Ročník: 21
Číslo: 1
Šk. rok: 2015/2016

Matematický časopis pre žiakov základných a stredných škôl



Matematika je široká nádherná krajina, otvorená pre všetkých, ktorým myslenie prináša skutočnú radosť.

W. Fuchs

Redakčná pošta

Milí čitatelia,

21. ročník vydávania časopisu otvárame dobrou správou – pod záštitou Jednoty slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Bratislava 1, sme získali od Nadácie Allianz grant na vydávanie nášho časopisu a aj na vydanie zbierky aplikovaných úloh z matematiky. Všetkým súčasným odberateľom zašleme túto knihu ešte tento rok.

Toto číslo začíname zamyslením nášho pravidelného prispievateľa Dušana Jedináka nad uplynulými dvadsiatimi rokmi vydávania časopisu. Z histórie sa venujeme Antonimu S. Zygmundovi, matematickému analytikovi 20. storočia, ale aj matematike v stredoveku.

Opäť otvárame ďalší ročník korešpondenčnej súťaže a veríme, že sa do nej opäť zapojíte. Pre súťaživých čitateľov zároveň prinášame zadania úloh domáceho kola 65. ročníka Matematickej olympiády v kategóriách Z5 až Z9 a C až A.

Prajem vám úspešný štart v novom školskom roku.

Martin Hriňák



Málo pozorovateľné jubileum
(20 rokov vydávania časopisu MATMIX)



Matematika je široká nádherná krajina, otvorená pre všetkých, ktorým myslenie prináša skutočnú radosť (W. Fuchs). Už dlhšie než 20 rokov uznávame túto myšlienku ako zdroj optimizmu pri šírení matematickej kultúry v našich základných aj stredných školách. Možno k tomu chcel a ešte chce prispievať časopis MATMIX, ktorý mal obsahovať zaujímavé články z rôznych oblastí matematiky, jej histórie, zadania a výsledky úloh z rôznych matematických súťaží (napr. Matematickej olympiády, Medzinárodnej matematickej olympiády a pod.). V neposlednom rade bola (a ešte je) v ňom organizovaná korešpondenčná súťaž pre žiakov základných a stredných škôl, v ktorej môžu riešiť menej obťažné, ale aj náročnejšie matematické úlohy.

Časopis MATMIX vznikol ako *Matematický časopis pre ôsmakov a stredoškolákov* v Metodickom centre na Tomášikovej ulici v Bratislave. Nulté číslo nultého ročníka vyšlo koncom školského roka 1994/95, zodpovedný redaktor bol Milan Maxian. V školskom roku 1995/96 vyšli 4 čísla časopisu a letná príloha (ako číslo 5). Od školského roka 1997/98 bol šéfredaktorom M. Maxian a časopis mal podtitul *Matematický časopis pre ôsmakov, deviatakov a stredoškolákov*. Od 7. ročníka (2001/2002) rozšíril časopis svoj záber aj na 1. stupeň ZŠ, preto mal podtitul *Matematický časopis pre žiakov základných a stredných škôl*. Od školského roka 1997/98 (10. ročník) sa stal šéfredaktorom časopisu Ľudovít Hrdina. Od školského roka 2006/07 je šéfredaktorom časopisu Martin Hriňák. Časopis MATMIX vychádzal v školských rokoch 2006/07 a 2007/08 (t. j. 12. a 13. ročník) v náklade 1 500 – 1 800 kusov. Štrnástym ročníkom (2008/09) sa časopis stal aj pomocnou literatúrou pre predmetové komisie matematiky a vychádza v náklade 100 – 150 kusov. Počas 19 ročníkov vyšlo 85 čísel časopisu. V nich mal D. Jedinák asi 76 životopisných medailónov o významných matematikoch. Skoro každé číslo časopisu malo na prvej stránke obálky sympatický citát z prostredia matematickej kultúry. Obálky časopisu boli vždy farebné, počet použitých farieb som si netrúfol určiť. Asi všetky jednotlivé výtlačky mám vo svojej knižnici. Ak ste aspoň trochu zvedaví, posúďte sami, nielen tento ročník tohto časopisu, ale aj tie, ktoré sú uvedené na webovej stránke http://www.matmix.sk/.



Na to, aby jubilejný ročník nebol aj posledný, bolo potrebné získať riadny pozitívny impulz technicko-organizačný i didakticko-motivačný. Obsah časopisu musí byť

pestrejší, motivačne podnetnejší s dlhodobejšou perspektívou. Mal by zaujať nielen celé spektrum žiakov a študentov, ale aj ich učiteľov. V podpore spolupráce medzi ambicióznymi čitateľmi vidím budúcnosť takto šírenej matematickej kultúry v školách. Uverím až vtedy, keď si prakticky každá základná aj stredná škola objedná (pre svojich pedagogických účastníkov) aspoň jeden výtlačok MATMIX-u.

Nie som si istý, či ešte môžem byť užitočný. Pripájam aspoň ukážku podnetných didakticko-motivačných úloh:

1. Ako si zapamätať číslo π na 30 desatinných miest?

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327 9...$$

Mám, ó bože, ó dobrý, zapamätať si takýto čísel rad. Veľký slovútny Archimedes, pomáhaj trápenému, daj mu moc naspamäť znať krásne aj slávne síce, ale tak protivné nám, ach, číslice Ludolfove.

(Počet písmen v jednotlivých slovách je príslušná číslica v desatinnom vyjadrení π.)

2. Nečakané vyjadrenie – rovnica srdca:



Znázornite v ortonormálnej sústave súradníc binárnu reláciu

$$y = \frac{2}{3}\left\{\frac{x^2 + |x| - 6}{x^2 + |x| + 2} \pm \sqrt{36 - x^2}\right\}$$

3. Rozdelenie koristi – spravodliví zbojníci: Ako si traja zbojníci rozdelia rôznorodú korisť, ak si navzájom nedôverujú a každý z nich je presvedčený, že dokáže korisť rozdeliť na rovnocenné časti?

4. Rozhovor dvoch matematikov:



A: *Súčin veku mojich troch synov je 36.*
B: *Táto informácia nestačí na určenie veku každého z nich.*
A: *Súčet veku synov je rovnaký ako počet okien na dome, ktorý vidíme pred sebou.*
B: *Ani teraz sa nedá určiť vek tvojich synov.*
A: *Najstarší z mojich synov má čierne vlasy.*
B: *Ďakujem, to mi stačí. Už poznám vek tvojich synov.*

Koľko rokov má každý z matematikových synov a koľko okien bolo na budove, ktorú videli pred sebou?

5. Štvorec iba kružidlom

Zostrojte všetky vrcholy štvorca *ABCD*, ale iba kružidlom, ak sú dané vrcholy *A*, *B*.

6. Nežný cit a pravdepodobnosť:
Desať ľudí si náhodne sadne okolo okrúhleho stola. Aká je pravdepodobnosť, že určití dvaja ľudia budú sedieť vedľa seba?

7. Čo je výhodnejšie pre pracovníkov?
Máte rozhodnúť, buď znížiť ceny výrobkov o 10 % a nemeniť platy pracovníkov, alebo nemeniť ceny výrobkov a zvýšiť o 10 % platy. Zdôvodnite, čo je výhodnejšie pre pracovníkov.

