Ročník: 21
Číslo: 4
Šk. rok: 2015/2016

Matematický časopis pre žiakov základných a stredných škôl



Matematika sa podobá určitému druhu spoločného jazyka uspôsobenému na vyjadrovanie vzťahov, ktoré buď nie je možné, alebo je zložité objasňovať slovami.

Niels Bohr

Redakčná pošta

Milí čitatelia,

dostávate do rúk posledné číslo tohto ročníka časopisu MATMIX. Na úvod v ňom nájdete medailón Ernsta Zermela – matematika, ktorý ponúkol axiómu výberu. V druhom článku z histórie matematiky pod názvom To vedel už Euklides, ktorý uzatvára toto číslo, si dokážeme jedno zaujímavé tvrdenie o dokonalých číslach.

V rámci korešpondenčnej súťaže prinášame vzorové riešenie úloh 2. série a výsledkové listiny kategórií B a C.

V článku Niekoľko dopravných úloh pokračujeme v sérii dopravných úloh, ktorú sme začali v predchádzajúcom čísle časopisu.

Prajem vám príjemné prázdniny a verím, že sa už začiatkom nasledujúceho školského roku stretneme opäť na stránkach nášho časopisu.

Martin Hriňák

Ernst Zermelo – ponúkol axiómu výberu

Usporiadanosť



Viete si predstaviť, čo znamená usporiadať žiakov vašej triedy podľa veľkosti alebo podľa abecedy. Trochu starostí budete mať, ak niekoľkí žiaci sú úplne rovnako vysokí, alebo ak by mali úplne rovnaké priezviská a mená. Tí by boli v danom vzťahu neporovnateľní. Ak by v triede neboli takíto neporovnateľní, môžeme hovoriť o úplnom usporiadaní. Trochu to zovšeobecníme: Ak je usporiadaná množina taká, že každá jej podmnožina má najmenší prvok, hovoríme, že množina je dobre usporiadaná. Napríklad množina všetkých kladných celých čísiel je podľa veľkosti dobre usporiadaná. Možno každú množinu dobre usporiadať? Nemecký matematik **Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo** (1871 – 1953) dokázal, že každú množinu možno dobre usporiadať.

Zo života

Ernst Zermelo sa narodil 27. júla 1871 v Berlíne. Pochádzal z rodiny univerzitného profesora s akademickým zázemím. Po absolvovaní strednej školy v roku 1899 navštevoval tri univerzity (Berlín, Halle, Freiburg) a špecializoval sa na matematiku, fyziku i filozofiu. Na štúdiách sa spoznal s Frobeniom, Fuchsom, Schwarzom i Husserlom. Univerzitné štúdiá ukončil doktorátom v Berlíne (1894) a ďalšie tri roky pracoval a študoval u Plancka v Inštitúte teoretickej fyziky. Habilitáciu dokončil v Göttingene (1899). Tam pôsobil až do roku 1910, od roku 1906 bol univerzitným profesorom matematiky. Na univerzite v Zürichu prednášal v rokoch 1910 – 1916, desať rokov žil v bavorskom Čiernom lese, potom v rokoch 1926 až 1935 pôsobil na univerzite vo Freiburgu. Tam 21. mája 1953 zomrel.

Spojenie s osudom teórie množín

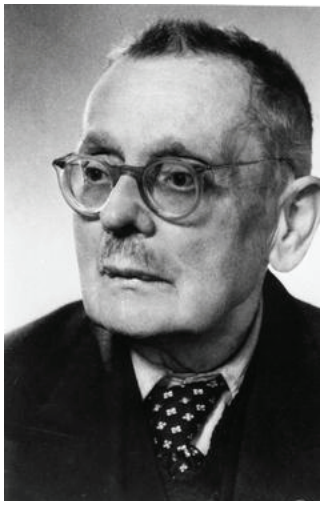
Po roku 1900, keď Hilbert podnietil výskum hypotézy kontinua, aj Zermelo začal pracovať na problematike teórie množín. V roku 1904 uviedol na matematickú scénu axiómu výberu. Tá hovorí asi toľko, že zo všetkých (aj nekonečných) množín nejakého (aj nekonečného) systému množín možno vybrať naraz (aj bez predchádzajúceho udania pravidla tohto výberu) po jednom prvku. (Axióma je



matematické tvrdenie, ktoré prijímame bez dôkazu.) Na jej základe ukázal, že každú množinu možno dobre usporiadať (toto tvrdenie je s axiómou výberu ekvivalentné). Axióma výberu vyvolala rozporuplné diskusie a stala sa zdrojom zaujímavých matematických otázok teórie množín až dodnes. Zermelove predstavy axiomatizácie teórie množín rozvinul okolo roku 1922 A. Fraenkel (1891 – 1965). V súčasnej matematike sú známe ako Zermelov-Fraenkelov axiomatický systém teórie množín..

Zermelo sa zaoberal aj variačným počtom, teóriou hier s úplnou informáciou a uplatnením teórie pravdepodobnosti v štatistickej fyzike.

