APROMOD

Ročník: 20
Číslo: 3 – 4
Šk. rok: 2014/2015

Matematický časopis pre žiakov základných a stredných škôl

MAT MIX

Človek sa nenaučí robiť matematiku počúvaním brilantných výkladov na vyučovacích hodinách, ale samostatnou prácou s matematickými pojmami.

Gustave Choquet

Redakčná pošta

Milí čitatelia,

toto číslo časopisu MATMIX uzatvára jeho jubilejný 20. ročník. Pri tejto príležitosti by som sa chcel poďakovať najmä jeho predchádzajúcim šéfredaktorom, RNDr. Milanovi Maxianovi a RNDr. Ľudovítovi Hrdinovi, CSc., za úspešné vedenie časopisu, a našmu najaktívnejšiemu autorovi, Dušanovi Jedinákovi, za množstvo zaujímavých článkov (nielen) z histórie matematiky.

Z histórie matematiky si môžete prečítať článok o Gustavovi Choquetovi, ktorý mal ako matematik intuíciu básnika. Niekoľko citátov známych i menej známych osobností o matematike nájdete v článku Niekoľko myšlienok o matematike (aj v období stredoveku).

V tomto čísle časopisu vám prinášame riešenia úloh druhej série našej korešpondenčnej súťaže s výsledkovou listinou riešiteľov, ktorí získali aspoň 10 bodov.

Na prázdniny vám prinášame výber úloh z výberového sústredenia Matematickej olympiády a test z elementárnej geometrie.

Prajem vám príjemné prežitie letných prázdnin a verím, že sa v septembri opäť stretneme.

Martin Hriňák

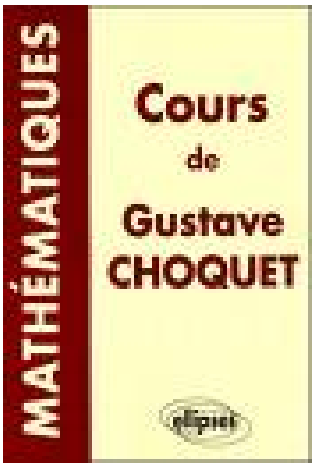
Gustave Choquet – ako matematik mal intuíciu básnika

Osudy života

Dedičstvo zo strany otca i matky mu prinášalo ideál intelektuálneho i morálneho života. Jeho otec žil fyzickou prácou i hudbou v miestnej kapele. Matka mala rada kvety v záhrade a záľubu v poézii. **Gustave Choquet** (1. 3. 1915 – 14. 11. 2006) získal sklon k sneniu a spájaniu rôznorodých myšlienok. Už v základnej škole prebral vášeň svojho výnimočného učiteľa pre experimentovanie a pozorovanie prírodných javov. Na gymnáziu si zvlášť obľúbil geometriu, mal dobrú vizuálnu pamäť i schopnosť predstavivosti aj abstrakcie. Kurz analýzy a mechaniky so základnou matematikou ho očaril až tak, že ho neskôr označil za rozhodnutie robiť matematiku po celý život. V rokoch 1934 – 1938 vyštudoval parížsku École Normale Supérieure a potom odišiel ako štipendista na rok do Princetonu, kde navštevoval aj prednášky prof. Churcha. V januári 1941 sa oženil (a neskôr, roku 1961, aj druhý raz; s prvou manželkou mali tri a s druhou dve deti). V rokoch 1941 – 1946 vedecky pracoval (hlavne v teórii miery, potenciálu, diferenciálnej geometrii a teórii kriviek), obhájil dizertačnú prácu a získal doktorát. V rokoch 1946 – 1947 pôsobil v Krakove a potom v rokoch 1947 – 1949 v Grenobli. Stal sa úspešným vysokoškolským učiteľom (profesor na Université de Paris 1952 – 1984 aj na École Polytechnique 1965 – 1969). Pôsobil v USA, Anglicku i Austrálii. Navštívil Čínu, Afriku, Kóreu i Japonsko.

Vedecké úspechy

Matematik Choquet napísal viac než 150 vedeckých prác, 7 monografií a celý rad učebníc. Stal sa uznávaným odborníkom hlavne v teórii zovšeobecnených kapacít i v oblasti integrálnej reprezentácie konvexných množín. Otvoril nové cesty pre matematické myslenie v oblasti teórie potenciálu a pravdepodobnosti. Jeho meno nesú aj niektoré pojmy: *Choquetova teória*, *Choquetova kapacita*, *Choquetov integrál*, *Choquetova hranica*, *Choquetov simplex*.



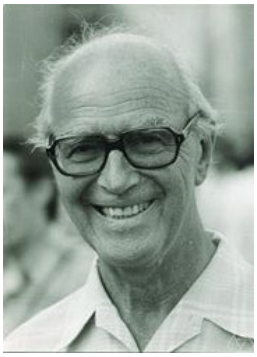
Profesor Gustave Choquet bol úspešný aj svojimi odbornými prácami z reálnych a komplexných funkcií, variačného počtu, geometrie a jej didaktiky, teórie grafov, teórie čísiel, teórie chaosu. Pozorne a primerane hlboko vedel vystihnúť aj teóriu i prax duševných procesov pri tvorivej matematickej práci. Bol známy ako vynikajúci prednášajúci, ktorý vychoval desiatky významných matematikov a svojimi

odbornými i didaktickými prácami ovplyvnil aj ďalších matematikov i učiteľov matematiky možno aj na celom svete. *Matematici by mali sprístupňovať svoje rozvinuté inšpirácie a vedieť písať matematiku pre ľudské bytosti.*

Ocenenia aj pocty

Patril medzi najvýznamnejšie postavy povojnovej svetovej matematiky. Jeho objavy ovplyvnili mimoriadnym spôsobom rozvoj matematickej kultúry. Za svoje odborné matematické práce získal ceny parížskej Akadémie vied (1945, 1951, 1956, 1968) a stal sa jej riadnym členom (1976). V rokoch 1950 – 1962 bol prezidentom *Medzinárodnej komisie pre výskum a zlepšenie výučby matematiky*. V roku 1966 získal vo Francúzsku zvlášť uznávaný titul *Rytier čestnej légie*. V roku 1946 navštívil aj Prahu, neskôr umožnil matematikom Karlovej univerzity pracovať v Paríži (ale napr. na študijnom pobyte u neho bol v rokoch 1979 – 1980 aj I. Trenčanský z Bratislavy), prednášal a debatoval na letných školách v Čechách (1993, 1994, 1997). Karlova univerzita v Prahe mu v roku 2002 udelila čestný doktorát fyzikálno-matematických vied za mimoriadne celoživotné dielo v matematike.

