APROMOD

Ročník: 20
Číslo: 2
Šk. rok: 2014/2015

Matematický časopis pre žiakov základných a stredných škôl



Matematika je hudbou rozumu... Muzikant cíti matematicky, matematik myslí hudobne. Hudba je sen, matematika je skutočný život.

James Sylvester

Redakčná pošta

Milí čitatelia,

predvianočný čas je zvyčajne obdobím zhonu, počas ktorého sa venujeme zháňaniu darčekov, upratovaniu a iným súvisiacim činnostiam. Po tomto rušnom období však prichádza čas dlhších prázdnin, počas ktorých sa môžete venovať aj riešeniu matematických úloh.

V tomto čísle časopisu vám prinášame zadania druhej série našej korešpondenčnej súťaže. Vo výsledkovej listine uvádzame len riešiteľov, ktorí získali aspoň 10 bodov. Na dlhé zimné večery prinášame aj 21 číselných úloh pre rok 2014. Okrem nich vám prinášame aj niekoľko riešených úloh – o hokeji, včelách či niekoľko školských úloh riešených matematickým prieskumom s množstvom odporúčanej matematickej literatúry na konci článku.

Z histórie matematiky si môžete prečítať článok o Jamesovi Sylvestrovi – matematikovi hrdom na svoju poéziu. Niekoľko citátov známych i menej známych osobností o matematike nájdete v článku O matematike s filozofickým nádychom.

Prajem vám príjemné prežitie vianočných sviatkov.

Martin Hriňák

James Sylvester – matematik hrdý na svoju poéziu

Plán krásy



Na svete neexistuje taká veda, ktorá dáva do pohybu toľko harmónie ako matematika. Vtipným mužom, ktorý očakával veľkú symbolickú jednotu všetkých matematických disciplín, bol J. J. Sylvester (1814 – 1897), anglický matematik, stelesnená predstava toho, kto žije medzi ideálnymi číslami, vysoko nad problémami všedného dňa. *Svet nápadov, ktorý matematika obsahuje, je oslavou božskej krásy. Spôsob, akým matematika spája všetky svoje časti, je nekonečný poriadok a absolútny dôkaz pravdy, ktorou sa zaoberá. Matematika je najistejšia pôda pre ľudstvo. Zostane nedotknuteľná, až kým sa plán univerza, ktorý sa rozprestiera pod našimi nohami ako mapa, nestane súčasťou ľudskej mysle.*

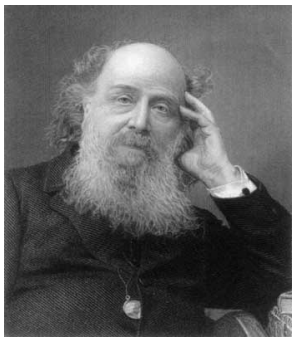
Osudy žitia

V londýnskej židovskej rodine sa **3. septembra 1814** narodil **James Joseph Sylvester**. Po absolvovaní základnej školy navštevoval strednú školu v Liverpoole. V rokoch 1831 – 1837 študoval na St. John´s College v Cambridgei. Potom učil fyziku na univerzite v Londýne. *Objektom čistej fyziky je sledovanie zákonov sveta, objektom čistej matematiky je sledovanie ľudskej inteligencie*. V roku 1841 pôsobil polrok na univerzite vo Virgínii (USA). Po návrate do Anglicka študoval právo a#pracoval ako matematický štatistik v poisťovacej spoločnosti. Na súdnom dvore v Londýne sa zoznámil s A. Cayleym (1821 – 1895) a spolupracovali na rozvoji teórie matíc. Do profesionálnej matematiky sa Sylvester vrátil ako profesor na Kráľovskej vojenskej akadémii vo Woolwichi (1854 – 1870). V rokoch 1877 – 1883 pôsobil na univerzite J. Hopkinsa v Baltimore (USA). Keď sa vrátil z Ameriky, učil v Oxforde na katedre geometrie. V roku 1892 sa vrátil (s poruchami zraku i pamäti) do Londýna, kde 15. marca 1897 zomrel.



Odborné úspechy

Za svoj dlhý život napísal Sylvester viac než 300 prác z algebry, teórie matíc a determinantov, teórie invariantov, pravdepodobnosti, mechaniky a matematickej fyziky. Spolu s A. Cayleym a G. Salmonom (1819 – 1904) vytvoril Sylvester spolok matematikov prezývaný „invariantná trojica“. Spolupracovali hlavne na základoch algebraickej teórie invariantov. Uznávali Sylvestrovo presvedčenie: *Matematika je hudbou rozumu... Muzikant cíti matematicky, matematik myslí hudobne. Hudba je sen, matematika je skutočný život.*



Sylvester položil základy teórie elementárnych deliteľov (1851), sformuloval zákon zotrvačnosti kvadratických foriem (1852). Bol úspešným tvorcom matematických termínov (napr. invariant, kovariant a pod.), zaviedol pojem matice, využíval teóriu matíc na štúdium viacrozmernej geometrie, študoval kanonické tvary kvadratických foriem. Prispel k rozvoju modernej matematiky v Amerike (v roku 1878 založil prvý americký matematický časopis). Roku 1881 dokázal, že pre každé dostatočne veľké prirodzené číslo n existuje prvočíslo p také, že platí $n < p < 1,092\,n$. Sylvester tak prispel k objasneniu problematiky Bertrandovej hypotézy.

Poet i hádankár



Mal rád riešenie vtipných problémov. Posielal do novín hádanky. S jeho menom je spojená aj táto úloha: *Z veľkého počtu poštových známok s hodnotami 5 a 17 sa dajú skladať rôzne hodnoty. Aká je najväčšia hodnota, ktorá sa nedá vytvoriť kombináciou týchto dvoch hodnôt?* Riešenie tejto úlohy nájdete v článku Školské úlohy riešené matematickým prieskumom.