Pozrite sa do literatúry



Ak postupne zvládnete nielen školské základy teórie množín, ale aj jej najdôležitejšie myšlienky a výsledky, spoznáte, že táto matematická disciplína je vedou opisujúcou nekonečno. Dobre pochopené poznatky teórie množín vám umožnia „dotknúť sa nekonečna“. Pre hlbšie štúdium tejto problematiky sa pozrite do knižiek Bukovský, L.: Množiny a všeličo okolo nich (Bratislava: Alfa, 1985) alebo Vilenkin, N. I.: Rozhovory o množinách (Bratislava: SPN, 1972). V nich spoznáte neznámy svet nekonečných množín.

Dušan Jedinák

Korešpondenčná súťaž v školskom roku 2015/2016

Riešenia 2. série úloh korešpondenčnej súťaže

1. Určte ciferný súčet čísla 201520152015..., ktoré má 2015 cifier.

Riešenie: V uvedenom čísle sa opakujú 4 číslice 2, 0, 1, 5. Keďže platí

$$2015 : 4 = 503 \text{ zvyšok. } 3,$$

zopakuje sa táto štvorica 503-krát a na konci čísla bude 201. Ciferný súčet uvedenej štvorice je 2 + 0 + 1 + 5 = 8, teda ciferný súčet daného čísla je

$$503 \cdot 8 + 2 + 0 + 1 = 4\,027.$$

2. Určte, ktorú číslicu sme napísali poslednú, ak píšeme postupne za sebou prirodzené čísla 1, 2, 3, ... a pritom sme na to použili 2 015 číslic.

Riešenie: Ak napíšeme čísla 1, ..., 9, použijeme na ne 9 číslic. Na čísla 10, ..., 99 použijeme $90 \cdot 2 = 180$ číslic. Ostalo nám 2 015 – 189 = 1 826 číslic. Keďže po čísle 99 nasledujú trojciferné čísla, vydelíme 1 826 tromi, aby sme zistili, koľko ich bude. Keďže platí 1 826 : 3 = 608 zv. 2, napíšeme za sebou prvých 608 trojciferných čísel, teda čísla 100, 101, ..., 707. Teraz ostáva napísať už len posledné dve číslice – 7, 0. Poslednou napísanou číslicou je číslica 0.

3. Určte, koľko prvočísel menších než 2015 má ciferný súčet 2.

Riešenie: Keďže ide o prvočísla s ciferným súčtom 2, prichádzajú do úvahy dva typy čísel. Prvý typ obsahuje číslicu 2 a niekoľko núl. Druhý typ obsahuje dve jednotky a niekoľko núl. Keďže prvočíslo prvého typu je párne (končí na 0 alebo 2), dostávame tu jediné riešenie – prvočíslo 2. V druhom prípade musí byť na konci jednotka, pretože ak by tam bola nula, tak by išlo o párne číslo väčšie ako 2, a teda by to nebolo prvočíslo. Na druhej strane, aj prvou cifrou hľadaného prvočísla musí byť 1, pretože 0 to byť nemôže (nula sa na začiatku čísla nepíše). To nám zúžilo množinu možných prvočísel na 11, 101, 1 001. Čísla 11 a 101 sú prvočíslami. Keďže číslo 1 001 sa rovná súčinu čísel 7, 11 a 13, nie je prvočíslom.

Zadaniu úlohy vyhovujú tri prvočísla (2, 11, 101).

4. Určte, koľkokrát sa v číslach strán v encyklopédii, ktorá má očíslované stránky od 1 do 2015 vrátane, vyskytuje číslica 5.

Riešenie: Na mieste jednotiek sa číslica 5 vyskytuje 202-krát, pretože takéto číslo má tvar XYZ5, pričom XYZ nadobúda hodnoty od 0 (zodpovedá číslu 5) po 201 (zodpovedá číslu 2 015).

Na mieste desiatok sa číslica 5 vyskytuje 200-krát, pretože takéto číslo má tvar XY5Z, pričom Z môže byť ľubovoľná cifra (0 – 9) a XY nadobúda hodnoty od 0 (zodpovedá číslu 5Z) po 19 (zodpovedá číslu 1 95Z). Takýchto čísel je $20 \cdot 10 = 200$, pretože možností pre XY je 20 (od 0 po 19) a možností pre Z je 10 (0 až 9), pričom tieto možnosti sa môžu navzájom ľubovoľne kombinovať.

Na mieste stoviek sa číslica 5 vyskytuje 200-krát, pretože takéto číslo má tvar X5YZ, pričom Y a Z môžu byť ľubovoľné cifry (0 – 9) a X nadobúda hodnotu 0 (zodpovedá číslu 5YZ) alebo 1 (zodpovedá číslu 1 5YZ). Takýchto čísel je $2 \cdot 100 = 200$, pretože možnosti pre X sú dve (0 alebo 1) a možností pre YZ je 100 (od 00 po 99), pričom tieto možnosti sa môžu navzájom ľubovoľne kombinovať.

Na mieste tisícok sa číslica 5 vyskytovať nemôže, pretože najmenšie také číslo je 5 000 a to je väčšie ako 2 015.

Spolu dostávame 202 + 200 + 200 = 602 číslic 5.

5. Určte ciferný súčet súčtu $10^{2015} + 2015$.

Riešenie: Číslo $10^{2015} + 2015$ pozostáva z jednej číslice 1, za ňou je 2011 núl a na konci je štvorčíslie 2015. Ciferný súčet tohto čísla je teda 1 + 0 + 2 + 0 + 1 + 5 = 9.