8. Taký trojuholník neexistuje
Ukážte, že neexistuje trojuholník, ktorého výšky by mali veľkosť 1, 2, 3 (dĺžkových jednotiek).

9. Aj taký existuje?
Dokážte, že v rovine existuje trojuholník, ktorého všetky výšky sú menšie než 1 cm a obsah trojuholníka je väčší ako milión cm^2.

10. Záhada dvanástich dukátov
Medzi dvanástimi dukátmi je jeden falošný (nemá rovnakú hmotnosť ako ostatné). Stanovte postup, akým nájdete tento falošný dukát najviac tromi váženiami na rovnoramenných váhach.

Prajem tvorcom i užívateľom časopisu MATMIX, aby mali šťastnú ruku a v nej obľúbený zdroj podnetov pre výchovnovzdelávaciu prácu. Dvadsaťročné skúsenosti nemusia byť na zahodenie. Tým, ktorí nevzdali zápas o matematickú kultúru v našich školách, úprimne ďakujem.

Dušan Jedinák
emeritný učiteľ počtov a merby z Topoľčian
http://www.era.topindex.sk/



Antoni S. Zygmund – matematický analytik 20. storočia

Pozoruhodná spolupráca

Ovplyvnil viac než 80 svojich doktorandov, z ktorých mnohí dosiahli podnetné matematické výsledky. V zoznamoch jeho študentov a spolupracovníkov môžeme nájsť významné osobnosti modernej matematiky: A. Calderón (1920 – 1998), argentínsky matematik), P. Cohen (1934 – 2007), N. Fine (1916 – 1994), Elias Stein (*1931, matematik v Princetone, ocenený aj Wolfovou cenou), J. Marcinkiewicz (1910 – 1940). V Anglicku spolupracoval s G. Hardym (1877 – 1947) i J. Littlewoodom (1855 – 1977), neskôr aj s N. Wienerom (1894 – 1964). Získal aj pozoruhodné ocenenia, napr. členstvo v národných akadémiách USA (1961), Poľska (1959), Argentíny (1964) a Španielska (1967). Získal čestné doktoráty univerzít vo Washingtone, Toruni, Paríži, Uppsale i Palerme, V USA dostal (1986) Národnú medailu za vedu ako ocenenie výsledkov matematického výskumu.

Životný osud

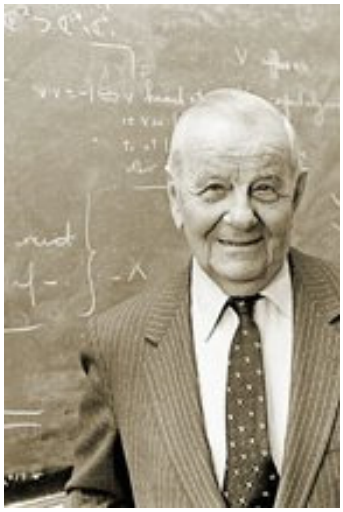


Antoni Szczepan Zygmund sa narodil 25. decembra 1900 vo Varšave. Pochádzal z vidieckej rodiny rozdeleného Poľska. Bol najstarším medzi štyrmi súrodencami. V roku 1914 bola ich rodina evakuovaná do Poltavy na Ukrajine, odkiaľ sa vrátili až v roku 1918. Po ukončení gymnázia nastúpil na univerzitu vo Varšave (1919). Obľúbenú astronómiu nemohol študovať, lebo tento vedný odbor sa v tom čase neotváral, tak sa rozhodol pre matematiku. Jeho matematické záujmy veľmi ovplyvnili matematici *Mazurkiewicz*, *Sierpiński* a *Janiszewski*. Najviac sa do jeho srdca zapísal učiteľ A. Rajchman a spolužiak S. Saks. V roku 1923 ukončil štúdia doktorátom a začal vyučovať na varšavskej polytechnike (1922 – 1929). Zygmund sa v roku 1925 oženil a v roku 1926 habilitoval na univerzite. Na študijnom pobyte v Anglicku bol v školskom roku 1929/30. Potom bol menovaný za učiteľa na univerzite vo Vilniuse. V roku 1940 odišiel s manželkou a synom z obsadeného Poľska do Spojených štátov amerických. Pôsobil v MIT (Massachusetts Institute of Technology), na univerzite v Michigene a v Pensylvánii, od roku 1947 až do odchodu na dôchodok (1980) pôsobil na univerzite v Chicagu. Zomrel 30. mája roku 1992.



Odborné výsledky

Antoni Zygmund napísal 6 kníh a okolo 200 vedeckých pojednaní. Stal sa symbolom úspechov harmonickej analýzy, matematickej teórie miery a integrálu. Medzi jeho najvýznamnejšie práce patria s Calderónom vypracované pojednania o singulárnych integrálnych operátoroch. Calderónov-Zygmundov rozklad patrí k najhlbším myšlienkam v modernej harmonickej analýze. Veľmi známe a uznávane sa stali publikácie *Goniometrické rady* (1935, 1959, 2002), *Analytické funkcie* (1938) a *Miera a integrál* (1977). Profesor Zygmund sa stal zakladateľom Chicagskej školy matematickej analýzy, ktorá sa orientovala na Fourierovu analýzu a jej aplikácie v oblasti riešenia parciálnych diferenciálnych rovníc. Vo svojich prácach študoval zovšeobecnenia Fourierových radov a Fourierovej transformácie. Základnou myšlienkou celej harmonickej analýzy je skladanie funkcií. Tento odbor má široké praktické využitie, napr. v spracovaní elektromagnetických signálov, v kvantovej mechanike alebo aj v neurológii. Fourierova transformácia sa dnes v digitálnom svete využíva aj na niektoré populárne grafické, či zvukové formáty (napr. JPEG či MP3) ako prostriedok na kompresiu údajov.



Teória, prax, kultúra

Významný matematik Antoni Zygmund (*25. 12. 1900 – †30. 5. 1992) sa stal uznávaným aj ako vysokoškolský učiteľ. O jeho pojednaní *Miera a integrál* (1977) napísal Richard L. Wheeden: *Táto učebnica bola koncipovaná s výslovným zámerom poskytovať jednoduchý a rýchly prístup k najužitočnejším technikám miery a integrácie v modernej analýze reálnej premennej. Tento cieľ bol dosiahnutý s veľmi pozoruhodným úspechom.* Publikácia *Goniometrické rady* bola a stále je jednou z najvplyvnejších kníh v histórii matematickej analýzy. *Jej obrovská dlhovekosť (vyšla v niekoľkých vydaniach) je svedectvom o jej hĺbke a zrozumiteľnosti* (Robert A. Fefferman).



Láskavý a veľkorysý človek Antoni Zygmund bol jedným z najvplyvnejších analytikov svojej doby. Prispel k prehĺbeniu významu i rozšíreniu použitia matematickej kultúry v 20. storočí.

Dušan Jedinák

Korešpondenčná súťaž v školskom roku 2015/2016

Redakcia časopisu MATMIX vyhlasuje v tomto školskom roku korešpondenčnú súťaž pre žiakov základných a stredných škôl. Zapojiť sa do nej môžu všetci, ktorí majú záujem o matematiku a sú ochotní venovať niekoľko minút riešeniu úloh. V školskom roku 2015/2016 bude mať korešpondenčná súťaž dve série. Zadania úloh budú uverejnené v prvom a druhom čísle časopisu. Výsledky korešpondenčnej súťaže budú priebežne zverejňované aj na internete na našej webovej stránke *www.matmix.sk*.