Roztržitý profesor Sylvester mal rád aj poéziu, citlivo vnímal zákutia básnického umenia. Sám vydal *Zákony verša* a bol na toto literárne dielo aj príslušne hrdý. Pritom však zostal verný svojmu presvedčeniu, že *matematika zvyšuje ľudské schopnosti postupnými krokmi od začiatku k stále vyšším stupňom intelektuálnej existencie*.

Matematika je príležitosť

Matematika nie je kniha uzavretá do dosiek a zviazaná mosadznými sponami a na preskúmanie jej obsahu nestačí len trpezlivosť. Matematika nie je kniha, ktorá niekde začína a niekde končí…Nie je to baňa, ktorej poklady zapĺňa iba ohraničený počet žíl rudy, a trvá dlho, než sa ich zmocníme. Nie je to pôda, ktorej úrodnosť môže byť vyčerpaná úrodou mnohých žatiev, nie je to kontinent alebo oceán, ktorého územie

môže byť zmapované a hranice určené. Matematika je rovnako neohraničená ako priestor, ktorý je pre jej ctižiadosť príliš úzky. Jej možnosti sú rovnako nekonečné ako vzdialené svety, ktoré sa neustále objavujú a rozmnožujú pred zrakom astronóma. Je nemožné ich obmedziť vo vnútri daných hraníc alebo redukovať na definície trvalej platnosti rovnako, ako je to nemožné pri vedomí života. Jednoducho to vyjadril aj skratkou: *Matematika je skúmanie rozdielnosti v podobnom a podobnosti v rozdielnom.* James J. Sylvester, vtipný muž matematickej kultúry, tušil, že svet, v ktorom žijeme, je odrazom vyššej zmysluplnosti, ku ktorej sa vierou a rozumom približujeme. *Nepoznám lepšiu možnosť na podporu schopnosti modliť sa než štúdium matematiky.*

Dušan Jedinák

Číselné úlohy pre rok 2014

Ponúkame vám jednoduché i mierne podnetné úlohy, v ktorých hrá zaujímavú úlohu číslo 2014.

1. Stanovte súčet všetkých prirodzených párnych deliteľov čísla 2014.

2. Nájdite prirodzené čísla x, y, aby pre ne platilo $2 \cdot \left(x^2 - y^2\right) = 2014$.

3. Stanovte, koľko cifier potrebujeme na očíslovanie všetkých strán encyklopédie, ktorá má 2014 strán (číslujeme od 1, 2, 3, ..., 2014).

4. Píšeme za sebou čísla 1, 2, 3, ..., 134, 135, ... Použili sme 2014 číslic. Ktorú číslicu sme napísali poslednú?

5. Stanovte, koľko prirodzených čísiel od 1 do 2014 vrátane nie je deliteľných žiadnym z čísiel 2, 19, 53.

6. Stanovte počet prirodzených čísiel od 1 do 10^6, ktoré končia štvorčíslím 2014.

7. Stanovte, koľko prvočísiel menších než 2014 má ciferný súčet dva.

8. Stanovte ciferný súčet čísla $10^{2014} + 2014$ v jeho desiatkovom zápise.

9. Stanovte poslednú cifru čísla $2014^{2014} - 14$ v jeho desiatkovom zápise.

10. Stanovte prvú číslicu najmenšieho prirodzeného čísla, ktorého ciferný súčet je 2014.

11. Stanovte hodnotu výrazu
$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2012}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2013}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2014}\right).$$

12. Stanovte zvyšok po delení čísla 10^{2014} číslom 15.

13. Stanovte poslednú cifru desatinného rozvoja čísla 5^{2014}.

14. Stanovte poslednú číslicu čísla $3^{2012}\cdot 7^{2013}\cdot 13^{2014}$ v jeho desiatkovom zápise.

15. Zápis čísla K v desiatkovej sústave sa skladá z 2014 deviatok 999...999. Stanovte, koľko deviatok obsahuje desiatkový zápis čísla K^2.

16. Encyklopédia má očíslovaných 2014 strán (prirodzené čísla od 1 do 2014 vrátane). Stanovte, koľkokrát sa na týchto očíslovaných stránkach vyskytuje číslica 4.

17. Stanovte, koľko prirodzených čísiel menších než 10^{2014} má ciferný súčet 2.

18. Stanovte, koľko rôznych štvoríc prirodzených čísel $x<y<z<t$ je riešením rovnice $x\cdot y\cdot z\cdot t+12=2014$.

19. Nájdite všetky rôzne trojice prirodzených čísel $x<y<z$, ktoré sú riešením rovnice $x\cdot y\cdot z=2014$.

20. Máme napísané všetky prirodzené čísla od 1 do 2014 (vrátane). Ak z nich najprv označíme všetky, ktoré sú deliteľné dvomi, potom inou značkou označíme všetky čísla deliteľné tromi a na záver označíme zase inou značkou všetky čísla deliteľné štyrmi, stanovte, koľko z čísel na tabuli bude potom označených práve dvomi značkami.

21. Stanovte, koľko prirodzených čísiel menších než 10^{2014} má ciferný súčet 3.

Dušan Jedinák

Korešpondenčná súťaž v školskom roku 2014/2015

Riešenia 1. série úloh korešpondenčnej súťaže

1. Učiteľka hovorí žiakom v triede: „Keby som dala každému z vás 7 jabĺk, zostalo by mi 24 jabĺk. Ale keby som vám chcela dať po 9 jabĺk, chýbalo by mi 32 jabĺk.“ Koľko má učiteľka jabĺk a koľko žiakov v triede?