Cesta k objavom

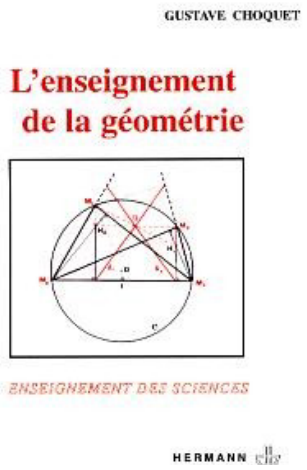


Matematika a poézia majú podľa mňa mnoho spoločného v ich inšpirácii a výstavbe. Aj profesor Choquet vo svojom vedeckom úsilí zistil, že neexistuje žiadna spoľahlivá metóda, ktorou by sa človek naučil objavovať. *Objavovanie v matematike, napriek udivujúcej podobnosti s cestou k objavom v experimentálnych vedách, v umení, v poézii alebo filozofii, má svoje špecifiká.* O týchto vlastnostiach spojených s matematickými disciplínami písal H. Poincaré (1854 – 1912), J. Hadamard (1865 – 1963) aj G. Choquet, významní francúzski matematici. *Pre študenta začínajúceho s vedeckou prácou znamená prvý vlastný výsledok nádherné odhalenie toho, čo znamená objavovať a ako s tým zachádzať... Každý sa musí k tomuto tajomstvu prepracovať sám.* Gustave Choquet prežil so svojou matematickou vedou veľmi hlboké duchovné zážitky: *Podstata mojej existencie bola sústredená na matematické bádanie... Z vlastnej skúsenosti viem, akú hlbokú radosť prináša vedecký život.*

Z názorov a myšlienok

Uvedieme aspoň útržkovité poznámky, ktoré môžu naznačiť niektoré didaktické a motivačné predstavy profesora Choqueta:

- *Demokracia znamená dať každému, čo potrebuje a priviesť ho tak vysoko, ako sa len dá.*
- *Škola musí byť schopná poskytnúť rozdielnym typom detí rozdielny prístup.*
- *Vyučujúci musí najprv vec ukázať a potom o nej hovoriť... človek sa formuje na základe vzorov... Vyučovanie sa nesmie vzďaľovať od toho, čím nás oslovujú zmysly.*
- *Človek sa formuje na základe vzorov – od dobrého učiteľa, dobrý žiak.*
- *Ľudský duch je určite veľkolepý, ale aj slabý a potrebuje oporu: pozorovanie a experimentovanie... Duch ovláda a vysvetľuje skúsenosť, ale duch sám je výsledkom skúsenosti.*
- *Neprehliadajme tvorivú úlohu geometrických úvah a dôležitosť geometrickej indukcie... Rozvíjame ju a upevňujme bezprostredným kontaktom s jednoduchými geometrickými objektmi.*
- *Študenti nevidia matematiku ako celok, netušia, prečo sa čo zavádza, prečo sa veci robia práve takto a aké sú ich aplikácie.*
- *Moja práca je založená na intuícii. Som básnik... Vidím veci, ich geometrickú podstatu... Som intuitívny typ a som geometer.*
- *Príliš formalizovaný výklad určitej teórie neposkytuje žiadnu predstavu o zdrojoch duchovnej činnosti matematika, ako je pozorovanie, matematizácia, riešenie problémov v rámci vytvoreného modelu, návrat k pôvodnému nápadu, zovšeobecnenie a aplikácia.*



- *Najdôležitejšia je vlastná aktivita žiaka. Človek sa nenaučí robiť matematiku počúvaním brilantných výkladov na vyučovacích hodinách, ale samostatnou prácou s matematickými pojmami.*
- *Čítať je veľmi dôležité. Nielen počúvať prednášky, ale aj sám čítať – články aj knihy.*
- *Vedieť vysvetliť vec tak, aby bola pochopiteľná, je veľmi ťažké.*
- *Úspech pri bádaní vyžaduje vedľa veľkej dávky sústredenia aj úplnú slobodu ducha.*
- *Zdá sa mi, že Miluj blížneho svojho je najkrajšie prikázanie, ktoré bolo človeku dané.*

Profesor Gustave Choquet patril k tým matematikom, o ktorých platia slová známeho matematika – bourbakistu Andrého Lichnerowicza (21. 1. 1915 – 11. 12. 1998): *Svedectvá vynikajúcich matematikov o cestách k objavom sú vzácne a cenné, a to nielen pre samotných matematikov, ale tiež pre všetkých, ktorí sa zamýšľajú nad kľukatými cestami, ktoré vedú ku konečnému odhaleniu pravdy.*

Dušan Jedinák

Niekoľko myšlienok o matematike (aj v období stredoveku)

Stredovek

***G. Andrea*,** knihovník na pápežskom dvore, možno ako prvý použil v roku 1469 termín *stredovek*, aby tým charakterizoval obdobie medzi grécko-rímskym starovekom a novou dobou renesancie klasických hodnôt. Vymedzenie doby stredoveku nie je ani dnes jednotné. Stredovek býva ohraničený rôznymi letopočtami. Napríklad: **324** (prenesenie centra Rímskej ríše z Ríma do mesta Byzantion – Konštantinopol) a **1453** (dobytie Konštantinopolu Turkmi); **476** (dobytie Ríma germánskymi kmeňmi, zánik Západorímskej ríše) a **1517** (začiatok reformácie v Nemecku); **391** (zakázanie pohanských náboženstiev) a **1415** (upálenie J. Husa); **529** (zrušenie platónskej Akadémie v Aténach; založenie benediktínskeho kláštora Monte Casino) a **1492** (objavenie Ameriky).

Kultúra znamená zušľachťovanie

Náš prehľad myšlienok zameraných na matematickú kultúru vtedajšej doby sme ohraničili 6. až 15. storočím. Týchto tisíc rokov nie je žiarivým príkladom tvorivého matematického myslenia, ale nie je ani „čiernou dierou“ súdobej matematiky. Možno je dlhodobou latentnou prípravou ďalších nových zaujímavých skúseností, sústredeného pozorovania prírody a trpezlivého hľadania rozumných dôvodov pre usporiadané systematické poznávanie. Po celý stredovek vo výchove vzdelaných ľudí rozhodovalo sedem slobodných umení (trívium a kvadrívium): *gramatika*, *rétorika* (rečnícke umenie), *dialektika* (umenie polemiky), *aritmetika* (vlastnosti čísiel, číselná mystika), *geometria* (základné geometrické útvary a ich miery, geografia), *astronómia* (aj zostavovanie kalendára), *muzika* (harmonické intervaly). Mnohé z nich majú zásadný matematicko-logický charakter.

Ponúkané myšlienky

Vybrali sme myšlienky od významných osobností stredoveku (*Boethius, Izidor Sevilský, Beda Venerabilis, Alcuin z Yorku, Al-Chvárizmí, Gerbert z Aurilacu, R. Grosseteste, Leonardo z Pisy, R. Bacon, T. Bradwardinus, M. Oresme, Regiomontanus, M. Kuzánsky, L. Pacioli*). Aj z nich možno vybadať, že v tomto historickom období matematické myslenie len driemalo v zápasoch o holé prežitie i v toku mnohých historických udalostí, aby neskôr vstalo z popola spoločenských premien pripravené na svoj úžasný rozvoj. Tvorivé ľudské myšlienky nikdy neopustili priaznivé možnosti pre vytváranie matematických modelov, užitočné uplatnenie logiky i abstraktnú výstavbu deduktívnych štruktúr.

