľ dostávame, že platí

$$t = 4g. \tag{9}$$

Dosadením (8) a (9) do (5) dostávame, že platí

$$5 \cdot 4g = k + 10 \cdot 1{,}5g - 10g,$$

odkiaľ po úprave dostaneme, že platí

$$15g = k. \tag{10}$$

Dosadením (8) a (10) do (2) dostávame, že platí

$$3 \cdot 15g + 10 \cdot 1{,}5g = z,$$

odkiaľ po úprave dostaneme, že platí

$$60g = z.$$

Celkovo dostávame, že jedna lyžica stojí jeden a pol grajciara, jeden tanier stojí štyri grajciare, jeden krčah stojí 15 grajciarov a jeden zlatý má hodnotu 60 grajciarov.

5. Ukážte, že prirodzené číslo n možno vyjadriť ako súčet štyroch po sebe idúcich prirodzených čísel práve vtedy, keď $n \geq 10$ a n dáva zvyšok 2 po delení štyrmi.

Riešenie: Predpokladajme, že prirodzené číslo n možno vyjadriť ako súčet štyroch po sebe idúcich prirodzených čísel. Potom musí existovať nejaké prirodzené číslo k, pre ktoré platí

$$n = k + (k+1) + (k+2) + (k+3),$$

teda

$$n = 4k + 6 = 4 \cdot (k+1) + 2,$$

teda číslo n dáva zvyšok 2 po delení štyrmi. Najmenšie také prirodzené číslo je

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10,$$

a teda platí $n \geq 10$.

Teraz predpokladajme, že $n \geq 10$ a n dáva zvyšok 2 po delení štyrmi. Potom existuje také prirodzené číslo k, že platí

$$n = 4k + 2.$$

Keďže platí $n \geq 10$, musí platiť $4k + 2 \geq 10$, teda $k \geq 2$. Prirodzené číslo n môžeme zapísať v tvare súčtu

$$n = 4k + 2 = (k-1) + (k) + (k+1) + (k+2).$$

Keďže $k \geq 2$, všetky čísla na pravej strane sú prirodzené, a teda prirodzené číslo n sme vyjadrili ako súčet štyroch po sebe idúcich prirodzených čísel.

Na základe týchto dvoch implikácií môžeme povedať, že platí ekvivalencia, a teda platí, že prirodzené číslo n možno vyjadriť ako súčet štyroch po sebe idúcich prirodzených čísel práve vtedy, keď $n \geq 10$ a n dáva zvyšok 2 po delení štyrmi.

6. Dokážte, že pre ľubovoľné reálne čísla a, b platí nerovnosť $a^4 + b^4 \geq a^3 b + a b^3$.

Riešenie: Nerovnosť zo zadania budeme postupne upravovať ekvivalentnými úpravami:

$$\begin{aligned} a^4 - a^3 b + b^4 - a b^3 &\geq 0, \\ a^3 \cdot (a-b) + b^3 \cdot (b-a) &\geq 0, \\ a^3 \cdot (a-b) - b^3 \cdot (a-b) &\geq 0, \\ (a^3 - b^3) \cdot (a-b) &\geq 0. \end{aligned}$$

Ak platí $a \geq b$, tak potom platí aj $a^3 \geq b^3$, a teda na ľavej strane dostávame súčin dvoch nezáporných čísel, ktorý je nezáporný, a teda nerovnosť platí. Ak platí $a < b$, tak potom platí aj $a^3 < b^3$, a teda na ľavej strane dostávame súčin dvoch záporných čísel, ktorý je kladný, a teda nerovnosť platí tiež. Keďže sme používali len ekvivalentné úpravy a iné prípady ako vyššie uvedené nemôžu nastať, dokázali sme danú nerovnosť.