Riešenie: Označme počet žiakov v triede p a počet jabĺk j. Potom musí platiť:

$$7p + 24 = j,$$
$$9p - 32 = j.$$

Spojením týchto dvoch rovníc dostávame, že musí platiť

$$7p + 24 = 9p - 32.$$

Túto rovnicu si upravíme na tvar $2p = 56$, odkiaľ dostávame, že $p = 28$. Dosadením tejto hodnoty do prvej rovnice dostávame, že platí

$$j = 7 \cdot 28 + 24 = 220.$$

To znamená, že v triede je 28 žiakov a učiteľka mala 220 jabĺk.

2. Súčet číslic dvojciferného čísla je 12. Keď číslicu na mieste desiatok násobíme dvoma, číslicu na mieste jednotiek troma a súčiny sčítame, dostaneme číslo 29. Aké bolo pôvodné číslo?

Riešenie: Označme si dvojciferné číslo $\overline{ab}$, kde a a b sú cifry, pričom a nie je 0. Potom na základe zadania musí platiť:

$$a + b = 12,$$
$$2a + 3b = 29.$$

Z prvej rovnice dostávame, že platí $a = 12 - b$. Toto vyjadrenie dosadíme do druhej rovnice. Postupne dostaneme, že platí

$$2 \cdot (12 - b) + 3b = 29,$$
$$24 - 2b + 3b = 29,$$
$$b = 5.$$

Dosadením tejto hodnoty do rovnice $a = 12 - b$ dostaneme, že platí

$$a = 12 - 5 = 7,$$

teda hľadané číslo je 75.

3. Klobúk, plášť a čižmy stoja dokopy 137 €. Určte, koľko stojí každý kus oblečenia, ak plášť je šesťkrát drahší ako klobúk a čižmy sú o 20 € drahšie ako plášť.

Riešenie: Označme cenu klobúka k, plášťa p a čižiem $č$. Potom musí na základe zadania platiť:

$$k + p + č = 137,$$
$$p = 6k,$$
$$č = p + 20.$$

Dosadením druhej rovnice do tretej dostaneme, že platí $č = 6k + 20$. Teraz dosadíme toto vyjadrenie $č$ spolu s druhou rovnicou do prvej a dostaneme, že platí

$$k + 6k + (6k + 20) = 137.$$

Túto lineárnu rovnicu vyriešime a dostaneme, že platí

$$13k = 117,$$
$$k = 9.$$

Dosadením hodnoty $k = 9$ do vyššie uvedených rovníc pre p a $č$ dostaneme, že platí

$$p = 6k = 6 \cdot 9 = 54,$$
$$č = p + 20 = 54 + 20 = 74.$$

Celkovo dostávame, že klobúk stojí 9 €, plášť 54 € a čižmy 74 €.

4. V minulosti sa na našom území používali rôzne platidlá, ktorých používanie bolo náročnejšie ako v súčasnosti. Mohli ste sa stretnúť so zlatými, zlatkami, toliarmi, dukátmi, grošmi, denármi, grajciarmi a inými menami. Ako už názov hovorí, boli to zlaté, ale aj strieborné či medené mince. Obsah drahých kovov sa postupne v týchto minciach zmenšoval, čo znižovalo aj ich hodnotu. Aj preto sa častokrát na trhoch neplatilo len mincami, ale aj v naturáliách. Napríklad za osem lyžíc ste mohli vymeniť tri taniere. Ak ste však mali mince, mohli ste si za jeden zlatý kúpiť tri krčahy a desať lyžíc. Pri platbe za päť krčahov, päť tanierov a desať lyžíc ste z platby dvoma zlatými dostali výdavok desať grajciarov.

a) Určte, koľko grajciarov stojí jedna lyžica, jeden tanier a jeden krčah, ak viete, že päť tanierov stojí o jedenásť grajciarov viac ako šesť lyžíc.

b) Určte, koľko grajciarov dostanete za jeden zlatý.

Riešenie: Na základe zadania sformulujeme sústavu štyroch rovníc s piatimi neznámymi l (cena lyžice v grajciaroch), t (cena taniera v grajciaroch), k (cena krčaha v grajciaroch), z (hodnota zlatého v grajciaroch) a g (hodnota jedného grajciara):

$$8l = 3t, \tag{1}$$
$$3k + 10l = z, \tag{2}$$
$$5t = 6l + 11g, \tag{3}$$
$$5k + 5t + 10l = 2z - 10g. \tag{4}$$

Dosadením vyjadrenia z z rovnice (2) do rovnice (4) dostaneme, že platí

$$5k + 5t + 10l = 2\left(3k + 10l\right) - 10g,$$

čo upravíme na tvar

$$5t = k + 10l - 10g. \tag{5}$$

Z rovnice (1) dostávame po prenásobení 5, že platí

$$40l = 15t. \tag{6}$$

Ak prenásobíme rovnicu (3) troma, dostávame, že platí

$$15t = 18l + 33g. \tag{7}$$

Porovnaním rovníc (6) a (7) dostávame, že platí

$$40l = 18l + 33g,$$

odkiaľ dostaneme, že

$$22l = 33g,$$

čo znamená, že

$$l = 1{,}5g. \tag{8}$$

Dosadením (8) do (3) dostávame, že platí

$$5t = 6 \cdot 1{,}5g + 11g,$$

teda

$$5t = 20g,$$

odkiaľ dostávame, že platí

$$t = 4g. \tag{9}$$

Dosadením (8) a (9) do (5) dostávame, že platí

$$5 \cdot 4g = k + 10 \cdot 1{,}5g - 10g,$$

odkiaľ po úprave dostaneme, že platí

$$15g = k. \tag{10}$$

Dosadením (8) a (10) do (2) dostávame, že platí

$$3 \cdot 15g + 10 \cdot 1{,}5g = z,$$

odkiaľ po úprave dostaneme, že platí

$$60g = z.$$

Celkovo dostávame, že jedna lyžica stojí jeden a pol grajciara, jeden tanier stojí štyri grajciare, jeden krčah stojí 15 grajciarov a jeden zlatý má hodnotu 60 grajciarov.