Číslo bolo v mysli Stvoriteľa bezpochyby prvotným vzorom stvorených vecí... Všetka náuka o pravde je zahrnutá v mnohosti a veľkosti... Nemôže dosiahnuť poznanie božských vecí ten, kto nie je vôbec zbehlý v matematike... Pokiaľ to dokážeš, spájaj vieru s rozumom.

Boethius (okolo 480 – 524)

Matematika je teoretická veda, ktorá má za svoj predmet abstraktné množstvo. Abstraktné množstvo je to, o ktorom pojednávame iba uvažovaním, oddeľujúc ho rozumom od látky... Skrz číslo sa učíme nedať sa zmiasť. Ak odstrániš zo všetkého číslo, všetko sa zrúti do ničoty, ak ulúpiš vekom číslo, do temnoty uvrhneš všetko... Od zvieraťa sa nelíši, kto nevie, ako sa počíta.

Isidorus zo Sevilly (asi 560/70 – 636)

Ako slnko zatieni hviezdy svojím jasom, tak vzdelaný človek môže zatieniť slávu iných ľudí v spoločnosti, ak bude predkladať matematické úlohy. Dosiahne ešte viac, ak ich bude vedieť aj riešiť.

Brahmagupta (asi 598 – 625)

Hlboko si vážim matematiku, lebo tí, ktorí sa s ňou oboznámili, v nej vidia prostriedok pre pochopenie všetkého existujúceho.

Bháskara II. (asi 1115 – 1183)

Matematika je prvou vedou, bez ktorej sa nedajú opísať ďalšie vedy... Geometrické tvary a vzťahy pôsobia v celom univerze a vo všetkých jeho častiach.

R. Grosseteste (asi 1168–1253)

Zlato sa skúša ohňom, talent matematikou.

L. Pacioli (asi 1445 – 1514)

Kto podceňuje výsledky matematiky, škodí celej vede, lebo ten, kto nepozná matematiku, nemôže poznať ostatné exaktné vedy a nemôže pochopiť svet... Chcel by som vysloviť predpoveď, že čím viac základ prírody rozširujeme, tým viac odvetví matematiky budeme nútení používať... Všetko poznanie závisí od teoretickej sily matematiky.

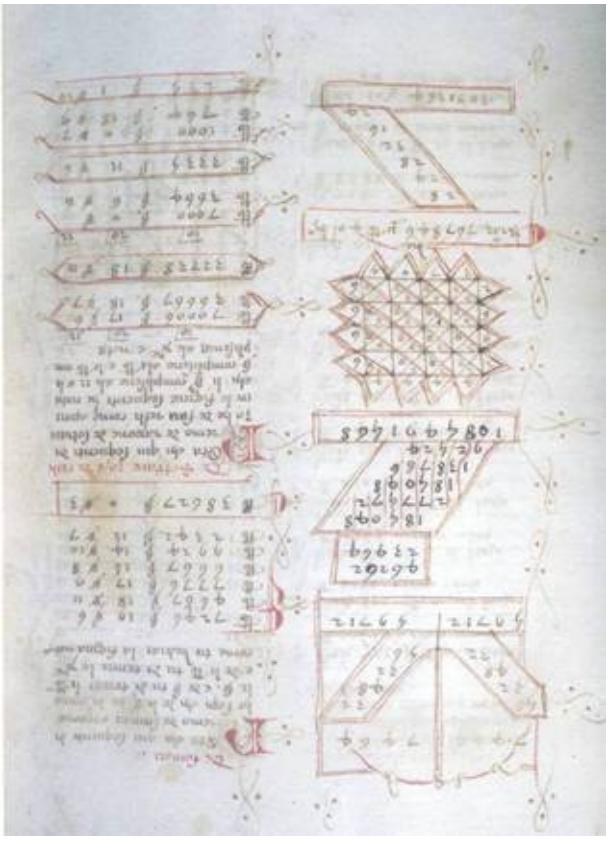
R. Bacon (asi 1214 – 1294)

Všetko skúmanie je porovnávaním, lebo používa pomer ako prostriedok... Číslo je výrazom jednoty... Počet (číslo) znamená pomer. Pomer je myšlienková konštrukcia... Číslo je základ všetkých vecí chápaných myslením... K poznaniu božských vecí je nám otvorená iba cesta prostredníctvom symbolov... Matematika nám najviac pomáha pri pochopení božských vecí.

M. Kuzánsky (asi 1401 – 1464)

Najväčšiu radosť telu dáva svetlo slnka, najväčšiu radosť duchu – jas matematickej pravdy... Kto neverí vo vrcholnú istotu matematiky, zostáva v zmätku a nikdy neumlčí rozpory sofistických vied, ktoré učia ľudí večnému kriku... Niet pravej istoty v tých vedách, v ktorých sa neobjavuje matematika... Kto karhá vznešenú múdrosť matematiky, živí sa bludom.

Leonardo da Vinci (1452 – 1519)



Vybral a zostavil *Dušan Jedinák*

Korešpondenčná súťaž v školskom roku 2014/2015

Riešenia 2. série úloh korešpondenčnej súťaže

1. Obdĺžniková záhrada má dĺžku 100 m a šírku 20 m. Vypočítajte, o koľko metrov štvorcových sa zmenší jej úžitková plocha, ak sa ohradí okrasným plotom, ktorý má šírku 50 cm.

Riešenie: Obsah záhrady je

$$S = 100\ \mathrm{m} \cdot 20\ \mathrm{m} = 2\,000\ \mathrm{m}^2.$$

Ak záhradu ohradíme zvnútra okrasným plotom so šírkou 50 cm na každej strane, zmenší sa každý rozmer záhrady o 1 meter a ostane nám k dispozícii plocha tvaru obdĺžnika s rozmermi 99 m a 19 m. Jej obsah je

$$S' = 99\ \mathrm{m} \cdot 19\ \mathrm{m} = 1\,881\ \mathrm{m}^2.$$

Rozdiel týchto dvoch obsahov je

$$S - S' = 2\,000\ \mathrm{m}^2 - 1\,881\ \mathrm{m}^2 = 119\ \mathrm{m}^2.$$

teda úžitková plocha záhrady sa zmenší o 119 metrov štvorcových.

2. Miško si pomyslel jedno číslo z nasledujúcej tabuľky. Zuzka hádala, potom povedala, že hľadané číslo:

a) je v prvom riadku,
b) nie je v druhom stĺpci,
c) je párne,
d) je väčšie ako 3.

1	2	3
9	5	6
7	4	8

Miško jej potom povedal, že iba jedna zo štyroch výpovedí je pravdivá a tri zvyšné sú nepravdivé. Ktoré číslo si Miško myslel?

Riešenie: Postupne rozoberieme 4 možnosti podľa toho, ktoré tvrdenie je pravdivé.