Žiakom druhého stupňa základnej školy a žiakom 1. až 4. ročníka osemročných gymnázií je určená kategória Z a sú pre nich určené úlohy č. 1 až 4. Prvákom stredných škôl a žiakom 5. ročníka osemročných gymnázií je určená kategória C s úlohami 3 až 6. Druhákom stredných škôl a žiakom 6. ročníka osemročných gymnázií je určená kategória B s úlohami 5 až 8. Tretiakom a štvrtákom stredných škôl a žiakom 7. a 8. ročníka osemročných gymnázií je určená kategória A s úlohami 7 až 10. Žiakom, ktorí majú záujem o náročnejšie úlohy, je určená kategória π. Pre túto kategóriu sú v každej sérii určené úlohy 11 až 14. V prípade, že máte nejasnosti v zadaní alebo máte iné otázky, môžete svoje pripomienky adresovať na e-mailovú adresu hrinak@matmix.sk.

Prihlášku do korešpondenčnej súťaže nám pošlite spolu s prvou sériou vašich riešení. Uveďte na nej svoje meno, priezvisko, školu, triedu a súťažnú kategóriu. Ak chcete dostávať svoje opravené riešenia s komentármi späť domov, napíšte nám to v prihláške a zašlite nám dve známky v hodnote 0,9 € (podľa platného cenníka Slovenskej pošty, pričom riešenia môžeme zasielať aj viacerým riešiteľom na jednu adresu). Zaslaním svojich riešení na našu adresu nám udeľujete súhlas na spracovanie zaslaných osobných údajov v zmysle § 7 zákona č. 428/2002 Z. z. o ochrane osobných údajov v platnom znení na spracúvanie týchto osobných údajov za účelom evidencie súťažiacich v korešpondenčnej súťaži časopisu MATMIX a pri jej vyhodnocovaní, za účelom vykonávania marketingových činností, napr. zasielania informačných mailov. Súčasne súhlasíte s využitím svojej e-mailovej adresy za účelom doručovania informácií a so zverejnením nasledujúcich údajov vo výsledkovej listine: meno, priezvisko, ročník, počet bodov, umiestnenie, škola. Súhlas sa poskytuje na dobu neurčitú a môže byť kedykoľvek odvolaný prostredníctvom písomného oznámenia o odvolaní doručeného do redakcie. Zároveň potvrdzujete, že ste boli riadne poučení o existencii práv dotknutej osoby uvedených v § 20 Zákona.

Upozorňujeme vás, aby ste riešenia písali **čitateľne** na papiere **formátu A4** (kancelársky papier) a na každé riešenie napísali **hlavičku** – svoje **meno, školu a číslo úlohy**. V prípade, že sa riešenie jednej úlohy nachádza na viacerých papieroch,

zopnite ich. Na jednom papieri nemôžu byť napísané riešenia viacerých úloh. **Hodnotiť budeme len také riešenia, ktoré budú spĺňať tieto kritériá.**

Do súťaže sa môžete zapojiť aj v druhej sérii. Podmienkou zaradenia do súťaže je aj v takomto prípade zaslanie prihlášky spolu s riešeniami, ktoré vypracujete.

Riešenia súťažných úloh vypracujte sami! V prípade, že zistíme, že nejaká skupina navzájom odpisovala, **každý** jej člen dostane za danú úlohu 0 bodov, aj keby bolo riešenie správne. Plný počet bodov (5) patrí len úplnému riešeniu. Preto treba zdôvodniť všetky tvrdenia, ktoré v riešení použijete. V prípade, že použijete vetu alebo tvrdenie, ktoré nie je všeobecne známe, uveďte aj literatúru, kde sa nachádza jeho dôkaz. Uvedenie iba výsledku nie je postačujúce. Ak niektorá úloha nemá riešenie, treba ukázať, prečo ho nemá.

Riešenia každej série zasielajte do uvedeného termínu – rozhoduje pečiatka na obálke (nezabudnite na pekné známky) Ak pošlete riešenia po tomto termíne, strhneme vám za každý deň omeškania jeden bod (pod 0 bodov však klesnúť nemôžete). Svoje riešenia píšte v slovenskom jazyku. Riešenia zasielajte na adresu:

Ing. Mgr. Martin Hriňák
MATMIX
Bratislavská 716/2
900 46 Most pri Bratislave

V prípade, že nebudete spokojní s ohodnotením vášho riešenia, môžete nám poslať reklamáciu spolu s vaším riešením, odôvodnením a požadovaným počtom bodov. Vaše riešenie si ešte raz prezrieme a oznámime vám výsledok.

Veľa zážitkov a krásnych chvíľ pri riešení súťažných úloh vám praje redakcia časopisu MATMIX.

Prihláška do korešpondenčnej súťaže časopisu MATMIX

Priezvisko: ..... Meno: .....

Kategória: ..... Trieda: .....

Škola: .....

E-mail: .....

Podpis: .....

Skôr než začnete písať svoje riešenia

Vzhľadom na skúsenosti z minulých rokov sme sa rozhodli uverejniť zopár rád, ktoré vám môžu pomôcť pri písaní vášho riešenia, presnejšie, akých chýb sa máte vyvarovať.

Mnohí z vás používajú pri dokazovaní rovnosti dvoch čísel kalkulačku. Takéto riešenia nikdy nebudú hodnotené ako správne z jednoduchého dôvodu – kalkulačky majú len obmedzenú presnosť, a ak vám vyjde na kalkulačke, že sa dve čísla rovnajú, neznamená to nutne, že sa rovnajú aj v skutočnosti. Možno sa líšia už na prvom nezobrazovanom desatinnom mieste. Kalkulačku teda nemôžete používať na dokazovanie rovností. V prípade dokazovania nerovností ju však už môžete využiť v rozumnej miere – teda pri zisťovaní rozdielov na prvých dvoch – troch desatinných miestach. Napríklad na skonštatovanie, že $\pi^2 < 10$.

K riešeniam pomocou počítača: Je veľa úloh, v ktorých treba vyskúšať veľmi veľa možností, ak človek nenájde šikovnú skratku, ktorá mu počet týchto možností zníži. Preto napríklad riešenie typu „vyskúšame všetky možnosti“ nebude hodnotené ako správne. A to aj v prípade, že by ste v riešení uviedli úvahy o tom, že možností je len konečne veľa a podobne. V prípade, že chcete, aby ste za takéto riešenie získali nenulový počet bodov, musíte všetky možnosti vypísať, aby ste zistili, že to nie je tá správna cesta.

Taktiež si treba uvedomiť, že ak vypíšete niekoľko možností a pri nich dokážete, že tvrdenie platí, nie je to dôkaz tvrdenia vo všeobecnosti.

V prípade, ak máte dokázať nejaké tvrdenie a postupujete spôsobom, že predpokladáte platnosť tohto tvrdenia a dospejete k pravdivému tvrdeniu, tak ste nedokázali vôbec nič. Uvedieme príklad: Predpokladajme, že $1 = 2$. Vynásobením oboch strán rovnosti nulou dostávame pravdivé tvrdenie $0 = 0$. Môžeme teraz tvrdiť, že sme dokázali platnosť tvrdenia $1 = 2$? Sami vidíte, že sme nič nedokázali... Ak však používame ekvivalentné úpravy, už je to iné. Ale to treba spomenúť.