5. Ukážte, že prirodzené číslo n možno vyjadriť ako súčet štyroch po sebe idúcich prirodzených čísel práve vtedy, keď $n \geq 10$ a n dáva zvyšok 2 po delení štyrmi.

Riešenie: Predpokladajme, že prirodzené číslo n možno vyjadriť ako súčet štyroch po sebe idúcich prirodzených čísel. Potom musí existovať nejaké prirodzené číslo k, pre ktoré platí

$$n = k + (k+1) + (k+2) + (k+3),$$

teda

$$n = 4k + 6 = 4 \cdot (k+1) + 2,$$

teda číslo n dáva zvyšok 2 po delení štyrmi. Najmenšie také prirodzené číslo je

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10,$$

a teda platí $n \geq 10$.

Teraz predpokladajme, že $n \geq 10$ a n dáva zvyšok 2 po delení štyrmi. Potom existuje také prirodzené číslo k, že platí

$$n = 4k + 2.$$

Keďže platí $n \geq 10$, musí platiť $4k + 2 \geq 10$, teda $k \geq 2$. Prirodzené číslo n môžeme zapísať v tvare súčtu

$$n = 4k + 2 = (k-1) + (k) + (k+1) + (k+2).$$

Keďže $k \geq 2$, všetky čísla na pravej strane sú prirodzené, a teda prirodzené číslo n sme vyjadrili ako súčet štyroch po sebe idúcich prirodzených čísel.

Na základe týchto dvoch implikácií môžeme povedať, že platí ekvivalencia, a teda platí, že prirodzené číslo n možno vyjadriť ako súčet štyroch po sebe idúcich prirodzených čísel práve vtedy, keď $n \geq 10$ a n dáva zvyšok 2 po delení štyrmi.

6. Dokážte, že pre ľubovoľné reálne čísla a, b platí nerovnosť $a^4 + b^4 \geq a^3 b + a b^3$.

Riešenie: Nerovnosť zo zadania budeme postupne upravovať ekvivalentnými úpravami:

$$\begin{aligned} a^4 - a^3 b + b^4 - a b^3 &\geq 0, \\ a^3 \cdot (a-b) + b^3 \cdot (b-a) &\geq 0, \\ a^3 \cdot (a-b) - b^3 \cdot (a-b) &\geq 0, \\ (a^3 - b^3) \cdot (a-b) &\geq 0. \end{aligned}$$

Ak platí $a \geq b$, tak potom platí aj $a^3 \geq b^3$, a teda na ľavej strane dostávame súčin dvoch nezáporných čísel, ktorý je nezáporný, a teda nerovnosť platí. Ak platí $a < b$, tak potom platí aj $a^3 < b^3$, a teda na ľavej strane dostávame súčin dvoch záporných čísel, ktorý je kladný, a teda nerovnosť platí tiež. Keďže sme používali len ekvivalentné úpravy a iné prípady ako vyššie uvedené nemôžu nastať, dokázali sme danú nerovnosť.

Výsledková listina po 1. sérii úloh korešpondenčnej súťaže

Por.	Priezvisko	Meno	Kategória	Škola	1	2	3	4	5	6	Spolu
1.	Lopatková	Silvia	Z	ZŠ Štefana Kluberta Levoča	5	4	5	5			19
2.	Brčiak	Jakub	Z	ZŠ Štefana Kluberta Levoča	5	4	4	5			18
2.	Farkašovský	Tomáš	Z	ZŠ Štefana Kluberta Levoča	5	3	5	5			18
2.	Dlugošová	Michaela	C	G Kukučínova Poprad			5	5	3	5	18
5.	Bielená	Veronika	C	SOŠ Svit			5	5	1	1	12
6.	Grivalský	Jakub	C	SOŠ Svit			5	3	1	1	10

Zadania 2. série úloh korešpondenčnej súťaže

1. Obdĺžniková záhrada má dĺžku 100 m a šírku 20 m. Vypočítajte, o koľko metrov štvorcových sa zmenší jej úžitková plocha, ak sa ohradí okrasným plotom, ktorý má šírku 50 cm.

2. Miško si pomyslel jedno číslo z nasledujúcej tabuľky. Zuzka hádala, potom povedala, že hľadané číslo:

a) je v prvom riadku,
b) nie je v druhom stĺpci,
c) je párne,
d) je väčšie ako 3.

1	2	3
9	5	6
7	4	8

Miško jej potom povedal, že iba jedna zo štyroch výpovedí je pravdivá a tri zvyšné sú nepravdivé. Ktoré číslo si Miško myslel?

3. Nájdite všetky prirodzené čísla deliteľné štyrmi, ktorých ciferný súčet sa rovná siedmim a ciferný súčin šiestim.

4. V lichobežníku majú základne dĺžky 20 cm a 10 cm, ramená 10 cm a $4\sqrt{5}$ cm. Vypočítajte obsah tohto lichobežníka.

5. Na dvoch kolesách, ktoré sa zvonka dotýkajú, je natiahnutý pás. Určte jeho dĺžku, ak polomery kolies sú 15 cm a 45 cm.