Ak by bolo pravdivé prvé tvrdenie, potom zvyšné tri sú nepravdivé, teda číslo musí byť v prvom riadku (môžu to byť čísla 1, 2, 3). Keďže musí byť v druhom stĺpci, musí to byť číslo 2. Potom je ale pravdivé aj tvrdenie c, pretože 2 je párne číslo. Ale to nemôže nastať, pretože pravdivé tvrdenie môže byť len jedno. Preto táto možnosť nevedie k riešeniu a prvé tvrdenie musí byť nepravdivé, a teda hľadané číslo nie je v prvom riadku.

Predpokladajme, že je pravdivé druhé tvrdenie, teda číslo sa nenachádza v druhom stĺpci. Keďže hľadané číslo nie je ani v prvom riadku, prichádzajú do úvahy len čísla 9, 6, 7 a 8. Všetky štyri sú však väčšie ako 3, teda je pravdivé aj posledné tvrdenie. To však má byť nepravdivé, a preto ani táto možnosť nevedie

k riešeniu. Preto musí byť aj druhé tvrdenie nepravdivé, teda hľadané číslo je v druhom stĺpci. Keďže nie je v prvom riadku, ostali nám už len dve možnosti: 5 a 4.

Ak by bolo pravdivé tretie tvrdenie, tak by bolo riešením číslo 4. To je však zároveň väčšie ako 3, teda opäť by bolo pravdivé posledné tvrdenie. Teda číslo 4 nie je mysleným číslom a mysleným číslom je číslo 5 (pravdivé je posledné tvrdenie, ostatné sú nepravdivé.

Iné riešenie: Podobne ako v prvom riešení vylúčime prvý riadok. Keďže ostali čísla 4, 5, 6, 7, 8, 9, tak posledné tvrdenie je určite pravdivé a ostatné sú nepravdivé. Teda myslené číslo nie je v prvom riadku, je v druhom stĺpci a nie je párne. Týmto podmienkam vyhovuje len číslo 5.

Miško si myslel číslo 5.

3. Nájdite všetky prirodzené čísla deliteľné štyrmi, ktorých ciferný súčet sa rovná siedmim a ciferný súčin šiestim.

Riešenie: Keďže ciferný súčin hľadaného čísla sa rovná šiestim, môže toto číslo obsahovať len cifry, ktoré sú deliteľmi čísla 6, teda 1, 2, 3 a 6. Teraz rozoberieme dve možnosti, ktoré môžu nastať: buď tam bude cifra 6, alebo tam budú cifry 2 a 3 (plus niekoľko jednotiek).

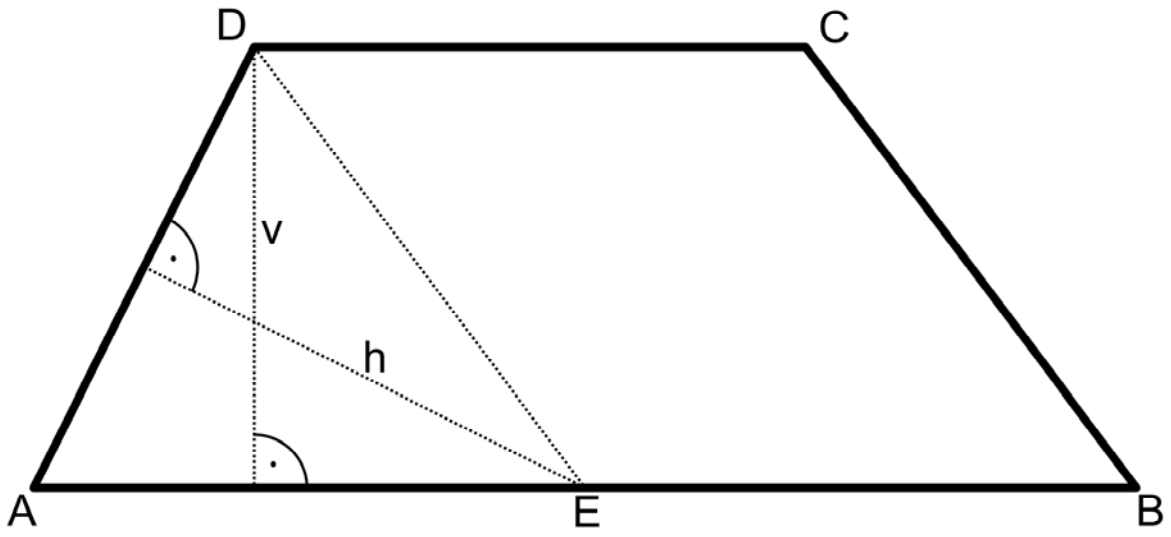
Ak číslo obsahuje cifru 6, potom ostatné cifry musia byť jednotky, aby bol ich súčin 6. Keďže jeho ciferný súčet sa rovná 7, tak jedinou možnosťou sú dve cifry – 1 a 6. Aby bolo toto číslo deliteľné 4, musí byť číslica na mieste jednotiek určite párna (to však nie je jediná podmienka, keďže číslo je deliteľné štyrmi práve vtedy, keď je jeho posledné dvojčíslie deliteľné štyrmi). Preto dostávame jedinú možnosť 16, ktorá aj vyhovuje.

Ak číslo obsahuje cifru 3, potom druhá cifra musí byť 2 a ostatné budú jednotky, aby sme dostali ciferný súčin 6. Keďže ciferný súčet má byť 7, musia tam byť ešte dve jednotky, lebo 7 – 5 = 2. Máme teda k dispozícii cifry 1, 1, 2, 3. Aby bolo číslo deliteľné štyrmi, musí byť jeho posledné dvojčíslie deliteľné štyrmi. Máme jedinú párnu číslicu 2, takže tá musí byť na mieste jednotiek. Keďže aj 12, aj 32 sú dvojčíslia deliteľné 4, vyhovujú ľubovoľné kombinácie číslic 1, 1 a 3, teda vyhovujú čísla 1 132, 1 312 a 3 112.

Úloha má štyri riešenia: 16, 1 132, 1 312 a 3 112.

4. V lichobežníku majú základne dĺžky 20 cm a 10 cm, ramená 10 cm a $4\sqrt{5}$ cm. Vypočítajte obsah tohto lichobežníka.

Riešenie: Lichobežník zo zadania úlohy si označme *ABCD*, pričom $|AB| = 20$ cm, $|BC| = 10$ cm, $|CD| = 10$ cm, $|DA| = 4\sqrt{5}$ cm. Bodom *D* veďme priamku rovnobežnú so stranou *BC,* ktorá pretne stranu *AB* v bode *E*. Trojuholník *DAE* je rovnoramenný, pretože platí $|AE| = |DE| = 10$ cm.



