Korešpondenčná súťaž v školskom roku 2016/2017

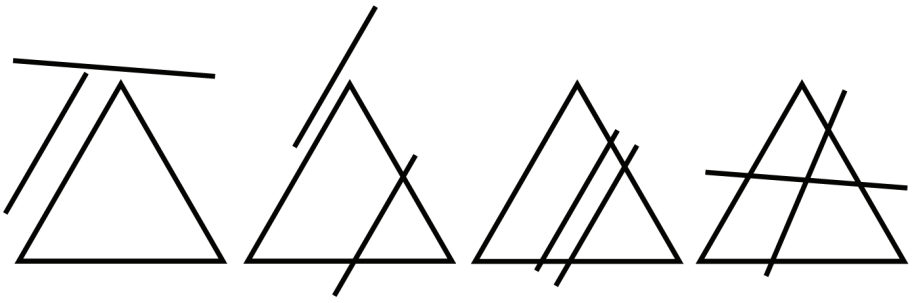
Riešenia 2. série úloh korešpondenčnej súťaže

1. Ak zväčšíme stranu štvorca o 30 %, zväčší sa jeho obvod o 12 m. Aká je dĺžka strany pôvodného štvorca v metroch?

Riešenie: Označme dĺžku strany pôvodného štvorca v metroch ako a. Potom obvod pôvodného štvorca je $4a$. Dĺžka strany zväčšeného štvorca je $1{,}3a$ a jeho obvod je $4 \cdot 1{,}3a = 5{,}2a$. Rozdiel obvodov väčšieho a menšieho štvorca je $5{,}2a - 4a = 1{,}2a$. Tento rozdiel sa rovná 12 metrom, teda musí platiť $1{,}2a = 12$, teda $a = 10$. Dĺžka strany pôvodného štvorca je 10 metrov.

2. Zistite, na koľko častí vieme rozdeliť trojuholník dvoma rôznymi úsečkami.

Riešenie: Ak pretneme nejaký útvar, ktorý je tvorený n časťami, úsečkou, počet častí vzniknutého útvaru môže byť maximálne $2n$, pretože každá pôvodná časť môže byť úsečkou rozdelená na maximálne dve časti. Preto jedna úsečka môže rozdeliť trojuholník na maximálne 2 časti a dve úsečky rozdelia trojuholník na maximálne štyri časti. To, že sa každý počet častí (1, 2, 3, 4) dá dosiahnuť, ľahko overíme pomocou nasledujúcich obrázkov:



3. Nájdite všetky prirodzené čísla, ktoré sa po prešktnutí poslednej cifry zmenšia štvornásobne.

Riešenie: Jednociferné prirodzené čísla zrejme nevyhovujú, pretože prešktnutím poslednej číslice nedostaneme žiadne číslo (ak by sme ho považovali za nulu, tak to nie je prirodzené číslo, teda ani táto možnosť nevyhovuje). Ak uvažujeme dvojciferné a väčšie prirodzené čísla, môžeme ich zapísať v tvare $10a + b$, kde a je prirodzené

číslo a b je cifra (0, 1, ..., 9). Škrtnutím poslednej cifry dostaneme číslo a. Potom má platiť: $10a + b = 4 \cdot a$, odkiaľ dostaneme, že má platiť $6a + b = 0$, čo však nemôže platiť, pretože a je prirodzené číslo, a teda ľavá strana rovnice bude určite väčšia ako 0. Preto neexistujú prirodzené čísla, ktoré by vyhovovali zadaniu úlohy.

4. Štyria kamaráti sa vážili tak, že sa na váhu postavili vždy traja. Postupne vážili 155,5 kg, 152,8 kg, 158,1 kg a 157,3 kg. Koľko vážia jednotliví kamaráti?

Riešenie: Ak sčítame všetky štyri uvedené hmotnosti, dostaneme súčet 623,7 kg. V ňom je hmotnosť každého kamaráta započítaná trikrát, pretože každý z nich chýbal v práve jednom vážení. Preto bude súčet hmotností kamarátov 623,7 kg : 3 = 207,9 kg. Odčítaním hmotností troch kamarátov od súčtu hmotností všetkých štyroch kamarátov postupne dostaneme, že hmotnosť prvého je 207,9 kg – 155,5 kg = 52,4 kg, hmotnosť druhého je 207,9 kg – 152,8 kg = 55,1 kg, hmotnosť tretieho je 207,9 kg – – 158,1 kg = 49,8 kg, hmotnosť štvrtého je 207,9 kg – 157,3 kg = 50,6 kg.