6. Dokážte, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla x, y, z platí nerovnosť

$$\frac{x^3}{x^2+y^2}+\frac{y^3}{y^2+z^2}+\frac{z^3}{z^2+x^2}\geq\frac{x+y+z}{2}.$$

(Neculai Stanciu, Titu Zvonaru, Rumunsko)

7. Dokážte, že z ľubovoľnej sedmice prirodzených čísel dokážeme vybrať dve také, ktorých súčet alebo rozdiel bude deliteľný desiatimi.

8. Predpokladajme, že každý bod roviny je ofarbený jednou z dvoch farieb. Dokážte, že potom pre jednu z týchto dvoch farieb platí, že pre každé kladné reálne číslo existuje dvojica bodov ofarbených touto farbou, ktorých vzdialenosť sa rovná tomuto číslu.

9. Dokážte, že číslo $2^{1092}-1$ je deliteľné číslom 1093^2.

10. Nájdite všetky prirodzené čísla *m*, *n*, ktoré sú riešeniami rovnice $2^m - 3^n = 7$.

11. Zistite, či existuje množina 4 024 takých prirodzených čísel, že súčet čísel ľubovoľnej 2 013-prvkovej podmnožiny tejto množiny nie je deliteľný číslom 2 013.

12. Nech *a*, *b*, *c* sú kladné reálne čísla, ktorých súčin nie je väčší ako ich súčet. Dokážte, že potom platí nerovnosť

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{3}abc.$$

13. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je definovaná predpisom $a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1}$, pričom $a_1 = 20$, $a_2 = 30$. Nájdite všetky prirodzené čísla *n*, pre ktoré je $5a_{n+1}a_n + 1$ druhou mocninou celého čísla.

14. Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla *n* platí nasledujúca nerovnosť:

$$\left(2n^2 + 3n + 1\right)^n \geq 6^n \cdot (n!)^2$$

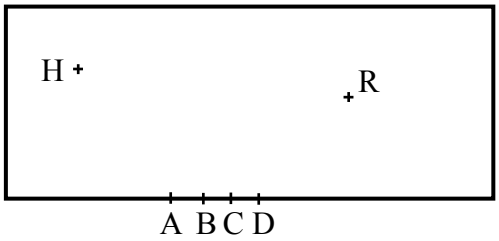
Termín odoslania riešení úloh 2. série: do 9. 3. 2015

Riešenia zasielajte na adresu:

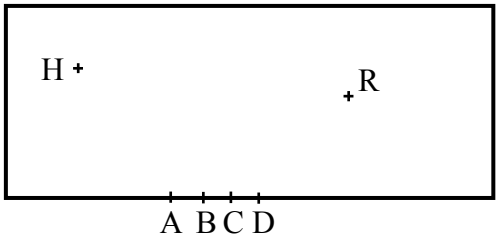
APROMOD, s. r. o.
MATMIX
Bratislavská 716/2
900 46 Most pri Bratislave

Hokej

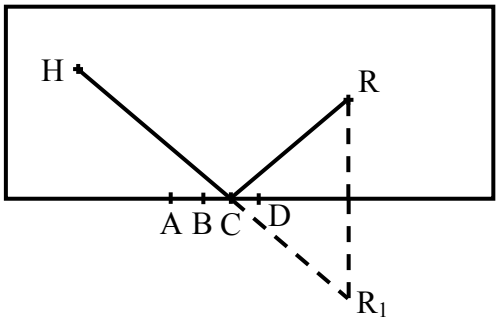
Pri hraní hokeja sa okrem priamych nahrávok používajú aj odrazy od mantinelu. Pri ich realizácii sa využíva zákon dopadu a odrazu – uhol dopadu sa rovná uhlu odrazu.
a) Určte, na ktoré z miest A, B, C, D hokejista namieril, ak trafil puk z miesta H do miesta R s jedným odrazom od mantinelu.



b) Komplikovanejšie sú už odrazy od dvoch mantinelov. Zistite, ktoré z miest A, B, C, D hokejista H trafil, ak trafil cieľ R po odraze od horného a dolného mantinelu v tomto poradí.



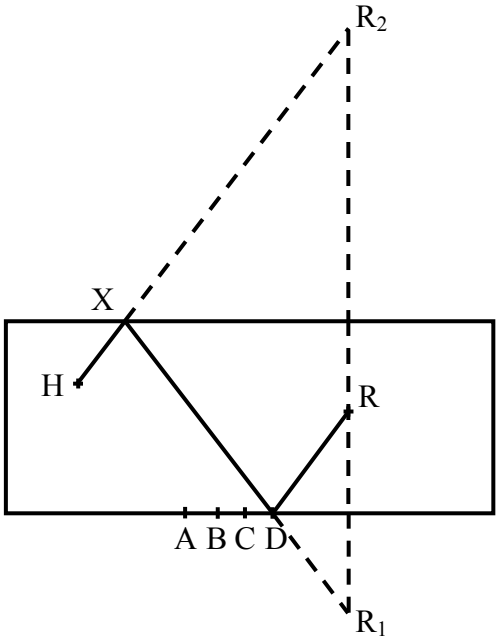
Riešenie:
a) Keďže uhol dopadu sa rovná uhlu odrazu, tak dráha puku po odraze je osovo symetrická s jej mysleným pokračovaním za mantinelom. To znamená, že nám stačí osovo súmerne zobraziť bod R do bodu R_1 podľa dolného mantinelu (priamky) a spojiť tieto dva body. Priesečník priamky HR_1 a dolného mantinelu bude hľadaný bod odrazu – bod C.