Veľkosť výšky *h* na stranu *AD* v tomto trojuholníku vypočítame pomocou Pytagorovej vety:

$$h = \sqrt{|AE|^2 - \left(\frac{|AD|}{2}\right)^2} = \sqrt{(10\text{ cm})^2 - \left(\frac{4\sqrt{5}\text{ cm}}{2}\right)^2} = \sqrt{80\text{ cm}^2} = 4\sqrt{5}\text{ cm}.$$

Obsah trojuholníka *DAE* je potom

$$S_{DAE} = \frac{|AD| \cdot h}{2} = \frac{4\sqrt{5}\text{ cm} \cdot 4\sqrt{5}\text{ cm}}{2} = 40\text{ cm}^2.$$

Obsah tohto trojuholníka môžeme vypočítať aj pomocou vzorca

$$S_{DAE} = \frac{|AE| \cdot v}{2},$$

kde *v* je výška na stranu *AE* v trojuholníku *DAE.* Dosadením známym hodnôt do tohto vzťahu dostaneme, že platí

$$40\text{ cm}^2 = \frac{10\text{ cm} \cdot v}{2},$$

teda $v = 8$ cm. Obsah lichobežníka potom vypočítame ako

$$S_{ABCD} = \frac{(|AB| + |CD|) \cdot v}{2} = \frac{(10\text{ cm} + 20\text{ cm}) \cdot 8\text{ cm}}{2} = 120\text{ cm}^2.$$

Obsah lichobežníka je 120 cm^2.

5. Na dvoch kolesách, ktoré sa zvonka dotýkajú, je natiahnutý pás. Určte jeho dĺžku, ak polomery kolies sú 15 cm a 45 cm.

Riešenie: Označme stred menšieho kolesa M a stred väčšieho kolesa V. Keďže polomer menšieho je 15 cm a väčšieho 45 cm, tak vzdialenosť bodov M a V bude

$$|MV| = 15\text{ cm} + 45\text{ cm} = 60\text{ cm}.$$

Označme jeden dotykový bod menšieho kolesa a pásu T a jeden dotykový bod menšieho kolesa a pásu U podľa obrázka. Nech P je päta kolmice z bodu M na UV. Potom je $UPMT$ obdĺžnik, pretože uhly VUT a UTM sú pravé (TU je spoločná dotyčnica k obom kolesám, resp. kružniciam), uhol UPM je tiež pravý, a teda aj uhol TMP musí byť pravý.

Keďže $UPMT$ je obdĺžnik, platí $|UP| = |TM| = 15\text{ cm}$. Potom platí

$$|PV| = |UV| - |UP| = 45\text{ cm} - 15\text{ cm} = 30\text{ cm}.$$

V pravouhlom trojuholníku PMV potom poznáme dĺžky dvoch strán ($|MV| = 60\text{ cm}$, $|PV| = 30\text{ cm}$) a môžeme pomocou Pytagorovej vety vypočítať dĺžku tretej strany MP:

$$|MP| = \sqrt{|MV|^2 - |PV|^2} = \sqrt{(60\text{ cm})^2 - (30\text{ cm})^2} = 30\cdot\sqrt{3}\text{ cm}.$$

Pás pozostáva z dvoch takýchto modrých úsekov a dvoch častí kružníc, preto dĺžka rovných častí pásu je

$$d_1 = 2\cdot 30\cdot\sqrt{3}\text{ cm} = 60\cdot\sqrt{3}\text{ cm}.$$

Teraz nám ostáva ešte vypočítať dĺžky častí kružníc, ktoré tvoria pás. V pravouhlom trojuholníku PMV platí:

$$\cos|\sphericalangle PVM| = \frac{|PV|}{|MV|} = \frac{30\text{ cm}}{60\text{ cm}} = \frac{1}{2},$$

teda $|\sphericalangle PVM| = 60°$. Potom červená časť pravej kružnice zodpovedá stredovému uhlu

$$|\sphericalangle UVU'| = 360° - 2\cdot 60° = 240°.$$

Jej dĺžka potom bude pomernou časťou dĺžky celej kružnice (obvodu kolesa), teda

$$d_2 = \frac{240°}{360°}\cdot 2\cdot\pi\cdot 45\text{ cm} = 60\cdot\pi\text{ cm}.$$

Analogicky budeme postupovať aj pri menšom kolese. Najprv si vypočítame veľkosť uhla TMV: $|\sphericalangle TMV| = |\sphericalangle TMP| + |\sphericalangle PMV| = 90° + 30° = 120°$.

Potom pre veľkosť stredového uhla TMT' platí

$$|\sphericalangle TMT'| = 360° - 2\cdot|\sphericalangle TMV| = 360° - 2\cdot 120° = 120°.$$

Potom bude dĺžka zelenej časti menšej kružnice pomernou časťou dĺžky celej kružnice (obvodu kolesa), teda

$$d_3 = \frac{120°}{360°} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 15 \text{ cm} = 10 \cdot \pi \text{ cm}.$$

Celkovo dostávame, že dĺžka pásu je

$$d = d_1 + d_2 + d_3 = 60 \cdot \sqrt{3} \text{ cm} + 60 \cdot \pi \text{ cm} + 10 \cdot \pi \text{ cm} = \left(60 \cdot \sqrt{3} + 70 \cdot \pi\right) \text{cm} = 323{,}83 \text{ cm}.$$

6. Dokážte, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla x, y, z platí nerovnosť

$$\frac{x^3}{x^2+y^2} + \frac{y^3}{y^2+z^2} + \frac{z^3}{z^2+x^2} \geq \frac{x+y+z}{2}.$$

(Neculai Stanciu, Titu Zvonaru, Rumunsko)

Riešenie: Pre všetky kladné reálne čísla a, b platí nerovnosť $b(a-b)^2 \geq 0$, pričom rovnosť nastáva len pre $a = b$. Roznásobením tejto nerovnosti dostávame, že platí

$$a^2b - 2ab^2 + b^3 \geq 0.$$

Prenesením výrazu z ľavej strany na pravú a pripočítaním $2a^3$ k obom stranám nerovnosti dostávame, že platí

$$2a^3 \geq 2a^3 - a^2b + 2ab^2 - b^3 = \left(a^2+b^2\right)(2a-b).$$

Predelením oboch strán nerovnosti kladným výrazom $2\left(a^2+b^2\right)$ dostávame, že platí

$$\frac{a^3}{a^2+b^2} \geq \frac{2a-b}{2}.$$

Ak teraz miesto a, b dosadíme postupne x, y; y, z a z, x a získané nerovnosti sčítame, dostaneme, že platí

$$\frac{x^3}{x^2+y^2} + \frac{y^3}{y^2+z^2} + \frac{z^3}{z^2+x^2} \geq \frac{2x-y}{2} + \frac{2y-z}{2} + \frac{2z-x}{2} = \frac{x+y+z}{2}.$$

Rovnosť nastáva len v prípade $x = y = z$.