Pri písaní svojich riešení dávajte pozor aj na označenie, aby bolo jasné, čo čo znamená. Pri nesprávnom označení môžete stratiť body, aj keď je riešenie v princípe správne. Ďalej treba dávať pozor aj na to, aby ste na dvoch rôznych miestach neoznačili jedným označením dve rôzne skutočnosti.

Na záver vám odporúčame, aby ste si svoje riešenia nakoniec vždy ešte raz prečítali. Možno sami zistíte, že tomu, čo ste napísali, nerozumiete ani vy sami, lebo opravovatelia nemajú telepatické schopnosti.

Martin Hriňák

Zadania 1. série úloh korešpondenčnej súťaže

1. Stretli sa lev a zajac. O levovi je známe, že v pondelok, utorok a stredu vždy klame, ale v ostatné dni hovorí pravdu. O zajacovi je známe, že klame vždy vo štvrtok, piatok a sobotu a v ostatné dni hovorí pravdu.

Lev hovorí: „Včera sa na mňa usmiala krásavica Elza!“

Zajac: „Aj na mňa sa usmiala. A aký si mal včera deň?“

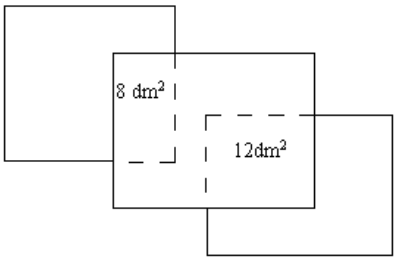
Lev: „Klamací. A ty?“

Zajac: „Klamací.“

Ktorý deň v týždni sa stretli lev a zajac a na ktorého z nich sa usmiala Elza?

2. V biochemickom laboratóriu skúmajú rýchlosť rozmnožovania dvoch nových druhov baktérií. Do jednej skúmavky dali niekoľko baktérií druhu Bacillus Acos, do druhej skúmavky dali 3-krát viac baktérií druhu Bacillus Becos. O 24 hodín mali mali v prvej skúmavke 500 000 baktérií druhu Bacillus Acos, v druhej 1 000 000 baktérií druhu Bacillus Becos. V oboch skúmavkách pribudlo za 24 hodín rovnako veľa baktérií. Koľko baktérií druhu Bacillus Acos bolo na začiatku v skúmavke?

3. Reklamná firma vyrába seriálové reklamné plagáty. Lepí ich na obdĺžnikové bilbordy s rozmermi 1,5 m a 2 m. Najprv nalepí na bilbord dva plagáty s neúplnými informáciami o nejakom výrobku a po týždni ich čiastočne prelepí tretím plagátom, ktorým informáciu doplní. Tretí plagát nalepí tak, aby viditeľné časti všetkých troch plagátov mali rovnaký obsah. Všetky plagáty tejto firmy, aj tretím plagátom prekryté časti, majú tvar obdĺžnika s celočíselnými rozmermi v decimetroch. Na obrázku je znázornená časť bilbordu s trojicou plagátov. Posledný z trojice plagátov má rozmery 5 dm x 8 dm. Prekryté časti majú obsahy 8 dm^2 a 12 dm^2. Aké rozmery mali prvé dva plagáty?



4. Jano a Jaro sa radi hrajú Človeče nehnevaj sa. V tejto hre veľa hádžu hracími kockami a snažia sa na ne zapôsobiť. Napríklad tak, že im rozprávajú hádanky. Prípadne aj sebe. „Ak by som zobral kocku, ktorá by mala stranu dvakrát väčšiu

než moja a vážila štyrikrát toľko ako moja, tak by som zistil, že má štyrikrát väčšiu hustotu, než má voda.“ Koľko váži moja kocka, ak jedna strana má dĺžku 5 cm?

5. Judita a Petra trénujú cezpoľný beh v mestskom lesoparku. Judita prebehne trať od zastávky autobusu po studničku za 12 minút, Petra za 20 minút. Vyštartovali súčasne od zastávky. Keď Judita dobehla k studničke, otočila sa a bežala späť po tej istej ceste. O chvíľu sa stretla s Petrou. Po koľkých minútach od ich stretnutia dobehla Petra k studničke?

6. Dokážte, že z ľubovoľnej sedmice prirodzených čísel dokážeme vybrať dve také, ktorých súčet alebo rozdiel bude deliteľný desiatimi.

7. Predpokladajme, že každý bod roviny je ofarbený jednou z dvoch farieb. Dokážte, že potom pre jednu z týchto dvoch farieb platí, že pre každé kladné reálne číslo existuje dvojica bodov ofarbených touto farbou, ktorých vzdialenosť sa rovná tomuto číslu.

8. Dokážte, že číslo $2^{1092}-1$ je deliteľné číslom 1093^2.

9. Nájdite všetky prirodzené čísla *m*, *n*, ktoré sú riešeniami rovnice $2^m-3^n=7$.

10. Zistite, či existuje množina 4 024 takých prirodzených čísel, že súčet čísel ľubovoľnej 2 013-prvkovej podmnožiny tejto množiny nie je deliteľný číslom 2 013.

11. Nech *a*, *b*, *c* sú kladné reálne čísla, ktorých súčin nie je väčší ako ich súčet. Dokážte, že potom platí nerovnosť

$$a^2+b^2+c^2\geq\sqrt{3}abc.$$

12. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je definovaná predpisom $a_{n+1}=3a_n-a_{n-1}$, pričom $a_1=20$, $a_2=30$. Nájdite všetky prirodzené čísla *n*, pre ktoré je $5a_{n+1}a_n+1$ druhou mocninou celého čísla.

13. Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla *n* platí nasledujúca nerovnosť:

$$\left(2n^2+3n+1\right)^n\geq 6^n\cdot\left(n!\right)^2$$

Termín odoslania riešení úloh 1. série: do 18. 11. 2015

Riešenia zasielajte na adresu:

Ing. Mgr. Martin Hriňák
MATMIX
Bratislavská 716/2
900 46 Most pri Bratislave

Čriepky z histórie matematickej kultúry

Aj na prvých univerzitách študovali matematiku

Koncom 11. storočia boli v kresťanskej Európe len kláštorné a katedrálne školy (v roku 529 vznikla rehoľa benediktínov (*modli sa a pracuj*), v roku 1084 rehoľa kartuziánov a v roku 1098 rehoľa cisterciánov). Králi a pápeži obdobia vrcholnej scholastiky začali zakladať prvé univerzity (*universitas magistrorum et scholarium* – spoločenstvo (združenie, komunita) učiteľov a študentov). Najskôr vznikali len jednotlivé fakulty (právnická v Bologni asi 1088 – 1119, lekárska v Salerne okolo roku 1150). Neskôr a postupne všetky fakulty (teologická, právnická, lekárska a filozofická) s právom slobodne vyučovať a študovať, usmerňovať duchovnú činnosť smerom k múdrosti.