Ciferný súčet súčtu $10^{2015} + 2015$ je 9.

6. Určte súčet všetkých prirodzených deliteľov čísla 2015 deliteľných piatimi.

Riešenie: Číslo 2015 môžeme zapísať ako súčin prvočísel v tvare $5 \cdot 13 \cdot 31$. To znamená, že číslo 2015 má len 4 prirodzené delitele deliteľné piatimi: $5, 5 \cdot 13, 5 \cdot 31, 5 \cdot 13 \cdot 31$. Ide o čísla 5, 65, 155 a 2015. Ich súčet je

$$5 + 65 + 155 + 2015 = 2\,240.$$

Súčet všetkých prirodzených deliteľov čísla 2015 deliteľných piatimi je 2 240.

7. Určte počet prirodzených čísel od 1 do 10^6, ktoré končia štvorčíslím 2015.

Riešenie: Všetky vyhovujúce prirodzené čísla majú tvar AB2 015, pričom AB nadobúda hodnoty od 0 (zodpovedá číslu 2 015) po 99 (zodpovedá číslu 992 015). Keďže prirodzených čísel od 0 po 99 je 100, existuje 100 prirodzených čísel od 1 do 10^6, ktoré končia štvorčíslím 2015.

8. Určte najmenšie prirodzené číslo, ktorého ciferný súčet je 2015.

Riešenie: Ak hľadáme najmenšie prirodzené číslo s uvedenou vlastnosťou, musíme na mieste číslice s najvyšším rádom použiť čo najmenšiu číslicu, a na ostatných miestach použijeme 9 (používame najväčšiu číslicu, aby sme dosiahli minimálny

počet cifier hľadaného čísla). Keďže 2015 : 9 = 223, zvyšok 8, použijeme 223 deviatok a jednu osmičku a dostaneme tak číslo 899...99 s 223 deviatkami.

Hľadané najmenšie prirodzené číslo, ktorého ciferný súčet je 2015, je číslo 899...99, ktoré obsahuje 223 deviatok.

9. Určte, koľko prirodzených čísel menších než 10^{2015} má ciferný súčet 3.

Riešenie: Vyhovujúce prirodzené čísla môžu byť vzhľadom na ciferný súčet troch druhov: obsahujú jednu trojku a niekoľko núl, alebo obsahujú jednu jednotku, jednu dvojku a niekoľko núl, alebo obsahujú tri jednotky a niekoľko núl. Keďže prvou číslicou nemôže byť 0, musí to byť 1, 2 alebo 3.

Zaoberajme sa prvým prípadom. Vyhovujúce sú tieto čísla: 3, 30, 300, ..., $3\cdot 10^{2014}$. Keďže $3 = 3\cdot 10^0$, týchto čísel je rovnako ako čísel 0, 1, ..., 2014, teda ich je 2015. Môžeme to však vypočítať aj inak: Číslo 10^{2015} má 2016 cifier, takže každé prirodzené číslo menšie ako toto číslo má maximálne 2015 cifier. Predstavme si teraz vedľa seba 2015 núl. Ak si nahradíme jednu nulu trojkou, dostaneme vždy číslo vyhovujúce zadaniu úlohy (prípadné nuly na začiatku potom odstránime). Preto sa celkový počet vyhovujúcich čísel rovná počtu spôsobov, ako vybrať z 2015 cifier jednu. A to je 2015 spôsobov.

Podobne budeme postupovať aj v druhej možnosti – z 2015 miest budeme vyberať dve miesta – jedno pre jednotku a jedno pre dvojku. Na výber miesta pre jednotku máme 2015 možností a na výber miesta pre dvojku už len 2014 možností, keďže jedno miesto už obsadila jednotka. Keďže tieto možnosti sa môžu navzájom kombinovať, dostávame tak $2015\cdot 2014 = 4\,058\,210$ možností.

V treťom prípade máme všetky tri cifry rovnaké, a tak nám nezáleží na tom, ktorú jednotku kedy vyberieme – vyberáme 3 miesta z 2015 bez ohľadu na ich poradie. Na to máme

$$\binom{2015}{3} = \frac{2015\cdot 2014\cdot 2013}{3\cdot 2\cdot 1} = 1\,361\,529\,455 \text{ možností.}$$

Dokopy tak dostávame $1\,361\,529\,455 + 4\,058\,210 + 2015 = 1\,365\,589\,680$ možností.

10. Určte všetky rôzne trojice prirodzených čísel $x < y < z$, pre ktoré platí

$$x\cdot y\cdot z = 2015.$$

Riešenie: Najprv si rozložíme číslo 2015 na súčin prvočísel: $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$. Ak je hodnota x väčšia ako 1, potom musí byť aspoň 5, keďže najmenšie prvočíslo, ktoré delí číslo 2015, je 5. Potom však musí platiť $yz = 403$, a keďže $y < z$, musí platiť $y = 13$ a $z = 31$, pretože inak súčin 403 nezískame. Dostávame tak prvú a jedinú vyhovujúcu možnosť.