5. Určte všetky trojciferné čísla ABC, ktoré sa rovnajú súčtu dvojciferných čísel AB, AC, BA, BC, CA a CB.

Riešenie: Na základe zadania má platiť nasledujúca rovnosť:

$$100A + 10B + C = (10A + B) + (10A + C) + (10B + A) + (10B + C) + (10C + A) + (10C + B).$$

Jej úpravou dostaneme, že má platiť

$$100A + 10B + C = 22 \cdot (A + B + C).$$

To znamená, že C musí byť párne číslo a číslo ABC musí byť deliteľné jedenástimi. Na základe kritéria deliteľnosti jedenástimi vieme, že $A - B + C$ musí byť deliteľné jedenástimi. Keďže A, B, C sú cifry, tento výraz môže nadobúdať hodnoty len od –8 po 18, a teda to môžu byť len hodnoty 0 a 11.

V prvom prípade platí $A - B + C = 0$, teda $B = A + C$. Dosadením tohto vzťahu do vyššie uvedenej rovnice dostaneme, že platí

$$100A + 10(A + C) + C = 22 \cdot (A + (A + C) + C),$$
$$110A + 11C = 44A + 44C,$$
$$66A = 33C,$$
$$2A = C.$$

Potom $B = A + C = 3A$. Za A teraz postupne dosadíme jednotlivé možné hodnoty (1, 2, 3, väčšie už nie, pretože potom by B bolo väčšie ako 9) a dostaneme, že riešením úlohy sú tri čísla: 132, 264, 396.

V druhom prípade platí $A - B + C = 11$, teda $B = A + C - 11$. Dosadením tohto vzťahu do vyššie uvedenej rovnice dostaneme, že platí

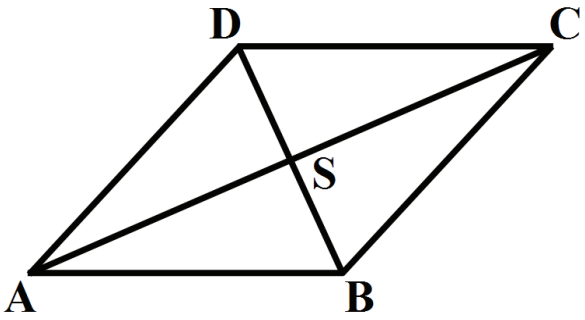
$$100A + 10(A + C - 11) + C = 22 \cdot (A + (A + C - 11) + C),$$
$$110A + 11C - 110 = 44A + 44C - 242,$$
$$66A + 132 = 33C,$$
$$2A + 4 = C.$$

Potom $B = A + C - 11 = 3A - 7$. Za A teraz postupne dosadíme jednotlivé možné hodnoty (1, 2, väčšie už nie, pretože potom by C bolo väčšie ako 9) a dostaneme, že v tomto prípade úloha nemá riešenie, pretože hodnoty B vychádzajú záporné.

Riešením úlohy sú tri čísla: 132, 264, 396.

6. Vypočítajte dĺžku uhlopriečky AC v kosoštvorci $ABCD$, ak strana kosoštvorca má dĺžku 20 dm a druhá uhlopriečka BD má dĺžku 24 dm.

Riešenie: Označme priesečník uhlopriečok ako S.



Keďže uhlopriečky sa v kosoštvorci rozpoľujú a sú na seba kolmé, platí $|BS| = |BD| : 2 = 12$ cm. V trojuholníku ABS platí Pytagorova veta, a tak postupne dostaneme, že platí:

$$|AB|^2 = |BS|^2 + |AS|^2,$$
$$400\ \text{dm}^2 = 144\ \text{dm}^2 + |AS|^2,$$
$$256\ \text{dm}^2 = |AS|^2,$$
$$16\ \text{dm} = |AS|,$$

a teda $|AC| = 2 \cdot |AS| = 32$ cm. Uhlopriečka AC v kosoštvorci $ABCD$ má dĺžku 32 cm.