Hokejista musel namieriť na miesto C.

b) Postup je analogický ako v predchádzajúcej časti. Najprv osovo súmerne zobrazíme bod R do bodu R_1 podľa dolného mantinelu (priamky). Keďže sa však má puk odraziť aj od horného mantinelu, musíme bod R_1 osovo súmerne zobraziť aj podľa horného mantinelu do bodu R_2. Teraz spojíme body H a R_2 a tam, kde priamka HR_2

pretne horný mantinel, bude prvý bod odrazu X. Ten spojíme s bodom R_1 a priesečník priamky XR_1 a dolného mantinelu bude hľadaný bod odrazu – bod D.



Hokejista musel trafiť miesto D.

Včely

Včely medonosné majú zaujímavé príbuzenské vzťahy. V roji má kľúčovú úlohu kráľovná, ktorá kladie vajíčka, z ktorých sa vyvíjajú ďalšie včely. Samce sa liahnu z neoplodnených vajíčok kráľovnej, samice z oplodnených vajíčok. Určte, koľko má každý trúd prapraprapraprarodičov.

Riešenie: Trúd má len jedného rodiča – kráľovnú. Tá mala dvoch rodičov – kráľovnú a iného trúda. Preto má každý trúd dvoch prarodičov. Každý z nich mal matku a kráľovná mala aj otca. Preto má trúd troch praprarodičov. Z nich sú dve kráľovné, ktoré mali dvoch rodičov, a jeden trúd, ktorý mal len matku. To znamená, že trúd má 5 prapraprarodičov. Z nich boli tri kráľovné, takže prapraprapraprarodičov bolo 8 (tri kráľovné mali po dvoch rodičoch a dva trúdy len po jednej matke).

Martin Hriňák

Správne odpovede k článku Číselné úlohy pre rok 2014:

1. 2160
2. $x = 26$, $y = 17$
3. 6949
4. číslicu 7
5. 936
6. 100
7. tri prvočísla (2; 11; 101)
8. ciferný súčet je 8
9. posledná cifra je 2
10. prvá číslica je 7
11. 1007,5
12. zvyšok je 10
13. posledná cifra je 4
14. posledná cifra je 3
15. 2013
16. 602
17. 2 029 105
18. sedem možností
19. 1, 2, 1007; 1, 19, 106; 1, 38, 53; 2, 19, 53; štyri možnosti
20. 504
21. 1 363 558 560

O matematike s filozofickým nádychom

Najušľachtilejšia sila našej duše je schopnosť, ktorá sa spolieha na meranie a výpočet... Počty a merba vedú k rozumovému poznávaniu, k pravde a lepšiemu pochopeniu všetkých náuk... Matematika ponúka skvelý prostriedok pre objavenie právd, ktoré sú bez účasti rozumu nedostupné.

(Platón, starogrécky myslitel' a filozof; 427 – 347 pred n. l.)

Najpozoruhodnejšia na človeku je jeho schopnosť myslieť... Matematika pozoruje veci, nevnímajúc zmyslové, zaujímajúc sa o vlastnosti množstva a súvislostí.

(Aristoteles, starogrécky filozof a logik; 384 – 322 pred n. l.)

Kto podceňuje výsledky matematiky, škodí celej vede, lebo ten, kto nepozná matematiku, nemôže poznať ostatné exaktné vedy a nemôže pochopiť svet... Chcel by som vysloviť predpoveď, že čím viac základ prírody rozširujeme, tým viac odvetví matematiky budeme nútení používať... Všetko poznanie závisí od teoretickej sily matematiky.

(R. Bacon, františkánsky mních; asi 1214 – 1294)

Matematiku možno opísať ako vedu, ktorá pojednáva o všeobecných zákonitostiach (formách), podľa ktorých sa veci musia riadiť vo svojom bytí.

(B. Bolzano, profesor pražskej univerzity; 1781 – 1848)

Matematika je najistejšia pôda pre ľudstvo. Zostane nedotknuteľná, až kým sa plán univerza, ktorý sa rozprestiera pod našimi nohami ako mapa, nestane súčasťou ľudskej mysle... Matematika zvyšuje ľudské schopnosti postupnými krokmi od začiatku k stále vyšším stupňom intelektuálnej existencie.

(J. J. Sylvester, anglický matematik; 1814 – 1897**)**

Matematika je štúdium ideálnych konštrukcií a odhaľovanie predtým neznámych vzťahov medzi časťami týchto konštrukcií... Matematika skúma, čo je a čo nie je logicky možné bez toho, aby zodpovedala za jeho aktuálnu existenciu.

(Ch. S. Peirce, americký učenec, filozof a logik; 1839 – 1914)

Originalita matematiky spočíva v tom, že v matematickej vede sú vyjadrené vzťahy medzi vecami, ktoré sa bez sprostredkovania ľudským rozumom nedajú vôbec postihnúť.

(A. N. Whitehead, anglický filozof a logik; 1861 – 1947)

V samej matematike sa realita prejavuje vo svojej podstatnej funkcii: podnecovať myslenie.

(G. Bachelard, francúzsky filozof; 1884 – 1962)

Matematika je univerzálny symbolický jazyk, ktorý sa nezaoberá opisom vecí, ale všeobecným vyjadrovaním vzťahov... Matematika je sprostredkujúca sféra medzi zmyslovým a nadzmyslovým svetom.

(E. Cassirer, nemecký filozof a historik vedy; 1874 – 1945)

Matematika je monumentálna stavba, postavená ľudskou predstavivosťou pre pochopenie vesmíru. V nej sa stretneme s okolitým a nekonečným, uchvacujúcim a nevystihnuteľným.