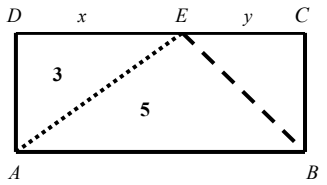
Výsledková listina po 2. sérii úloh korešpondenčnej súťaže

Por.	Priezvisko	Meno	Kategória	Škola	PS	1	2	3	4	5	6	Spolu
1	Farkašovský	Tomáš	Z	ZŠ Štefana Kluberta Levoča	18	5	4	4	5			36
2.	Brčiak	Jakub	Z	ZŠ Štefana Kluberta Levoča	18	5	5	2	5			35
3.	Lopatková	Silvia	Z	ZŠ Štefana Kluberta Levoča	19	5	5	3	1			33
4.	Dlugošová	Michaela	C	G Kukučínova Poprad	18					5		23
5.	Bielená	Veronika	C	SOŠ Svit	12			2	1	3	0	18
6.	Grivalský	Jakub	C	SOŠ Svit	10							10

S vedomosťami z elementárnej geometrie

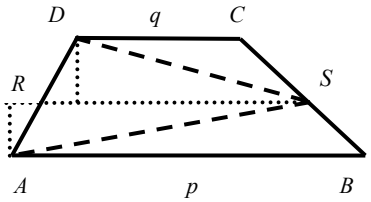
Elementárne geometrické predstavy a z toho vyplývajúce jednoduché výpočty rovinnej geometrie sú základom našich priestorových predstáv o reálnom svete. Asi len málokto netuší nič o Pytagorovej vete. Na vyriešenie ponúkaných úloh stačia solídne vedomosti zo základnej školy, napr. aj poznanie Tálesovej vety alebo vedomostí o strednej priečke trojuholníka či o jeho ťažniciach. Treba vedieť aj o zhodnosti i podobnosti trojuholníkov. Všetky ponúkané úlohy sú zadané aj s názorným grafickým vyjadrením, ale požadované údaje nemožno merať ani odhadovať, ale treba ich vypočítať. Šikovné „vtipné“ vyriešenie použitím vhodných vlastností geometrických útvarov môže priniesť skutočnú radosť zo školskej matematiky.

1. Stanovte obsah obdĺžnika *ABCD*, ak obsah trojuholníka *AEC* je 3 cm^2 a obsah trojuholníka *ABE* je 5 cm^2 (pozri obrázok).



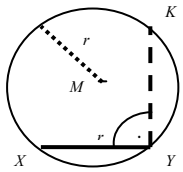
A) 9 cm^2 B) 10 cm^2 C) 11 cm^2 D) 12 cm^2

2. Obsah lichobežníka *ABCD* je 30 cm^2. Označme *S* stred ramena *BC*. Stanovte obsah trojuholníka *ASD*.



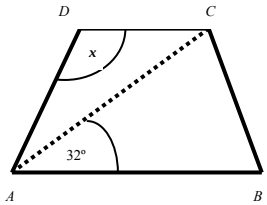
A) nedá sa určiť B) 10 cm^2
C) 15 cm^2 D) 20 cm^2

3. Na kružnici so stredom *M* a polomerom *r* ležia body *X*, *Y*, *K* tak, že |*XY*| = *r* a uhol *XYK* je pravý (90º). Stanovte veľkosť uhla *XKY*.



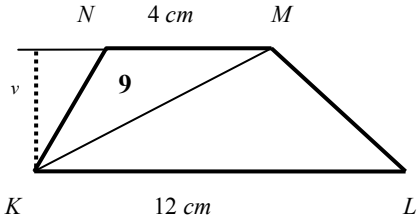
A) 45º B) 30º C) 20º D) 15º

4. V rovnoramennom lichobežníku *ABCD* (pozri obrázok) platí |*AB*| = |*AC*| a uhol *BAC* má veľkosť 32º. Stanovte veľkosť uhla *ADC*.



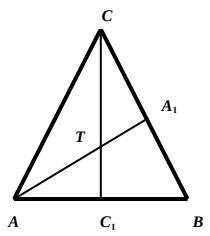
A) 106º B) 115º C) 120º D) 150º

5. V danom lichobežníku *KLMN* poznáme dĺžky oboch základní |*KL*| = 12 cm, |*MN* |= 4 cm. Obsah trojuholníka *KMN* je 9 cm^2. Stanovte obsah lichobežníka *KLMN*.



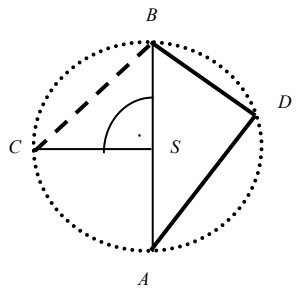
A) 24 cm^2 B) 28 cm^2 C) 32 cm^2 D) 36 cm^2

6. V rovnoramennom trojuholníku *ABC* základňa *AB* meria 16 cm, ťažnica CC_1 má dĺžku 18 cm. Stanovte dĺžku úsečky *AT*, ak *T* je ťažisko trojuholníka *ABC*.



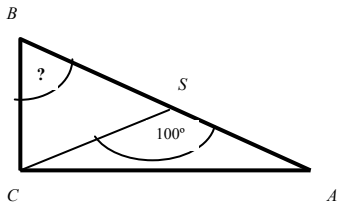
A) 10 cm B) 12 cm C) 14 cm D) 16 cm

7. V kruhu so stredom *S* a priemerom *AB* sú dané tetivy (pozri obr.), ktoré majú veľkosť $|AD| = 8\ cm$, $|BD| = 6\ cm$. Stanovte obsah trojuholníka *BCS*, ak polomer *CS* je kolmý na priemer *AB*.



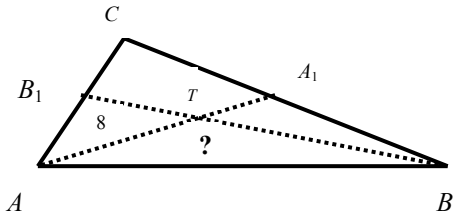
A) 8 cm^2 B) 12,5 cm^2 C) 14 cm^2 D) 15,5 cm^2

8. V pravouhlom trojuholníku *ABC* je bod *S* stred prepony *AB*. Uhol *CSA* má veľkosť 100º. Stanovte veľkosť uhla *CBS* (pozri obr.).



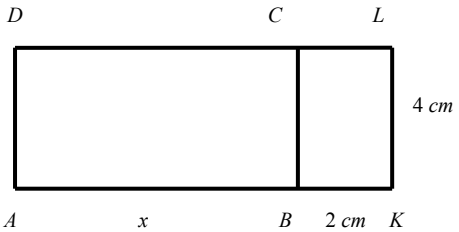
A) 75º B) 60º C) 55º D) 50º

9. V trojuholníku *ABC* (pozri obr.) sú úsečky AA_1, BB_1 ťažnice, *T* je ťažisko tohto trojuholníka. Obsah trojuholníka ATB_1 je 8 cm^2. Aký je obsah trojuholníka *ABT*?



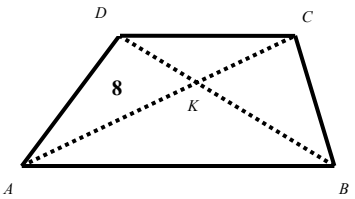
A) 14 cm^2 B) 18 cm^2 C) 12 cm^2 D) 16 cm^2

10. Obdĺžniky *ABCD, KLCB* sú podobné (pozri obr.), ďalej platí $|AD| = 4\ cm$, $|BK| = 2\ cm$. Stanovte obsah obdĺžnika *AKLD*.