Ak $x = 1$, potom riešime rovnicu $yz = 2015$, pričom $1 < y < z$. Keďže platí $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$, y a z môžu nadobúdať len tieto dvojice hodnôt (jedno číslo sa rovná jednému deliteľu a druhé súčinu zvyšných dvoch): 5 a $13 \cdot 31$, 13 a $5 \cdot 31$, 31 a $5 \cdot 13$. Každá z týchto dvojíc vyhovuje, a tak dostávame ďalšie tri riešenia.

Keďže iné možnosti nastať nemôžu, dostávame, že úloha má tieto štyri riešenia:

x	y	z
5	13	31
1	5	403
1	13	155
1	31	65

11. Určte zvyšok po delení čísla 10^{2015} číslom 15.

Riešenie: Pri výpočte použijeme skrátený zápis pomocou kongruencií:

$$\begin{aligned} 10^{2015} &\equiv (-5)^{2015} = (-5)\cdot(-5)^{2014} = (-5)\cdot 25^{1007} \equiv (-5)\cdot(-5)^{1007} = \\ &= (-5)^{1008} = 25^{504} \equiv (-5)^{504} = 25^{252} \equiv (-5)^{252} = 25^{126} \equiv (-5)^{126} = \\ &= 25^{63} \equiv (-5)^{63} = (-5)\cdot(-5)^{62} = (-5)\cdot 25^{31} \equiv (-5)\cdot(-5)^{31} = \\ &= (-5)^{32} = 25^{16} \equiv (-5)^{16} = 25^{8} \equiv (-5)^{8} = 25^{4} \equiv (-5)^{4} = 625 \equiv 10 \pmod{15} \end{aligned}$$

Číslo 10^{2015} dáva po delení číslom 15 zvyšok 10.

Iné riešenie: Využijeme, že platí 10^{2015} = 99...90 + 10. Číslo 99...90 je deliteľné 15, pretože je deliteľné aj 3 (každá cifra je deliteľná 3) aj 5 (končí 0). Preto je hľadaný zvyšok 10.

12. Určte poslednú cifru čísla $2015^{2015} - 15$ v jeho desiatkovom zápise.

Riešenie: Desiatkový zápis čísla 2015^{2015} končí na číslicu 5, pretože súčin ľubovoľného počtu prirodzených čísel končiacich na 5 končí na 5 (vyplýva to z toho, že $5 \cdot 5 = 25$, a teda posledná čísla súčinu dvoch čísel končiacich 5 je opäť 5). Po odčítaní čísla končiaceho 5 (v našom prípade 15) bude potom posledná číslica určite 0.

13. Určte hodnotu výrazu

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2014}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2015}\right).$$

Riešenie: Jednotlivé zlomky upravíme na spoločného menovateľa a po vykrátení rovnakých čitateľov a menovateľov dostaneme, že platí:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2014}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2015}\right)=$$
$$=\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{4}{3}\right)\cdot\left(\frac{5}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{2015}{2014}\right)\cdot\left(\frac{2016}{2015}\right)=\frac{2016}{2}=1008.$$

14. Určte poslednú cifru desatinného rozvoja čísla 5^{-2015}.

Riešenie: Označme $5^{-2015}=x$. Potom musí platiť $1=x\cdot 5^{2015}$. Vynásobením tejto rovnice číslom 2^{2015} dostaneme, že platí $2^{2015}=x\cdot 5^{2015}\cdot 2^{2015}=x\cdot 10^{2015}$.

Teraz nám už stačí určiť len poslednú číslicu čísla 2^{2015}, pretože tá je rovnaká ako posledná cifra desatinného rozvoja čísla x (násobenie mocninou 10 posúva len desatinnú čiarku, cifry čísla nemení). Pre tento výpočet opäť použijeme zápis pomocou kongruencií:

$$2^{2015}=2^{3\cdot 671+2}=4\cdot 8^{671}\equiv 4\cdot(-2)^{671}=4\cdot(-2)^{3\cdot 223+2}=4\cdot 4\cdot(-8)^{223}\equiv 16\cdot 2^{223}\equiv$$
$$\equiv 6\cdot 2^{3\cdot 74+1}=6\cdot 2\cdot 8^{74}=12\cdot 8^{74}\equiv 2\cdot(-2)^{74}=2\cdot(-2)^{3\cdot 24+2}=2\cdot 4\cdot(-8)^{24}\equiv 8\cdot 2^{24}=$$
$$=8\cdot 2^{3\cdot 8}=8\cdot 8^{8}=8^{9}\equiv(-2)^{9}=(-2)^{3\cdot 3}=(-8)^{3}\equiv 2^{3}=8\ (\mathrm{mod}\,10)$$

Poslednou cifrou desatinného rozvoja čísla 5^{-2015} je číslica 8.

15. Určte, koľko prirodzených čísel od 1 do 2015 (vrátane) napísaných na tabuli bude označených práve dvomi značkami, ak sme najprv označili z nich všetky, ktoré sú deliteľné dvomi jednou značkou, potom inou značkou všetky čísla deliteľné tromi a na záver sme označili zase inou značkou všetky čísla deliteľné štyrmi.