Matematika sa študovala v rámci siedmich slobodných umení. Medzi mestá s najstaršími univerzitami patria: **Bologna** (1148), **Paríž** (1150), **Oxford** (1167), Montpelier (1181), Modena (1182), Cambridge (1209), Padova (1222), Neapol (1224), Salamanka (1225), Toulose (1229), **Praha** (1348), Krakov (1364), Viedeň (1365), Heidelberg (1368), **Bratislava** (1467).

Vyjadrenie z 13. storočia

V polovici trinásteho storočia bol známy ako matematik aj **Jordanus Nemorarius** (asi 1225 – 1260), autor *prác Aritmetika vyložená v desiatich knihách, O trojuholníku, Objasnenie algoritmu, Objasnenie zlomkov, O daných číslach.* V tej posledne menovanej publikácii je ukázané, ako sa dajú určiť dve čísla, ak poznáme ich súčet a rozdiel. Pretože vtedy sa riešenia matematických úloh vyjadrovali slovne, posúďme výhody dnešného symbolického zápisu. Spomínanú úlohu riešili takto: *Pretože menší diel a rozdiel tvoria spolu väčší diel, tak menší diel so sebou samým a s rozdielom dáva celok. Teda ak bol rozdiel odčítaný od celku, bude daný dvojnásobok menšieho dielu. Ak ten bude rozpolený, bude tým daný menší diel a tým aj diel väčší.*

Zapíšme to dnešnými zvykmi: Označme si sčítance x, y a nech je y väčší z nich. Potom text slovného riešenia znamená toto:

$$x + (y - x) = y,$$
$$x + x + (y - x) = x + y,$$
$$(x + y) - (y - x) = 2x,$$
$$x = [(x + y) - (y - x)] : 2.$$

V dnešných učebniciach by to bolo ako riešenie sústavy $x + y = s$, $y - x = d$, kde s je daný súčet a d daný rozdiel, odčítaním druhej rovnice od prvej dostaneme, že platí $2x = s - d$, tým $x = (s - d)/2$. Teda to, čo hovorí slovne Nemorarius z polovice 13. storočia.

Zadania úloh domáceho kola 65. ročníka Matematickej olympiády

Kategória Z5

1. Čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9 cestovali vlakom. Vlak mal tri vagóny a v každom sa viezli práve tri čísla. Číslo 1 sa viezlo v prvom vagóne a v poslednom vagóne boli všetky čísla nepárne. Sprievodca cestou spočítal súčet čísel v prvom, druhom aj poslednom vagóne a zakaždým mu vyšiel rovnaký súčet. Určte, ako mohli byť čísla do vagónov rozdelené.

(Veronika Hucíková)

2. Marta niesla svojej chorej kamarátke Majke 7 jabĺk, 6 hrušiek a 3 pomaranče. Cestou ale dva kusy ovocia zjedla. Určte, ktoré z nasledujúcich situácií mohli nastať a aké dva kusy ovocia by Marta v takom prípade musela zjesť:

a) Majka nedostala žiadny pomaranč.
b) Majka dostala menej hrušiek ako pomarančov.
c) Majka dostala rovnaký počet jabĺk, hrušiek aj pomarančov.
d) Majka dostala rovnaký počet kusov ovocia dvojakého druhu.
e) Majka dostala viac jabĺk ako ostatných kusov ovocia dokopy.

(Libuše Hozová)

3. Mamička vyprala štvorcové utierky a vešia ich vedľa seba na bielizňovú šnúru natiahnutú medzi dvoma stromami. Použila šnúru s dĺžkou 7,5 metra, pričom na uviazanie okolo kmeňov potrebovala na každej strane 8 dm. Všetky utierky majú šírku 45 cm. Medzi krajnou utierkou a kmeňom mamička necháva medzeru aspoň 10 cm, utierky sa jej neprekrývajú a nemá ich zložené ani skrčené. Koľko najviac utierok môže takto zavesiť na natiahnutú šnúru?

(Lenka Dedková)

4. Keď pán Baran zakladal chov, mal bielych oviec o 8 viac ako čiernych. V súčasnosti má bielych oviec štyrikrát viac ako na začiatku a čiernych trikrát viac

ako na začiatku. Bielych oviec je teraz o 42 viac ako čiernych. Koľko teraz pán Baran chová bielych a čiernych oviec dokopy?

(Ľuboš Šimůnek)

5. Štvorcová sieť sa skladá zo štvorcov so stranou dĺžky 1 cm. Narysujte do nej aspoň tri rôzne útvary také, aby každý mal obsah 6 cm^2 a obvod 12 cm a aby ich strany splývali s priamkami siete.

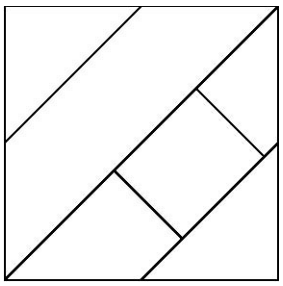
(Eva Semerádová)

6. V nepriestupnom roku bolo 53 nedieľ. Na aký deň týždňa pripadol Štedrý deň?

(Marta Volfová)

Kategória Z6

1. Archeológovia zistili, že vlajka bájneho matematického kráľovstva bola rozdelená na šesť políčok, tak ako na obrázku. V skutočnosti bola vlajka trojfarebná a každé políčko bolo vyfarbené jednou farbou. Vedci už vybádali, že na vlajke bola použitá červená, biela a modrá farba, že vnútorné obdĺžnikové políčko bolo biele a že spolu nesusedili dve políčka rovnakej farby. Určte, koľko možností vzhľadu vlajky musia archeológovia v tejto fáze výskumu zvažovať.

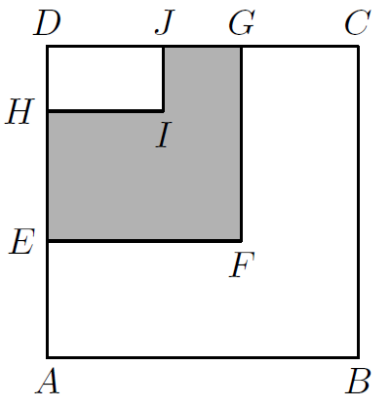


(Veronika Hucíková)

2. Juraj išiel do služby k čarodejníkovi. Ten mal v prvej pivnici viac múch ako pavúkov, v druhej naopak. V každej pivnici mali muchy a pavúky dokopy 100 nôh. Určte, koľko mohlo byť múch a pavúkov v prvej a koľko v druhej pivnici.

(Marie Krejčová)

3. Na obrázku je štvorec *ABCD*, štvorec *EFGD* a obdĺžnik *HIJD*. Body *J* a *G* ležia na strane *CD*, pričom platí $|DJ| < |DG|$, a body *H* a *E* ležia na strane *DA*, pričom platí $|DH| < |DE|$. Ďalej vieme, že $|DJ| = |CG|$. Šesťuholník *ABCGFE* má obvod 96 cm, šesťuholník *EFGJIH* má obvod 60 cm a obdĺžnik *HIJD* má obvod 28 cm. Určte obsah šesťuholníka *EFGJIH*.



(Ľuboš Šimůnek)

4. Na obrázku je obdĺžnik rozdelený na 7 políčok. Na každé políčko sa má napísať práve jedno z čísel 1, 2 a 3. Miro tvrdí, že sa to dá spraviť tak, aby súčet dvoch vedľa seba napísaných čísel bol zakaždým iný. Zuzka naopak tvrdí, že to nie je možné. Rozhodnite, kto z nich má pravdu.