7. Riešte rovnicu v reálnych číslach: $x^2+\sqrt{x+5}=5$.

Riešenie: Prevedením x^2 na pravú stranu dostaneme rovnicu $\sqrt{x+5}=5-x^2$, odkiaľ dostávame podmienku, že musí platiť $x^2\le 5$. Umocnením tejto rovnice dostaneme (neekvivalentnú) rovnicu $x^4-10x^2-x+20=0$. Túto rovnicu si rozpíšeme ako súčin dvoch polynómov druhého stupňa:

$$0=x^4-10x^2-x+20=\left(x^2+ax+b\right)\cdot\left(x^2+cx+d\right),$$

kde a, b, c, d sú reálne čísla. Roznásobením pravej strany a porovnaním koeficientov pri zodpovedajúcich mocninách x dostaneme sústavu rovníc

$$\begin{aligned} a+c&=0,\\ ac+b+d&=-10,\\ ad+bc&=-1,\\ bd&=20. \end{aligned}$$

Z poslednej rovnice budeme hľadať hodnoty b a d medzi celočíselnými deliteľmi čísla 20 a zistíme, že sústava má riešenie $a=1, b=-4, c=-1, d=-5$. To znamená, že platí

$$\left(x^2+x-4\right)\cdot\left(x^2-x-5\right)=0.$$

Stačí nám vyriešiť dve kvadratické rovnice:

$$\begin{aligned} \left(x^2+x-4\right)&=0,\\ \left(x^2-x-5\right)&=0. \end{aligned}$$

Ich koreňmi sú

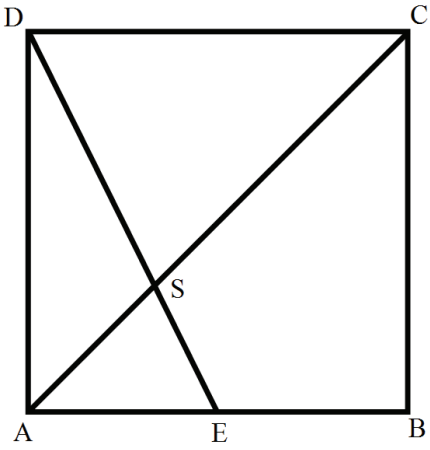
$$x_1=\frac{-1+\sqrt{17}}{2},\ x_2=\frac{-1-\sqrt{17}}{2},\ x_3=\frac{1+\sqrt{21}}{2},\ x_4=\frac{1-\sqrt{21}}{2}.$$

Podmienku $x^2\le 5$ spĺňajú len dva z nich: $x_1=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$, $x_4=\frac{1-\sqrt{21}}{2}$. Skúškou sa presvedčíme, že oba uvedené korene sú riešením rovnice zo zadania.

8. Štvorec *ABCD* má veľkosť strany 6 cm. Stred strany *AB* označíme ako bod *E*. Úsečky *AC* a *DE* rozdelia štvorec na štyri útvary. Vypočítajte obsahy týchto útvarov.

Riešenie: Označme priesečník úsečiek *AC* a *DE* ako *S*. Trojuholníky *ASE* a *CSD* sú podobné podľa vety uu, pretože majú dva rovnaké uhly – uhol pri vrchole *S* je

vrcholový a uhly SAE a SCD sú striedavé. Keďže $|AE|:|CD| = 3\text{ cm}:6\text{ cm} = 1:2,$ budú v rovnakom pomere aj ich výšky. Keďže súčet výšok z vrcholu S na príslušné strany v oboch trojuholníkoch je 6 cm, bude mať výška z vrcholu S v trojuholníku ASE veľkosť 2 cm a výška z vrcholu S v trojuholníku CDS veľkosť 4 cm. Potom pre obsahy trojuholníkov ASE a CDS dostávame:



$$S_{\triangle AES} = \frac{1}{2}\cdot|AE|\cdot v_{AE} = \frac{1}{2}\cdot 3\text{ cm}\cdot 2\text{ cm} = 3\text{ cm}^2,$$

$$S_{\triangle CDS} = \frac{1}{2}\cdot|CD|\cdot v_{CD} = \frac{1}{2}\cdot 6\text{ cm}\cdot 4\text{ cm} = 12\text{ cm}^2.$$

Trojuholník AED má obsah $S_{\triangle AED} = \frac{1}{2}\cdot|AE|\cdot|AD| = \frac{1}{2}\cdot 3\text{ cm}\cdot 6\text{ cm} = 9\text{ cm}^2,$ preto

$$S_{\triangle ASD} = S_{\triangle AED} - S_{\triangle AES} = 9\text{ cm}^2 - 3\text{ cm}^2 = 6\text{ cm}^2.$$

Napokon vypočítame obsah štvoruholníka $EBCS$:

$$S_{EBCS} = S_{ABCD} - S_{\triangle AED} - S_{\triangle CDS} = 36\text{ cm}^2 - 9\text{ cm}^2 - 12\text{ cm}^2 = 15\text{ cm}^2.$$

Hľadané útvary majú obsahy $3\text{ cm}^2, 6\text{ cm}^2, 12\text{ cm}^2$ a 15 cm^2.