Riešenie: Značky majú len čísla, ktoré sú deliteľné dvomi, tromi alebo štyrmi. Aby malo nejaké číslo dve značky, musí byť deliteľné dvoma z týchto čísel. Ak je číslo deliteľné štyrmi aj tromi (teda dvanástimi), tak je deliteľné aj dvomi, a teda je označené troma značkami, a teda nevyhovuje. Ostali nám už len dve možnosti: čísla

deliteľné štyrmi nedeliteľné tromi (tie dostali dve značky za deliteľnosť 2 a 4 a nedostali značku za deliteľnosť 3) a čísla deliteľné šiestimi (ako násobok 2 a 3) nedeliteľné štyrmi (tie dostali dve značky za deliteľnosť 2 a 3 a nedostali značku za deliteľnosť 4).

Čísel deliteľných štyrmi menších alebo rovnajúcich sa 2015 je 503, pretože platí 2015 : 4 = 503 zv. 3. Čísel deliteľných štyrmi a deliteľných tromi (teda deliteľných 12) menších alebo rovnajúcich sa 2015 je 167, pretože platí 2015 : 12 = 167 zv. 11. Preto je čísel deliteľných štyrmi a nedeliteľných tromi 503 – 167 = 336.

Čísel deliteľných šiestimi menších alebo rovnajúcich sa 2015 je 335, pretože platí 2015 : 6 = 335 zv. 5. Čísel deliteľných šiestimi a deliteľných štyrmi (teda deliteľných 12) menších alebo rovnajúcich sa 2015 je 167, pretože platí 2015 : 12 = 167 zv. 11. Preto je čísel deliteľných šiestimi a nedeliteľných štyrmi 335 – 167 = 168.

Vyhovujúcich čísel je 336 + 168 = 504.

Výsledkové listiny po 2. sérii úloh korešpondenčnej súťaže

Kategória C

Por.	Priezvisko	Meno	Škola	3	4	5	6	Spolu 1	3	4	5	6	Spolu 2	Spolu
1	Horváth	Jakub	G Bratislava	3	5	5	4	17	3	5	5	5	18	35
2	Novotný	Peter	G Prešov	3	5	4	3	15	3	5	5	5	18	33
2	Mišík	Ján	G Košice	3	5	4	3	15	3	5	5	5	18	33
2	Nová	Jana	G Prešov	3	5	4	4	16	3	4	5	5	17	33
5	Podolský	Slavomír	SOŠ Svit	2	5	4	3	14	3	5	5	5	18	32
6	Nagy	Peter	G Košice	3	1	2	4	10	3	0	5	5	13	23
7	Farkaš	Zoltán	G Dunajská Streda	3	4	1	5	13	2	1	4	0	7	20
8	Mičian	Samuel	SOŠ Svit	1	0	3	0	4	0	5	5	5	15	19
9	Prokop	Matúš	SOŠ Svit	0	0	0	0	0	0	4	5	5	14	14

Kategória B

Por.	Priezvisko	Meno	Škola	5	6	7	8	Spolu 1	5	6	7	8	Spolu 2	Spolu
1	Varga	Juraj	G Košice	5	5	0	0	10	5	5	0	4	14	24
2	Polák	Patrik	G Prešov	4	4	0	2	10	5	4	0	3	12	22
3	Tóthová	Katarína	G Prešov	2	0	0	1	3	5	5	0	4	14	17
3	Kováč	Jakub	G Košice	3	0	0	1	4	5	5	1	2	13	17
5	Grivalský	Jakub	SOŠ Svit	2	0	0	0	2	5	4	0	5	14	16
6	Molnár	Martin	G Košice	3	0	0	2	5	5	4	0	1	10	15
7	Marciníková	Andrea	SOŠ Svit	4	0	0	0	4	5	5	0	0	10	14

Niekoľko dopravných úloh

Cesta do Chorvátska



Zdroj: auto.sme.sk

Pri ceste do Chorvátska aj do iných dovolenkových miest sa dá použiť veľa rôznych ciest. Niektoré majú výhodu v tom, že sa sú kratšie, ale náročnejšie na orientáciu, resp. prechádzajú veľkým množstvom obcí, a tak prinášajú nižšiu priemernú rýchlosť, iné idú viac po diaľniciach, ktoré však môžu byť spoplatnené, a tak na úkor úspory času prinášajú zvýšené finančné náklady. Napríklad pri ceste z Bratislavy do Záhrebu je možné použiť dve trasy – prvú cez Csornu, Szombathely a Goričan, druhú cez Győr, Székesfehérvár a Goričan. Prvá má dĺžku 290 km, priemerná rýchlosť pohybu auta je na nej 67 km/h, priemerná spotreba auta je 5,9 litra nafty na 100 kilometrov a na tejto ceste nie sú žiadne spoplatnené úseky. Druhá cesta má dĺžku 398 km, priemerná rýchlosť pohybu auta je na nej 93,6 km/h, priemerná spotreba auta je 5,5 litra nafty na 100 kilometrov a diaľničné poplatky sú vo výške 7,5 €.

a) Určte, koľko minút trvá cesta z Bratislavy do Záhrebu pri ceste prvou trasou a druhou trasou.

b) Určte, aké sú celkové náklady na dopravu do Záhrebu a späť, ak počítame, že cena jedného litra nafty je 1,32 €.