(Veronika Hucíková)

5. Pán Cuketa mal obdĺžnikovú záhradu, ktorej obvod bol 28 metrov. Obsah celej záhrady vyplnili práve štyri štvorcové záhony, ktorých rozmery v metroch boli vyjadrené celými číslami. Určte, aké rozmery mohla mať záhrada. Nájdite všetky možnosti.

(Libuše Hozová)

6. V zámockej kuchyni pripravujú rezancovú polievku v hrncoch a kotloch. V pondelok uvarili 25 hrncov a 10 kotlov polievky. V utorok uvarili 15 hrncov a 13 kotlov. V stredu uvarili 20 hrncov a vo štvrtok 30 kotlov. Pritom v pondelok a v utorok uvarili rovnaké množstvo polievky. Koľkokrát viac polievky uvarili vo štvrtok ako v stredu?

(Karel Pazourek)

Kategória Z7

1. Myška Hryzka našla 27 rovnakých kocôčok syra. Najskôr si z nich poskladala veľkú kocku a chvíľu počkala, kým sa syrové kocôčky k sebe prilepili. Potom z každej steny veľkej kocky vyhrýzla strednú kocôčku. Napokon zjedla aj kocôčku, ktorá bola v strede veľkej kocky. Zvyšok syra chce Hryzka spravodlivo rozdeliť svojim štyrom mláďatám, a preto ho chce rozrezať na štyri kusy rovnakého tvaru aj veľkosti. Rezať bude iba pozdĺž stien kocôčok a nič k sebe už lepiť nebude. Aký tvar môžu mať kusy syra pre mláďatá? Nájdite aspoň dve možnosti.

(Veronika Hucíková)

2. Vlčkovci majú 4 deti. Ondrej je o 3 roky starší ako Matej a Jakub o 5 rokov starší ako najmladšia Jana. Vieme, že majú dokopy 30 rokov a pred 3 rokmi mali dokopy 19 rokov. Určte, koľko má ktoré dieťa rokov.

(Marta Volfová)

3. Vnútri pravidelného päťuholníka ABCDE je bod P taký, že trojuholník ABP je rovnostranný. Aký veľký je uhol BCP?

(Libuše Hozová)

4. V škole pre robotov do jednej triedy chodí dvadsať robotov Robertov, ktorí sú očíslovaní Robert 1 až Robert 20. V triede je práve napätá atmosféra, rozprávajú sa spolu iba niektorí roboti. Roboti s nepárnym číslom sa nerozprávajú s robotmi s párnym číslom. Medzi Robertmi s nepárnym číslom sa spolu rozprávajú iba roboti, ktorí majú číslo s rovnakým počtom cifier. Roberti s párnym číslom sa rozprávajú iba s tými, ktorých číslo začína rovnakou cifrou. Koľko dvojíc robotov Robertov sa môže spolu navzájom rozprávať?

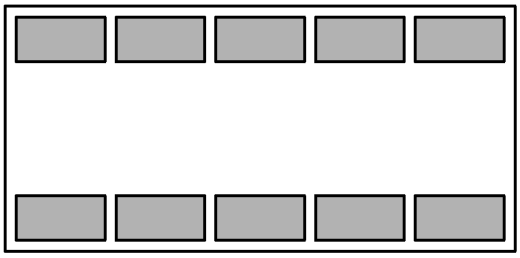
(Karel Pazourek)

5. V kocúrkovskej škole používajú zvláštnu číselnú os. Vzdialenosť medzi číslami 1 a 2 je 1 cm, vzdialenosť medzi číslami 2 a 3 je 3 cm, medzi číslami 3 a 4 je 5 cm a tak ďalej: vzdialenosť medzi každou nasledujúcou dvojicou prirodzených čísel sa vždy zväčší o 2 cm. Medzi ktorými dvoma prirodzenými číslami je na kocúrkovskej číselnej osi vzdialenosť 39 cm? Nájdite všetky možnosti.

(Karel Pazourek)

6. Na výstave dlhosrstých mačiek sa zišlo spolu desať vystavujúcich. Vystavovalo sa v obdĺžnikovej miestnosti, v ktorej boli dva rady stolov ako na obrázku. Mačky boli označené navzájom rôznymi číslami v rozsahu 1 až 10 a na každom stole sedela jedna mačka. Určte číslo mačky, ktorá bola na výstave hodnotená najlepšie, ak viete, že:

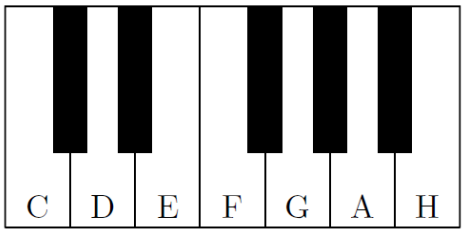
- súčet čísel mačiek sediacich oproti sebe bol vždy rovnaký,
- súčet čísel každých dvoch mačiek sediacich vedľa seba bol párny,
- súčin čísel každých dvoch mačiek sediacich vedľa seba v dolnom rade bol násobok čísla 8,
- mačka číslo 1 nebola na kraji a bola viac vpravo ako mačka číslo 6,
- vyhrala mačka sediaca v pravom dolnom rohu.



(Martin Mach)

Kategória Z8

1. Mišo mal na poličke malú klaviatúru, ktorú vidíte na obrázku. Na bielych klávesoch boli vyznačené ich tóny. Klaviatúru našla malá Klára. Keď ju brala z poličky, vypadla jej z ruky a všetky biele klávesy sa z nej vysypali. Aby sa brat nehneval, začala ich Klára skladať späť. Všimla si pritom, že sa dali vložiť iba na niektoré miesta, lebo im prekážali čierne klávesy umiestnené presne doprostred medzi dva biele. Kláre sa podarilo klávesy nejako zložiť, avšak tóny na nich boli pomiešané, keďže ešte nepoznala hudobnú stupnicu. Zistite, koľkými spôsobmi mohla Klára klávesy poskladať.



(Erika Novotná)

2. Na lúke sa pasú kone, kravy a ovce, spolu ich je menej ako 200. Keby bolo kráv 45-krát viac, koní 60-krát viac a oviec 35-krát viac ako ich je teraz, ich počty by sa rovnali. Koľko sa spolu na lúke pasie koní, kráv a oviec?

(Marie Krejčová)

3. Daný je rovnoramenný lichobežník $ABCD$, v ktorom platí

$$|AB| = 2 \cdot |BC| = 2 \cdot |CD| = 2 \cdot |DA|.$$

Na jeho strane BC je bod K taký, že $|BK| = 2 \cdot |KC|$, na jeho strane CD je bod L taký, že $|CL| = 2 \cdot |LD|$, a na jeho strane DA je bod M taký, že $|DM| = 2 \cdot |MA|$. Určte veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka KLM.

(Jaroslav Zhouf)

4. V komore, kde sa rozbilo svetlo a všetko z nej musíme brať naslepo, máme ponožky štyroch rôznych farieb. Ak si chceme byť istí, že vytiahneme aspoň dve biele ponožky, musíme ich z komory priniesť 28. Aby sme mali takú istotu pre sivé ponožky, musíme ich priniesť tiež 28, pre čierne ponožky stačí 26 a pre modré ponožky 34. Koľko je spolu v komore ponožiek?