(Le Corbusier, francúzsko-švajčiarsky architekt, urbanista, sochár; 1887 – 1965)

Matematika je veda, ktorá dáva najlepšiu príležitosť poznávať proces myslenia a má tú prednosť, že pri jej pestovaní nadobúdame cvik v metóde rozumového uvažovania, ktoré môže byť potom používané na štúdium ktoréhokoľvek predmetu.

(G. Polya, maďarsko-americký matematik; 1887 – 1985)

Matematika ťa neučí jednoduché odpovede na nejakú otázku, ale celú jazykovú hru s otázkami aj odpoveďami.

(L. Wittgenstein, rakúsky analytický filozof a logik; 1889 – 1951)

Matematika je skúmanie najvšeobecnejších možných štruktúr, nech sú už dané priestorovo, časovo alebo dokonca len čisto pojmovo.

(C. F. Weizsäcker, nemecký fyzik, filozof a teoretik vedy; 1912 – 2007)

Matematika je najmocnejší intelektuálny nástroj, ktorý bol kedy vytvorený a prostredníctvom ktorého unikáme času.

(L. Kolakowski, poľský filozof a historik; 1927 – 2009)

vybral a zostavil Dušan Jedinák

Školské úlohy riešené matematickým prieskumom

Úvod

Jednou z metód riešenia školských matematických úloh je skúmať, ako sa prípadné riešenie správa k jednotlivým zmenám premenných či parametrov, ako sa postupne vyvíja príslušná zákonitosť. Takýto postup nazývame experimentovanie, modelovanie skúmanej situácie, objavný prieskum. Pri simuláciách môžeme vysloviť určitú hypotézu a potom sa snažiť ju dokázať alebo vyvrátiť. Ponúkam niektoré úlohy, ktoré naznačujú spomínaný postup riešenia.

Prehľadné modelovanie problému

Zadanie: *Pre ktoré prirodzené čísla n je číslo* $G = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ *deliteľné piatimi?*

Riešenie: Vyznačme si, ako sa *G* vytvára pre jednotlivé prirodzené čísla *n*:

	$\mathbf{1}^n$	+	$\mathbf{2}^n$	+	$\mathbf{3}^n$	+	$\mathbf{4}^n$	$\boldsymbol{G}$
$n = 1$	1		2		3		4	10
$n = 2$	1		4		9		16	30
$n = 3$	1		8		27		64	100
$n = 4$	1		16		81		156	254
$n = 5$	1		32		243		624	900
$n = 6$	1		64		729		2496	3290

Ak si uvedomíme, že v číslach tvaru:

– 2^n sa na posledných miestach pravidelne striedajú cifry 2, 4, 8, 6;

– 3^n sa na posledných miestach pravidelne striedajú cifry 3, 9, 7, 1;

– 4^n sa na posledných miestach pravidelne striedajú cifry 4, 6, 4, 6;

uznáme, že na poslednom mieste súčtu $G = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ pre *n* = 1, 2, 3; 5, 6, 7; 9, 10, 11; ... (vynechávali sme násobky štyroch) je vždy 0. To znamená že číslo *G* je deliteľné piatimi.

Pre $n = 4, 8, 12, 16, \ldots$ sa to nestane a na konci čísla *G* bude vždy cifra 4. To znamená, že číslo $G = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ je deliteľné piatimi pre všetky prirodzené čísla *n*, ktoré nie sú deliteľné štyrmi.

Úloha, ktorú ponúkol J. J. Sylvester

Zadanie: *Z dostatočne veľkého počtu poštových známok s hodnotami 5 a 17 sa dajú skladať rôzne hodnoty. Aká je najväčšia hodnota, ktorá sa nedá vytvoriť kombináciou týchto dvoch hodnôt?*

Riešenie: Generujme systematickú tabuľku hodnôt, ktoré dostávame postupným sčítavaním jednotlivých hodnôt:

	5	10	15	20	25	...
17	22	27	32	37	42	...
34	39	44	49	44	49	...
51	56	61	66	71	76	...
68	73	78	83	88	93	...

Vidíme, že vieme vytvoriť číselné hodnoty

na konci s číslicou 0 pre čísla ≥ 10;
na konci s číslicou 5 pre čísla ≥ 5;
na konci s číslicou 7 pre čísla ≥ 17;
na konci s číslicou 2 pre čísla ≥ 22;
na konci s číslicou 4 pre čísla ≥ 34;
na konci s číslicou 9 pre čísla ≥ 39;

na konci s číslicou 1 pre čísla ≥ 51;
na konci s číslicou 6 pre čísla ≥ 56;
na konci s číslicou 8 pre čísla ≥ 68;
na konci s číslicou 3 pre čísla ≥ 73;

teda najväčšou hodnotou, ktorá sa nedá z daných hodnôt vytvoriť, je 63.

Pohyblivá logika

Zadanie: *Ak v štvorcovej tabuľke prirodzených čísiel* 1 – 49 *(pozri schému)*

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

vyberieme sedem čísiel tak, že v každom riadku a v každom stĺpci je vybrané práve jedno číslo, potom súčet vybraných čísiel je vždy rovnaký. Dokážte toto tvrdenie a stanovte tento súčet.

Riešenie: Predstavme si, že na každé číslo v prvom riadku tabuľky položíme značku. Súčet označených čísiel by bol 1 + 2 + 3 + 4 +5 + 6 + 7 = 28, ale treba, aby práve jedna značka bola v každom riadku i v každom stĺpci. To dosiahneme tak, že značky posúvame v smere stĺpcov, aby v každom riadku bola práve jedna. Pri posune značky do 2. riadku sa číslo zväčší o 7, pri presune do 3. riadku o 14 atď. Preto pri presune značiek do jednotlivých riadkov (do každého práve jedna) sa súčet príslušných čísiel zväčší o $(1+2+3+4+5+6)\cdot 7 = 147$. V požadovanom rozdelení podľa textu úlohy je teda celkový súčet označených čísel vždy $28+147=175$. Logická predstava o pohybe značiek bola užitočná a presvedčivá.