Riešenie: a) Čas potrebný na prejdenie vzdialenosti vypočítame pomocou vzorca $t = \frac{s}{v}$, kde t je hľadaný čas, s prejdená vzdialenosť a v priemerná rýchlosť pohybu. Ak uvedieme vzdialenosť v kilometroch a rýchlosť kilometroch za hodinu, vyjde nám výsledok v hodinách. Keďže hľadáme výsledok v minútach, musíme čas v hodinách ešte prenásobiť konštantou 60 min./h. V našom prípade dostávame, že prejdenie prvej trasy trvalo

$$\frac{290\ \text{km}}{67\ \text{km/h}} \cdot 60 \frac{\text{min.}}{\text{h}} \doteq 260\ \text{min.}$$

Analogicky dostávame, že prejdenie druhej trasy trvalo

$$\frac{398\ \text{km}}{93{,}6\ \text{km/h}} \cdot 60\frac{\text{min.}}{\text{h}} \doteq 255\ \text{min.}$$

Cesta z Bratislavy do Záhrebu trvá 260 minút pri ceste prvou trasou a pri ceste druhou trasou 255 minút.

b) Pri prvej trase sa pri ceste do Záhrebu spotrebuje $2{,}9 \cdot 5{,}9\,\text{l} = 17{,}11\,\text{l}$ nafty, čo znamená, že celkové náklady na cestu tam sú $17{,}11\,\text{l} \cdot 1{,}32\ €/\text{l} = 22{,}585\,2\ €$. Pri ceste späť budú náklady rovnaké, takže celkové náklady na cestu budú

$$2 \cdot 22{,}585\,2\ € = 45{,}170\,4\ € \doteq 45{,}17\ €.$$

Pri druhej trase sa pri ceste do Záhrebu spotrebuje $3{,}98 \cdot 5{,}5\,\text{l} = 21{,}89\,\text{l}$ nafty, čo znamená, že náklady na naftu na cestu tam sú $21{,}89\,\text{l} \cdot 1{,}32\ €/\text{l} = 28{,}894\,8\ €$. K nim musíme prirátať ešte diaľničné poplatky vo výške 7,5 €. Celková cena jednej cesty je preto $28{,}894\,8\ € + 7{,}5\ € = 36{,}394\,8\ €$. Pri ceste späť budú náklady rovnaké, takže celkové náklady na cestu budú $2 \cdot 36{,}394\,8\ € = 72{,}789\,6\ € \doteq 72{,}79\ €$.

Cena dopravy do Záhrebu a späť je pri ceste prvou trasou 45,17 € a pri ceste druhou trasou 72,79 €.

Z Bratislavy do Košíc

Navigačné prístroje sú v súčasnosti veľmi rozšírené aj medzi turistami, aj medzi vodičmi osobných automobilov. Pri výpočte optimálnej trasy musia brať do úvahy viacero faktorov, ktorými sú napríklad vzdialenosť, maximálna povolená rýchlosť na danom úseku či typ cesty. Vzhľadom na potrebu rýchleho nájdenia cesty nepoužívajú navigačné prístroje algoritmy, ktoré zistia optimálnu trasu, ale vystačia si aj s menej efektívnymi algoritmami, ktoré hľadajú skoro optimálnu trasu. Medzi základné možnosti, ktoré sa dajú v prístroji zvoliť, je hľadanie najkratšej cesty, najrýchlejšej cesty a tzv. ekonomickej cesty, ktorá kombinuje čo najvyššiu rýchlosť a čo najkratšiu vzdialenosť. V tejto úlohe si zvolíme za ekonomické kritérium súčet číselnej hodnoty vzdialenosti v kilometroch a číselnej hodnoty času cesty v minútach. Ekonomicky optimálna bude potom tá trasa, ktorá bude mať toto kritérium najnižšie.

Pri ceste z Bratislavy do Košíc sa používajú najčastejšie tieto štyri trasy:

A: trasa cez Žilinu, Poprad a Prešov, ktorá má dĺžku 458 km a prejdete ju za 5 hodín a 13 minút,

B: trasa cez Budapešť a Miškolc, ktorú prejdete za 4 hodiny 59 minút pri priemernej rýchlosti 92,3 km/h,

C: trasa cez Nitru, Banskú Bystricu, Ružomberok, Poprad a Prešov, ktorá má dĺžku 456 000 m a ktorú prejdete priemernou rýchlosťou 23,1 m/s,

D: trasa cez Zvolen, Rimavskú Sobotu a Rožňavu, ktorú prejdete za 5 hodín a 17 minút pri priemernej rýchlosti 76,1 km/h.

a) Určte najkratšiu trasu z Bratislavy do Košíc a jej dĺžku.

b) Určte najrýchlejšiu trasu z Bratislavy do Košíc a čas potrebný na jej prejdenie.

c) Určte ekonomicky optimálnu trasu z Bratislavy do Košíc, jej dĺžku a čas potrebný na jej prejdenie.