(Eva Semerádová)

5. Číslo dňa je poradové číslo daného dňa v príslušnom mesiaci (teda napr. číslo dňa 5. augusta 2016 je 5). Ciferný súčet dňa je súčet hodnôt všetkých cifier v dátume tohto dňa (teda napr. ciferný súčet dňa 5. augusta 2016 je 5 + 8 + 2 + 0 + 1 + 6 = 22). Šťastný deň je taký deň, ktorého číslo dňa je rovné ciferného súčtu dňa. Určte, koľko šťastných dní je v roku 2016 a ktoré dni to sú.

(Lucie Růžičková)

6. Katka narysovala trojuholník ABC. Stred strany AB označila X a stred strany AC označila Y . Na strane BC chce nájsť taký bod Z, aby obsah štvoruholníka AXZY bol čo najväčší. Akú časť trojuholníka ABC môže maximálne zaberať štvoruholník AXZY?

(Alžbeta Bohiniková)

Kategória Z9

1. Objem vody v mestskom bazéne s obdĺžnikovým dnom je 6 998,4 hektolitrov. Propagačný leták uvádza, že keby sme chceli všetku vodu z bazéna preliať do pravidelného štvorbokého hranola s hranou podstavy rovnajúcou sa priemernej hĺbke bazéna, musel by byť hranol vysoký ako blízky televízny vysielač a potom by bol naplnený až po okraj. Dodávame, že keby sme chceli preplávať vzdialenosť rovnakú, ako je výška vysielača, museli by sme preplávať buď osem dĺžok, alebo pätnásť šírok bazéna. Aký vysoký je vysielač?

(Ľuboš Šimůnek)

2. Úžasným číslom nazveme také párne číslo, ktorého rozklad na súčin prvočísel má práve tri nie nutne rôzne činitele a súčet všetkých jeho deliteľov sa rovná dvojnásobku tohto čísla. Nájdite všetky úžasné čísla.

(Martin Mach)

3. Juro zostrojil štvorec *ABCD* so stranou 12 cm. Do tohto štvorca narysoval štvrťkružnicu *k*, ktorá mala stred v bode *B* a prechádzala bodom *A*, a polkružnicu *l*, ktorá mala stred v strede strany *BC* a prechádzala bodom *B*. Rád by ešte zostrojil kružnicu, ktorá by ležala vnútri štvorca a dotýkala sa štvrťkružnice *k*, polkružnice *l* aj strany *AB*. Určte polomer takej kružnice.

(Marta Volfová)

4. V tabuľke je kurzový lístok zmenárne, avšak niektoré hodnoty sú v ňom nahradené otáznikmi.

	nákup	predaj
1 EUR	26,20 CZK	28,00 CZK
1 GBP	? CZK	? CZK

Zmenáreň vymieňa peniaze v uvedených kurzoch a neúčtuje si iné poplatky.

1. Koľko eur dostane zákazník, ak tu zmení 4 200 českých korún? Ak zmenárnik vykúpi od zákazníka 1 000 libier a potom ich všetky predá, jeho celkový zisk je 2 200 českých korún. Keby namiesto toho zmenárnik predal 1 000 libier

a potom by všetky utŕžené české koruny zmenil s iným zákazníkom za libry, zarobil by na tom 68,75 libier.

2. Za koľko českých korún zmenárnik nakupuje a za koľko predáva 1 libru?

(Ľuboš Šimůnek)

5. Betka si myslela prirodzené číslo s navzájom rôznymi ciframi a napísala ho na tabuľu. Podeň zapísala cifry pôvodného čísla odzadu a tak získala nové číslo. Sčítaním týchto dvoch čísel dostala číslo, ktoré malo rovnaký počet cifier ako myslené číslo a skladalo sa iba z cifier mysleného čísla (avšak nemuselo obsahovať všetky jeho cifry). Erike sa Betkino číslo zapáčilo a chcela nájsť iné číslo s rovnakými vlastnosťami. Zistila, že neexistuje menšie také číslo ako Betkino a väčšie sa jej hľadať nechcelo. Určte, aké číslo si myslela Betka a aké číslo by mohla nájsť Erika, keby mala viac trpezlivosti.

(Katarína Jasenčáková)

6. Na stranách AB a AC trojuholníka ABC ležia postupne body E a F, na úsečke EF leží bod D. Priamky EF a BC sú rovnobežné a súčasne platí

$$|FD| : |DE| = |AE| : |EB| = 2 : 1.$$

Trojuholník ABC má obsah 27 hektárov a úsečkami EF, AD a DB je rozdelený na štyri časti. Určte obsahy týchto štyroch častí.

(Vojtěch Žádník)

Kategória C

1. Nájdite všetky možné hodnoty súčinu prvočísel p, q, r, pre ktoré platí

$$p^2 - (q + r)^2 = 637.$$

(Vojtech Bálint, Jaromír Šimša)

2. Určte, koľkými spôsobmi možno k jednotlivým vrcholom kocky $ABCDEFGH$ pripísať čísla 1, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4 tak, aby súčin čísel pripísaných ľubovoľným trom vrcholom každej zo stien kocky bol párny.

(Jaroslav Švrček)

3. Uvažujme výraz $2x^2 + y^2 - 2xy + 2x + 4$.

a) Nájdite všetky reálne čísla x a y, pre ktoré daný výraz nadobúda svoju najmenšiu hodnotu.

b) Určte všetky dvojice celých nezáporných čísel x a y, pre ktoré sa hodnota daného výrazu rovná číslu 16.

(Aleš Kobza)

4. Vnútri strán AB, AC daného trojuholníka ABC sú zvolené postupne body E, F, pričom $EF \| BC$. Úsečka EF je potom rozdelená bodom D tak, že platí

$$p = |ED| : |DF| = |BE| : |EA|.$$

a) Ukážte, že pomer obsahov trojuholníkov ABC a ABD je pre $p = 2 : 3$ rovnaký ako pre $p = 3 : 2$.

b) Zdôvodnite, prečo pomer obsahov trojuholníkov ABC a ABD má hodnotu aspoň 4.

(Vojtěch Žádník)

5. Máme kartičky s číslami 5, 6, 7, ..., 55 (na každej kartičke je jedno číslo). Koľko najviac kartičiek môžeme vybrať tak, aby súčet čísel na žiadnych dvoch vybraných kartičkách nebol palindróm? (Palindróm je číslo, ktoré je rovnaké pri čítaní zľava doprava i sprava doľava.)

(Tomáš Juríк)

6. Daná je kružnica $k_1(A; 4\text{ cm})$, jej bod B a kružnica $k_2(B; 2\text{ cm})$. Bod C je stredom úsečky AB a bod K je stredom úsečky AC. Vypočítajte obsah pravouhlého trojuholníka KLM, ktorého vrchol L je jeden z priesečníkov kružníc k_1, k_2 a ktorého prepona KM leží na priamke AB.

(Šárka Gergelitsová)

Kategória B

1. Pre prirodzené čísla k, l, m platí

$$\frac{k + m + klm}{lm + 1} = \frac{2\,051}{404}.$$

Určte všetky možné hodnoty súčinu klm.