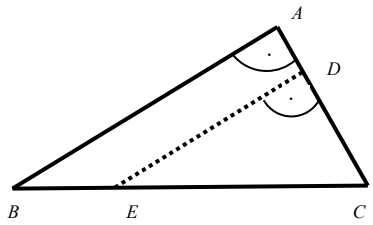
A) 40 cm^2 B) 38 cm^2 C) 32 cm^2 D) 26 cm^2

11. V lichobežníku *ABCD* (pozri obr.) je bod *K* priesečníkom uhlopriečok a platí $|AK| = 2 \cdot |KC|$. Ak obsah trojuholníka *AKD* je 8 cm^2, aký je obsah celého lichobežníka *ABCD*?



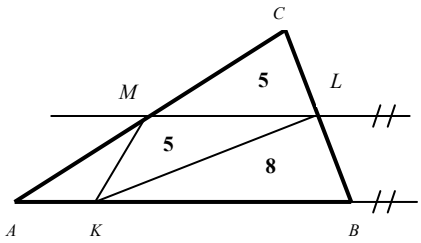
A) 24 cm^2 B) 32 cm^2 C) 36 cm^2 D) 40 cm^2

12. Stanovte veľkosť úsečky *AD* (pozri obr.), ak pre dané úsečky platí: $|AB| = 12$ cm, $|DE| = 8$ cm, $|DC| = 6$ cm, $AB \parallel DE$.



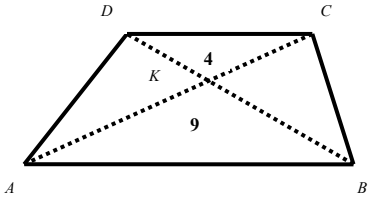
A) 4 cm B) 3 cm C) 2 cm D) 1 cm

13. V trojuholníku *ABC* vieme, že úsečka *ML* je rovnobežná s *AB* a poznáme obsahy niektorých menších trojuholníkov (pozri obr., vpísané čísla sú veľkosti príslušných obsahov). Stanovte obsah celého trojuholníka *ABC*.



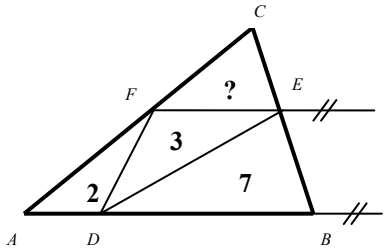
A) 19 cm^2 B) 19,5 cm^2 C) 20 cm^2 D) 21 cm^2

14. Stanovte obsah lichobežníka *ABCD*, v ktorom je *K* priesečník jeho uhlopriečok a obsah trojuholníka *ABK* je 9 cm^2 a obsah trojuholníka *CDK* je 4 cm^2.



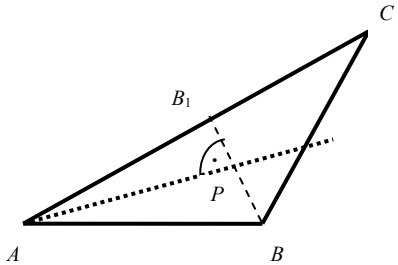
A) 25 cm^2 B) 23 cm^2 C) 28 cm^2 D) 26 cm^2

15. Stanovte obsah trojuholníka *FEC*, ak poznáte obsahy trojuholníkov *ADF*, *DEF*, *DBE* (v cm^2) podľa zadania na obrázku ($AB \parallel FE$).



A) 3 cm^2 B) 2,5 cm^2 C) 2 cm^2 D) 1,5 cm^2

16. Obvod trojuholníka *ABC* meria 63 cm, jedna jeho strana má dĺžku 21 cm. Stanovte dĺžky ostatných dvoch strán, ak viete, že os vnútorného uhla pri vrchole *A* je kolmá na ťažnicu z vrcholu *B*.



A) $|AB| = 18$ cm, $|AC| = 24$ cm
B) $|AB| = 16$ cm, $|AC| = 26$ cm
C) $|AB| = 14$ cm, $|AC| = 28$ cm
D) $|AB| = 21$ cm, $|AC| = 21$ cm

Správne odpovede:
1. B; 2. C; 3. B; 4. A; 5. D; 6. A; 7. B; 8. D; 9. D; 10. A; 11. C; 12. B; 13. C; 14. A; 15. D; 16. C.

Vyhodnotenie

Posúďte výsledky svojich školských geometrických vedomostí aj podľa úspešnosti v tomto teste (za správny výsledok v jednej úlohe je 1 bod). Nech vás povzbudia, aspoň na chvíľku, dole uvedené citáty. Aj elementárna geometria patrí k základom matematickej kultúry.

16 b – 14 b:
Geometria je akýmsi koníčkom, ktorého nám dala príroda, aby nás potešoval a zabával v temnotách. (J. d´Alembert).

13 b – 11 b:
Krása matematiky je v tom, nachádzať pravdu bez ťažkostí. (G. Polya)

10 b – 7 b:
Najvyššie poslanie matematiky spočíva práve v tom, aby nachádzala skrytý poriadok v chaose, ktorý nás obklopuje. (N. Wiener)

6 b – 4 b:
Nie som špecialista v matematike, som len jej obdivovateľ, nešťastník zamilovaný do tejto najkrásnejšej z vied. (P. Valéry)

3 b – 0 b:
Všeličo sa človek naučí v staršom veku, ale matematika sa nedá „doháňať". Je to ako hudobné umenie – žiak si cez ňu osvojuje určitú kultúru myslenia. (M. Kolibiar)

Vybral a zostavil *Dušan Jedinák*

Zadania úloh výberového sústredenia Matematickej olympiády

1. Nech S je konečná množina kladných celých čísel, ktorá má nasledujúcu vlastnosť. Ak x je prvok množiny S, potom aj každý kladný deliteľ čísla x patrí do množiny S. Neprázdna podmnožina T množiny S sa nazýva *dobrá*, ak pre každé $x, y \in T, x > y$, je podiel x/y mocninou prvočísla. Neprázdna podmnožina T množiny S sa nazýva zlá, ak pre žiadne $x, y \in T, x > y$, nie je podiel x/y mocninou prvočísla. Jednoprvkové podmnožiny sú zároveň dobré aj zlé. Nech k je veľkosť najväčšej dobrej podmnožiny množiny S. Ukážte, že k je taktiež najmenší možný počet po dvoch disjunktných zlých podmnožín množiny S, ktorých zjednotením je S.

2. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC. Nech B_1 je bod na strane AC taký, že B_1B je osou ostrého uhla ABC. Kolmica z bodu B_1 na stranu BC pretne kratší oblúk BC kružnice opísanej trojuholníku ABC v bode K. Kolmica z bodu B na AK pretína AC v bode L. Priamka B_1B pretína oblúk AC v bode M rôznom od B. Dokážte, že body K, L, M ležia na jednej priamke.

