To vedel už Euklides

Už od čias antických Grékov sa za dokonalé čísla považujú tie prirodzené čísla, pre ktoré platí, že súčet všetkých ich prirodzených deliteľov sa rovná dvojnásobku daného čísla. Alebo takto: Prirodzené číslo n je dokonalé, ak sa rovná súčtu všetkých svojich vlastných (t. j. menších ako n) deliteľov. Napríklad: Číslo 6 (= 1 + 2 + 3) je dokonalé číslo, aj 28 (= 1 + 2 + 4 + 7 + 14) a 496 (preverte si to) sú dokonalé čísla. Euklides (asi 340 – 287 pred n. l.) v IX. knihe Základy v časti XXXVI dokázal: Ak sú postupne od jednotky dané čísla v pomere 1:2, až sa ich súčet stane prvočíslom, a ak sa tento súčet vynásobí posledným z týchto čísel, tak takto vzniknuté číslo bude dokonalé.

Naznačme si toto tvrdenie na príklade:

$$\underbrace{(1 + 2 + 4 + 8 + 16)}_{31 \text{ je prvočíslo}} \cdot 16 = 496 \; (= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248)$$

496 dokonalé číslo

Dokážeme vetu: Ak sú p aj $2^p - 1$ prvočísla, tak $2^{p-1} \cdot \left(2^p - 1\right)$ je dokonalé číslo.

Nech p je prvočíslo. Ak je $2^p - 1$ tiež prvočíslo, tak vlastné delitele čísla $2^{p-1} \cdot \left(2^p - 1\right)$ sú čísla 1, 2, 4, 8, ..., $2^{p-1}, 2^p - 1$, $2 \cdot \left(2^p - 1\right)$, $2^2 \cdot \left(2^p - 1\right)$, $2^{p-2} \cdot \left(2^p - 1\right)$.

Ak určíme súčet všetkých týchto vlastných deliteľov, dostaneme

$$\left(1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{p-1}\right) + \left(1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{p-2}\right) \cdot \left(2^p - 1\right) =$$

$$= \left(2^p - 1\right) + \left(2^{p-1} - 1\right) \cdot \left(2^p - 1\right) = \left[1 + \left(2^{p-1} - 1\right)\right] \cdot \left(2^p - 1\right) = 2^{p-1} \cdot \left(2^p - 1\right),$$

teda je splnená definícia dokonalého čísla $2^{p-1} \cdot \left(2^p - 1\right)$ (vo výpočte sme využili známy vzorec pre výpočet súčtu členov geometrickej postupnosti).

Euklides poznal štyri dokonalé čísla: 6, 28, 496, 8128. Ďalšie dokonalé číslo (33 350 336) objavil asi J. Müller–Regiomontanus (1436 – 1476). Leonhard Euler (1707 – 1783) určil ďalšie tri dokonalé čísla a dokázal, že každé párne dokonalé číslo má tvar podľa Euklida $2^{p-1} \cdot \left(2^p - 1\right)$, kde p aj $2^p - 1$ sú prvočísla. Ani dodnes nevieme, či existuje nepárne dokonalé číslo, ani či je dokonalých čísel konečný alebo nekonečný počet.

Dušan Jedinák