(Aleš Kobza)

2. Do štvorcovej tabuľky 11×11 sme vpísali prirodzené čísla 1, 2, ..., 121 postupne po riadkoch zľava doprava a zhora nadol. Štvorcovou doštičkou 4×4 sme všetkými možnými spôsobmi zakryli práve 16 políčok. Koľkokrát bol súčet zakrytých 16 čísel druhou mocninou celého čísla?

(Vojtech Bálint, Tomáš Juríк)

3. V pravouhlom trojuholníku ABC s preponou AB a odvesnami dĺžok $|AC| = 4\,\text{cm}$ a $|BC| = 3\,\text{cm}$ ležia navzájom sa dotýkajúce kružnice $k_1(S_1;\, r_1)$ a $k_2(S_2;\, r_2)$ tak, že k_1 sa dotýka strán AB a AC, zatiaľ čo k_2 sa dotýka strán AB a BC. Určte najmenšiu a najväčšiu možnú hodnotu polomeru r_2.

(Pavel Novotný)

4. Počet všetkých párnych deliteľov niektorého prirodzeného čísla je o 3 väčší ako počet všetkých jeho nepárnych deliteľov. Aký je podiel súčtu všetkých jeho párnych deliteľov a súčtu všetkých jeho nepárnych deliteľov? Nájdite všetky možné odpovede.

(Erika Novotná)

5. Vrcholy konvexného šesťuholníka $ABCDEF$ ležia na kružnici, pričom $|AB| = |CD|$. Úsečky AE a CF sa pretínajú v bode G a úsečky BE a DF sa pretínajú v bode H. Dokážte, že úsečky GH, AD a BC sú navzájom rovnobežné.

(Šárka Gergelitsová)

6. Kladné reálne čísla a, b, c sú také, že hodnoty

$$x_1 = a,\ x_2 = b,\ x_3 = c,\ x_4 = \frac{2a^2}{b+c},\ x_5 = \frac{2b^2}{c+a},\ x_6 = \frac{2c^2}{a+b}$$

sú navzájom rôzne. Zapíšme ich od najmenšej po najväčšiu:

$$x_{i_1} < x_{i_2} < x_{i_3} < x_{i_4} < x_{i_5} < x_{i_6}.$$

Zistite, koľko rôznych poradí $(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6)$ indexov 1 až 6 môžeme dostať, keď budeme rôzne voliť čísla a, b, c.

(Jaromír Šimša)

Kategória A

1. V každej zo štyroch miestností je niekoľko predmetov. Nech $n \geq 2$ je prirodzené číslo. Jednu n-tinu predmetov z prvej miestnosti prenesieme do druhej miestnosti. Následne jednu n-tinu (z nového počtu) predmetov prenesieme z druhej miestnosti do tretej. Podobne potom z tretej miestnosti do štvrtej a zo štvrtej do prvej. (Vždy pritom prenášame celé predmety.) Ak viete, že na konci bol v každej miestnosti rovnaký počet predmetov, určte, koľko najmenej predmetov mohlo byť na začiatku v druhej miestnosti. Pre ktoré n sa tak môže stať?

(Vojtech Bálint, Michal Rolínek)

2. Nájdite najmenšie reálne číslo m, pre ktoré možno nájsť reálne čísla a, b tak, aby nerovnosť

$$\left|x^2 + ax + b\right| \leq m$$

platila pre každé $x \in \langle 0, 2 \rangle$.

(Leo Boček)

3. Daný je pravouhlý trojuholník ABC s preponou AB a dlhšou odvesnou BC. Nech D je päta výšky z vrcholu C. Kružnica k so stredom D a polomerom CD pretína odvesnu BC v bode Q a ďalej priamku AB v bodoch E a F ($E \neq F$), pričom F je bodom prepony AB. Úsečka QE pretína odvesnu AC v bode P. Dokážte, že $|PE| = |QF|$.

(Jaroslav Švrček)

4. Nela s Janou zvolia prirodzené číslo k a potom hrajú hru s tabuľkou majúcou rozmery 9×9. Začínajúca Nela vždy vo svojom ťahu vyberie jedno prázdne políčko a vpíše doň nulu. Jana vo svojom ťahu do nejakého prázdneho políčka napíše jednotku. Navyše po každom ťahu Nely nasleduje k ťahov Jany. Ak sa kedykoľvek počas hry stane, že súčet čísel v každom riadku aj v každom stĺpci je nepárny, vyhrá Jana. Ak dievčatá vyplnia celú tabuľku bez toho, aby sa to stalo, vyhrá Nela. Nájdite najmenšiu hodnotu k, pre ktorú má Jana vyhrávajúcu stratégiu.

(Michal Rolínek)

5. Daný je trojuholník ABC s najkratšou stranou BC. Na stranách AB, AC a na polpriamkach opačných k polpriamkam BC, CB zvoľme postupne body X, Y, K, L tak, aby platilo

$$|BX| = |BK| = |BC| = |CY| = |CL|.$$

Priamky KX a LY sa pretínajú v bode M. Dokážte, že ťažisko trojuholníka KLM je totožné so stredom kružnice vpísanej do trojuholníka ABC.

(Tomáš Jurík)

6. Na tabuli je napísaný súčin

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Pre ktoré prirodzené čísla $n \geq 2$ je možné za niektoré z činiteľov dopísať výkričník a nahradiť ich tak ich faktoriálmi, aby sa výsledný súčin rovnal druhej mocnine prirodzeného čísla?

(Michal Rolínek)

Obsah

Redakčná pošta ..... 2. strana obálky
Málo pozorovateľné jubileum (20 rokov vydávania časopisu MATMIX) 1
Antoni S. Zygmund – matematický analytik 20. storočia 4
Korešpondenčná súťaž v školskom roku 2015/2016 6
Skôr než začnete písať svoje riešenia 8
Zadania 1. série úloh korešpondenčnej súťaže 9
Čriepky z histórie matematickej kultúry 11
Zadania úloh domáceho kola 65. ročníka Matematickej olympiády 12
Kategória Z5 12
Kategória Z6 13
Kategória Z7 14
Kategória Z8 16
Kategória Z9 17
Kategória C 18
Kategória B 19
Kategória A 20

MATMIX – matematický časopis pre žiakov základných a stredných škôl, vydáva Ing. Mgr. Martin Hriňák v spolupráci s Jednotou slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Bratislava 1, ako pomocnú literatúru pre predmetové komisie matematiky a pre žiakov so záujmom o matematiku. **Vydávanie časopisu je spolufinancované z grantu nadácie Allianz.**

Šéfredaktor: Ing. Mgr. Martin Hriňák
Redakcia: Dušan Jedinák, Mgr. Katarína Hriňáková
Vydavateľ: Ing. Mgr. Martin Hriňák, Havanská 17, 040 13 Košice, IČO 41857836
Adresa redakcie: Ing. Mgr. Martin Hriňák, MATMIX, Bratislavská 716/2, 900 46 Most pri Bratislave
Časopis vychádza štyrikrát ročne. Cena 1,35 €. Náklad: 150 ks. Október 2015.
E-mail: matmix@matmix.sk
Webová stránka: http://www.matmix.sk
Registračné číslo MK SR: EV 2029/08
ISSN: 1336-7854