3. Nájdite všetky funkcie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ také, že pre všetky $x, y\in\mathbf{R}$ platí

$$f\left(f\left(x\right)-y\right)=f\left(x\right)+f\left(f\left(y\right)-f\left(-x\right)\right)+x$$

4. Body A_1, B_1 a C_1 ležia po rade vo vnútri strán BC, CA a AB trojuholníka ABC. Označme po rade A_0, B_0 a C_0 priesečníky $BB_1\cap CC_1$, $CC_1\cap AA_1$ a $AA_1\cap BB_1$. Dokážte, že ak štyri trojuholníky CB_1A_0, AC_1B_0, BA_1C_0 a $A_0B_0C_0$ majú rovnaký obsah rovnajúci sa jednej, tak aj tri štvoruholníky $AB_0A_0B_1$, $BC_0B_0C_1$ a $CA_0C_0A_1$ majú rovnaký obsah. Nájdite jeho veľkosť.

5. Označme α,β,γ uhly trojuholníka ABC. Dokážte, že ak platí

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}=\sqrt{3},$$

tak potom má jeden z uhlov trojuholníka ABC veľkosť 60°.

6. Dokážte, že každé prirodzené číslo k možno jediným spôsobom vyjadriť v tvare

$$k=b_1\cdot 1!+b_2\cdot 2!+\quad +b_n\cdot n!,$$

kde b_j, $j=1,2,\quad ,n$, sú celé čísla, pre ktoré platí $0\le b_j\le j, b_n\ne 0$.

7. O postupnosti $a_1,a_2,\quad ,a_{2014}$ je známe, že $\left|a_1\right|=1$ a $\left|a_{k+1}\right|=\left|a_k+1\right|$ pre každé $k=1,2,\quad ,2013$. Nájdite najmenšiu možnú hodnotu výrazu $\left|a_1+a_2+\quad +a_{2013}\right|$.

8. Pre každé prirodzené číslo $k>1$ nájdite najmenšie prirodzené číslo $m>1$ také, že existuje polynóm $P\left(x\right)$ s celočíselnými koeficientmi a vlastnosťami:

- $P\left(x\right)-1$ má aspoň jeden celočíselný koreň,
- $P\left(x\right)-m$ má presne k celočíselných koreňov.

9. Na priamke AC trojuholníka ABC zvolíme body M a N tak, aby $\left|AM\right|=\left|AB\right|$, $\left|CN\right|=\left|BC\right|$ a body boli na priamke v poradí M, A, C, N. Kružnice opísané trojuholníkom BCM a ABN sa pretínajú v bodoch B a K. Dokážte, že BK je osou uhla ABC.

10. Pre nezáporné čísla a, b, c so súčtom 5 nájdite maximum výrazu $a^4b + b^4c + c^4a$.

11. Na nekonečnej šachovnici máme vyznačených 100 políčok, po ktorých sa môže pohybovať veža. Medzi každou dvojicou vyznačených políčok sa dá dostať konečným počtom ťahov vežou. (Vežou môžeme ťahať medzi ľubovoľnými dvoma vyznačenými políčkami v rovnakom riadku alebo stĺpci.) Dokážte, že vieme vyznačené políčka rozdeliť na 50 dvojíc tak, že políčka každej dvojice ležia v rovnakom riadku alebo stĺpci.

12. Radikálom prirodzeného čísla N (ktorý sa označuje $\mathrm{rad}(N)$) sa nazýva súčin všetkých prvočíselných deliteľov čísla N, ktoré sa berú v prvej mocnine. Napríklad $\mathrm{rad}(120) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Existuje taká trojica po dvoch nesúdeliteľných prirodzených čísel A, B, C, že platí $A + B = C$ a tiež $C > 1\,000 \cdot \mathrm{rad}(ABC)$?

13. Na stranách AD a CD rovnobežníka $ABCD$ so stredom S zvolíme postupne také body P, Q aby platilo $|\measuredangle ASP| = |\measuredangle CSQ| = |\measuredangle ABC|$. Dokážte, že

a) uhly ABP a CBQ sú zhodné,

b) priamky AQ a CP sa pretínajú na kružnici opísanej trojuholníku ABC.

14. Pre reálne po dvoch rôzne a, b, c dokážte nerovnosť

$$\left|\frac{a+b}{a-b}\right| + \left|\frac{a+c}{a-c}\right| + \left|\frac{c+b}{c-b}\right| \geq 2$$

a zistite kedy nastáva rovnosť.

15. Máme štvorcovú tabuľku 2014 x 2014, ktorá je ako torus. Vpíšeme do nej čísla od 1 po 2014^2, každé práve raz. Nájdite najväčšie také M, že vždy existuje dvojica susedných políčok (hranou) líšiaca sa aspoň o M.

16. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ také, že pre všetky $a, b \in \mathbf{N}$ platí

$$a^2 + f(b) \mid af(a) + b.$$

17. Daný je trojuholník ABC taký, že $|\measuredangle ABC| > |\measuredangle BCA|$. Nech P, Q sú také dva rôzne body na priamke AC, že $|\measuredangle QBA| = |\measuredangle PBA| = |\measuredangle BCA|$ a A leží medzi P a C. Predpokladajme, že vnútri úsečky BQ existuje bod D taký, že $|PB| = |PD|$. Označme R priesečník polpriamky AD a kružnice opísanej trojuholníku ABC rôzny od A. Dokážte, že $|QB| = |QR|$.

Obsah

Redakčná pošta ..... 2. strana obálky

Gustave Choquet – ako matematik mal intuíciu básnika 1

Niekoľko myšlienok o matematike (aj v období stredoveku) 4

Korešpondenčná súťaž v školskom roku 2014/2015 7

Riešenia 2. série úloh korešpondenčnej súťaže 7

Výsledková listina po 2. sérii úloh korešpondenčnej súťaže 11

S vedomosťami z elementárnej geometrie 12

Zadania úloh výberového sústredenia Matematickej olympiády 15

Obsah ..... 4. strana obálky

MATMIX – matematický časopis pre žiakov základných a stredných škôl, vydáva Ing. Mgr. Martin Hriňák v spolupráci s APROMOD, s. r. o., ako pomocnú literatúru pre predmetové komisie matematiky a pre žiakov so záujmom o matematiku.

Šéfredaktor: Ing. Mgr. Martin Hriňák
Redakcia: Dušan Jedinák, Mgr. Katarína Hriňáková, Prof. Neculai Stanciu
Vydavateľ: Ing. Mgr. Martin Hriňák, Havanská 17, 040 13 Košice, IČO 41857836
Adresa redakcie: APROMOD, s. r. o., MATMIX, Bratislavská 716/2,
900 46 Most pri Bratislave
Časopis vychádza štyrikrát ročne. Cena 1,35 €. Náklad: 150 ks. Jún 2015.
E-mail: matmix@matmix.sk
Webová stránka: http://www.matmix.sk
Registračné číslo MK SR: EV 2029/08
ISSN: 1336-7854

9 771336 785008 03