Nielen radosť z experimentovania

Zadanie: Pre ktoré prirodzené čísla n je $1!+2!+3!+4!+\ldots+n!$ druhou mocninou prvočísla?

Riešenie: Kto skúsi postupne dosadzovať, zistí, že platí:

$1! = 1 = 1^2$
$1! + 2! = 3$
$1! + 2! + 3! = 9 = 3^2$
$1! + 2! + 3! + 4! = 33$
$1! + 2! + 3! + 4! + 5! = 153$
$1! + 2! + 3! + 4! + 5! + 6! = 873$

Zadaniu vyhovujú zatiaľ iba $n = 1,\ n = 3$. Zdá sa, že od $n = 4$ je posledná číslica tých jednotlivých súčtov vždy 3. Prečo? Pre $k \geq 5$ už má číslo $k!$ poslednú číslicu vždy nula (je tam vždy súčin $2 \cdot 5$). Ale druhá mocnina žiadneho prirodzeného čísla nikdy nekončí číslicou 3 (pretože $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$ atď.). Danej úlohe vyhovujú len čísla 1 a 3.

Experimentovanie často ponúkne hypotézu, ktorú keď dokážeme, riešenie úlohy je zaručené.

Záverečné odporúčanie

Ponúkam prehľad niektorých publikácii, ktoré obsahujú podobné úlohy (aj s náznakmi riešenia a príslušnými výsledkami) na využitie prieskumných postupov pre riešenie školských matematických úloh:

CALDA, E.: *Sbírka řešených úloh*. Praha: Prometheus, 2006.

CIRJAK, M.: *Zbierka divergentných a iných neštandardných úloh*. Prešov: Essox, 2000.

GREGOROVÁ, G.: *Zbierka riešených úloh z planimetrie*. Bratislava: Práca, 2000.

HECHT, T. – SKLENÁRIKOVÁ, Z.: *Metódy riešenia matematických úloh*. Bratislava: SPN, 1992.

HRIŇÁK, M.: *Metódy riešenie matematických úloh 1 – 3*. Bratislava: MPC, 2008.

KOPKA, J.: *Hrozny problémů ve školské matematice*. Ústí nad Labem: UJEP, 1999.

KUŘINA, F.: *Umění vidět v matematice*. Praha: SPN, 1990.

KUŘINA, F. a kol.: *Matematika a porozumění světu.* Praha: Academia, 2009.

KUŘINA, F. – PŮLPÁN, Z.: *Podivuhodný svět elementární matematiky*. Praha: Academia, 2006.

MIHALÍKOVÁ, B. a kol.: *Úlohy MO základnej školy*. Bratislava: IUVENTA, 2003.

NIEDERMAN, D.: *101 hádanek pro náročné*. Praha: Portál, 2006.

ODVÁRKO, O. a kol.: *Metody řešení matematických úloh.* Praha: SPN, 1990.

STEWART, I.: *Kabinet matematických kuriozit.* Praha: Dokořán/Argo, 2013.

STEWART, I.: *Truhlice matematických podkladů.* Praha: Dokořán/Argo, 2013.

VRÁBEL, P.: *Heuristika a metodológia matematiky.* Nitra: UKF FPV, 2005.

ZHOUF, J. a kol.: *Matematické příběhy z korespondenčních seminářů.* Praha: Prometheus, 2006.

ZHOUF, J.: *Písemné maturitní zkoušky do gymnaziálních tříd se zaměřením na matematiku.* Praha: UK Ped. fak., 2007.

ZHOUF, J.: *Přijímací zkoušky z matematiky na střední školy s rozšířenou výukou matematiky.* Praha, Prometheus, 1997.

Dušan Jedinák

Obsah

Redakčná pošta ..... 2. strana obálky
James Sylvester – matematik hrdý na svoju poéziu 1
Číselné úlohy pre rok 2014 3
Korešpondenčná súťaž v školskom roku 2014/2015 5
Riešenia 1. série úloh korešpondenčnej súťaže 5
Výsledková listina po 1. sérii úloh korešpondenčnej súťaže 9
Zadania 2. série úloh korešpondenčnej súťaže 9
Hokej 11
Včely 12
Správne odpovede k článku Číselné úlohy pre rok 2014 12
O matematike s filozofickým nádychom 13
Školské úlohy riešené matematickým prieskumom 14
Obsah ..... 4. strana obálky

MATMIX – matematický časopis pre žiakov základných a stredných škôl, vydáva Ing. Mgr. Martin Hriňák v spolupráci s APROMOD, s. r. o., ako pomocnú literatúru pre predmetové komisie matematiky a pre žiakov so záujmom o matematiku.

Vydávanie časopisu je spolufinancované z dotácie Ministerstva školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky.

Šéfredaktor: Ing. Mgr. Martin Hriňák
Redakcia: Dušan Jedinák, Mgr. Katarína Hriňáková, Prof. Neculai Stanciu
Vydavateľ: Ing. Mgr. Martin Hriňák, Havanská 17, 040 13 Košice, IČO 41857836
Adresa redakcie: APROMOD, s. r. o., MATMIX, Bratislavská 716/2,
900 46 Most pri Bratislave
Časopis vychádza štyrikrát ročne. Cena 1,35 €. Náklad: 150 ks. December 2014.
E-mail: matmix@matmix.sk
Webová stránka: http://www.matmix.sk
Registračné číslo MK SR: EV 2029/08
ISSN: 1336-7854