Riešenie: Pri výpočtoch chýbajúcich údajov využijeme známy vzorec $s = v \cdot t$, kde s je prejdená dráha, v priemerná rýchlosť a t čas. Pri premene jednotiek využijeme to, že číselná hodnota rýchlosti v kilometroch za hodinu je 3,6-násobok číselnej hodnoty rýchlosti v metroch za sekundu a to, že kilometer má 1 000 metrov. Postupne dostaneme túto tabuľku (tučným písmom je vyznačená najlepšia hodnota v stĺpci):

Trasa	**Vzdialenosť [km]**	**Čas [min.]**	**Priemerná rýchlosť [km/h]**	**Ekonomické kritérium**
A	458	313	87,8	771
B	459,96	**299**	92,3	758,96
C	456	329	83,16	785
D	**402,06**	317	76,1	**719,06**

a) Najkratšia trasa z Bratislavy do Košíc je trasa D a má dĺžku 402,06 km.

b) Najrýchlejšia trasa z Bratislavy do Košíc je trasa B a trvá 299 minút.

c) Ekonomicky optimálna trasa z Bratislavy do Košíc je trasa D, ktorá má dĺžku 402,06 km a jej prejdenie trvá 317 minút.

Diaľnica

Stavba diaľnice je veľmi finančne náročná činnosť. Pred niekoľkými rokmi sa rozšírila diaľnica v úseku Bratislava – Trnava z dvoch na tri pruhy v každom smere jazdy. Toto rozšírenie stálo 36,5 milióna eur. Plánovaný stav kompletnej prestavby počíta s diaľnicou so šírkou 36,5 metra vrátane stredového deliaceho pásu. Diaľnica pozostáva z rovných úsekov a zákrut. Ak nie je diaľnica klopená, požaduje sa polomer oblúka zákruty minimálne 3,5 km (polomer sa počíta vzhľadom na os diaľnice). V prípade výrazného klopenia je možné polomer zákruty pri prejazdovej rýchlosti 120 km/h skrátiť až na 725 m.

a) Určte, koľko miliónov eur priemerne stálo rozšírenie diaľnice v dĺžke jedného kilometra v úseku Bratislava, Senecká cesta – Trnava.

b) Určte, akú plochu bude zaberať diaľnica vrátane stredového pásu, ak neberieme do úvahy pripájacie pruhy a pod. Výsledok uveďte v kilometroch štvorcových s presnosťou na dve desatinné miesta.

c) Určte rozdiel plochy diaľnice, ktorá pozostáva z troch oblúkov s polomerom 3,5 km, a priamej diaľnice s rovnakou dĺžkou.



Riešenie: a) Diaľnica z Bratislavy do Trnavy sa skladá z dvoch úsekov – Bratislava – Senec s dĺžkou 16,8 km a Senec – Trnava s dĺžkou 19,306 km. Celková dĺžka tohto úseku je 36,106 km. Cena za jeden kilometer je potom

$$36\,500\,000\,€ : 36{,}106\,\text{km} \doteq 1\,010\,912{,}31\,€/\text{km}.$$

b) Ak predpokladáme, že diaľnica je rovná, dostaneme, že bude zaberať plochu $0{,}036\,5\,\text{km} \cdot 36{,}106\,\text{km} \doteq 1{,}32\,\text{km}^2$. Ako ukáže výpočet v časti c, aj po zohľadnení zákrut ostáva výsledok s presnosťou na jedno desatinné miesto v platnosti.

c) Dĺžku jedného oblúka vypočítame ako dĺžku polkružnice s polomerom 3,5 km, teda $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 3{,}5\,\text{km} = 3{,}5\pi\,\text{km}$. Keďže oblúky sú tri, celková dĺžka úseku diaľnice je $3 \cdot 3{,}5\pi\,\text{km} = 10{,}5\pi\,\text{km}$.

Obsah priameho úseku S_p s touto dĺžkou je potom

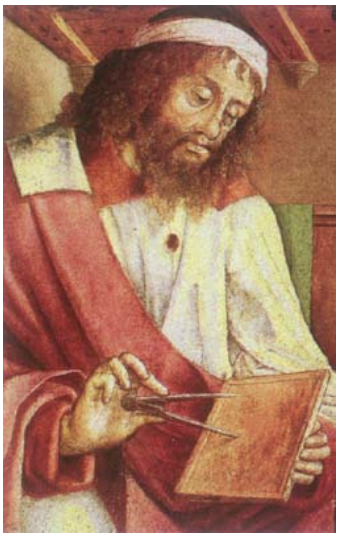
$$S_p = 10{,}5\pi\,\text{km} \cdot 0{,}036\,5\,\text{km} = 0{,}383\,25\pi\,\text{km}^2.$$

Obsah S_z zakrivenej časti diaľnice vypočítame ako trojnásobok rozdielu obsahu polkruhu s polomerom $3{,}5\,\text{km} + \frac{0{,}036\,5\,\text{km}}{2} = 3{,}518\,25\,\text{km}$ a obsahu polkruhu s polomerom $3{,}5\,\text{km} - \frac{0{,}036\,5\,\text{km}}{2} = 3{,}481\,75\,\text{km}$, pretože polovica šírky diaľnice je $\frac{0{,}036\,5\,\text{km}}{2} = 0{,}018\,25\,\text{km}$ a polomer oblúka sa počíta práve od stredu diaľnice. Dostávame, že platí $S_z = 3 \cdot \left(\frac{\pi}{2} \cdot (3{,}518\,25\,\text{km})^2 - \frac{\pi}{2} \cdot (3{,}481\,75\,\text{km})^2 \right) = 0{,}383\,25\pi\,\text{km}^2$.

Ako vidíme, je to presne taká istá plocha ako v prípade priamej diaľnice. Preto je rozdiel 0 km^2.

Martin Hriňák

To vedel už Euklides



Už od čias antických Grékov sa za dokonalé čísla považujú tie prirodzené čísla, pre ktoré platí, že súčet všetkých ich prirodzených deliteľov sa rovná dvojnásobku daného čísla. Alebo takto: Prirodzené číslo n je dokonalé, ak sa rovná súčtu všetkých svojich vlastných (t. j. menších ako n) deliteľov. Napríklad: Číslo 6 (= 1 + 2 + 3) je dokonalé číslo, aj 28 (= 1 + 2 + 4 + 7 + 14) a 496 (preverte si to) sú dokonalé čísla. Euklides (asi 340 – 287 pred n. l.) v IX. knihe Základy v časti XXXVI dokázal: Ak sú postupne od jednotky dané čísla v pomere 1:2, až sa ich súčet stane prvočíslom, a ak sa tento súčet vynásobí posledným z týchto čísel, tak takto vzniknuté číslo bude dokonalé.

Naznačme si toto tvrdenie na príklade:

$$\underbrace{(1 + 2 + 4 + 8 + 16)}_{31 \text{ je prvočíslo}} \cdot 16 = 496 \; (= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248)$$

496 dokonalé číslo

Dokážeme vetu: Ak sú p aj $2^p - 1$ prvočísla, tak $2^{p-1} \cdot \left(2^p - 1\right)$ je dokonalé číslo.

Nech p je prvočíslo. Ak je $2^p - 1$ tiež prvočíslo, tak vlastné delitele čísla $2^{p-1} \cdot \left(2^p - 1\right)$ sú čísla 1, 2, 4, 8, ..., $2^{p-1}, 2^p - 1$, $2 \cdot \left(2^p - 1\right)$, $2^2 \cdot \left(2^p - 1\right)$, $2^{p-2} \cdot \left(2^p - 1\right)$.

Ak určíme súčet všetkých týchto vlastných deliteľov, dostaneme

$$\left(1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{p-1}\right) + \left(1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{p-2}\right) \cdot \left(2^p - 1\right) =$$

$$= \left(2^p - 1\right) + \left(2^{p-1} - 1\right) \cdot \left(2^p - 1\right) = \left[1 + \left(2^{p-1} - 1\right)\right] \cdot \left(2^p - 1\right) = 2^{p-1} \cdot \left(2^p - 1\right),$$

teda je splnená definícia dokonalého čísla $2^{p-1} \cdot \left(2^p - 1\right)$ (vo výpočte sme využili známy vzorec pre výpočet súčtu členov geometrickej postupnosti).

Euklides poznal štyri dokonalé čísla: 6, 28, 496, 8128. Ďalšie dokonalé číslo (33 350 336) objavil asi J. Müller–Regiomontanus (1436 – 1476). Leonhard Euler (1707 – 1783) určil ďalšie tri dokonalé čísla a dokázal, že každé párne dokonalé číslo má tvar podľa Euklida $2^{p-1} \cdot \left(2^p - 1\right)$, kde p aj $2^p - 1$ sú prvočísla. Ani dodnes nevieme, či existuje nepárne dokonalé číslo, ani či je dokonalých čísel konečný alebo nekonečný počet.

Dušan Jedinák

Obsah

Redakčná pošta ..... 2. strana obálky
Ernst Zermelo – ponúkol axiómu výberu 1
Korešpondenčná súťaž v školskom roku 2015/2016 2
Riešenia 2. série úloh korešpondenčnej súťaže 2
Výsledkové listiny po 2. sérii úloh korešpondenčnej súťaže 8
Kategória C 8
Kategória B 8
Niekoľko dopravných úloh 9
Cesta do Chorvátska 9
Z Bratislavy do Košíc 10
Diaľnica 11
To vedel už Euklides ..... 3. strana obálky

MATMIX – matematický časopis pre žiakov základných a stredných škôl, vydáva Ing. Mgr. Martin Hriňák v spolupráci s Jednotou slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Bratislava 1, a APROMOD, s. r. o., ako pomocnú literatúru pre predmetové komisie matematiky a pre žiakov so záujmom o matematiku.

Vydávanie časopisu je spolufinancované z dotácie Ministerstva školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky.

Šéfredaktor: Ing. Mgr. Martin Hriňák
Redakcia: Dušan Jedinák, Mgr. Katarína Hriňáková
Vydavateľ: Ing. Mgr. Martin Hriňák, Havanská 17, 040 13 Košice, IČO 41857836
Distribúcia: APROMOD, s. r. o., Bratislavská 716/2, 900 46 Most pri Bratislave
Adresa redakcie: Ing. Mgr. Martin Hriňák, MATMIX, Bratislavská 716/2, 900 46 Most pri Bratislave
Časopis vychádza štyrikrát ročne. Cena 1,35 €. Náklad: 150 ks. Jún 2016.
E-mail: matmix@matmix.sk
Webová stránka: http://www.matmix.sk
Registračné číslo MK SR: EV 2029/08
ISSN: 1336-7854