9. Nech k je najmenšie prirodzené číslo také, že číslo $k! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k$ je deliteľné číslom 1 000 000. Aký je ciferný súčet čísla k?

Riešenie: Keďže platí $1\,000\,000 = 2^6\cdot 5^6,$ musí $k!$ obsahovať súčet šiestich pätiek (dvojok bude dosť, pretože každý druhý činiteľ je deliteľný dvomi). Najmenšie prirodzené čísla deliteľné piatimi sú 5 (1. päťka), 10 (2.), 15 (3.), 20 (4.), 25 (5. a 6.). Keďže 25 obsahuje vo svojom prvočíselnom zápise dve päťky, bude už číslo 25! deliteľné 5^6, a teda bude deliteľné aj číslom 1 000 000. Ciferný súčet čísla 25 je 7, a teda aj ciferný súčet čísla k je 7.

10. Dokážte, že ak sú M aj M^2+2 prvočísla, tak aj M^3+2 je prvočíslo.

Riešenie: Ak M nie je prvočíslo, potom tvrdenie triviálne platí, lebo ide o implikáciu s predpokladom, ktorý má pravdivostnú hodnotu 0.

Nech M je prvočíslo. Ak je M deliteľné tromi, musí platiť $M = 3$, lebo M je aj prvočíslo. Potom $M^2 + 2 = 11,$ čo je prvočíslo, a $M^3 + 2 = 29$ je tiež prvočíslo. Teda tvrdenie platí.

Ak M dáva po delení tromi zvyšok 1, môžeme ho písať v tvare $M = 3k + 1,$ kde k je nezáporné celé číslo, pretože M je prvočíslo, a teda je väčšie ako 1. Potom

$$M^2 + 2 = (3k + 1)^2 + 2 = 3 \cdot (3k^2 + 2k + 1),$$

čo znamená, že $M^2 + 2$ má dva delitele väčšie ako 1, lebo platí

$$3k^2 + 2k + 1 \geq 6.$$

Z toho vyplýva, že $M^2 + 2$ nie je prvočíslo. To znamená, že predpoklad implikácie zo zadania má pravdivostnú hodnotu 0, a teda implikácia platí.

Podobne, ak M dáva po delení tromi zvyšok 2, môžeme ho písať v tvare $M = 3k + 2,$ kde k je nezáporné celé číslo. Potom platí

$$M^2 + 2 = (3k + 2)^2 + 2 = 3 \cdot (3k^2 + 4k + 2),$$

čo znamená, že $M^2 + 2$ má dva delitele väčšie ako 1, lebo

$$3k^2 + 4k + 2 \geq 2,$$

teda $M^2 + 2$ nie je prvočíslo a implikácia má opäť predpoklad s pravdivostnou hodnotou 0, teda implikácia platí.

Keďže sme vyčerpali všetky možnosti pre M, tvrdenie je dokázané.

Zadania 3. série úloh korešpondenčnej súťaže

1. Francúzsky matematik Lucas pripravil nasledujúcu hru: na jedenástich poliach je 5 bielych a 5 čiernych figúr. Figúry možno ťahať buď na susedné pole (ak je voľné), alebo preskočiť cez jednu figúrku na ďalšie voľné pole. Biele sa musia pohybovať len doprava, čierne len doľava.

B	B	B	B	B		Č	Č	Č	Č	Č

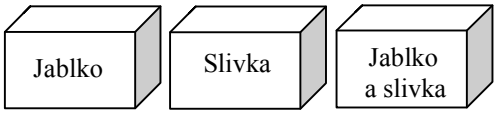
Napíšte postup, ktorým dokážeme vymeniť úplne ich pôvodné postavenie (biele figúrky budú vpravo a čierne vľavo).

2. Zoberte si (staršiu) kalkulačku a prezrite si, ako sa na nej zobrazujú jednotlivé číslice. Teraz si predstavte, že sa dve zo siedmich zobrazovacích políčok pokazia. Ktoré to musia byť, aby ste stále dokázali jednoznačne určiť, ktorá číslica je ktorá?

3. Na stole je 10 minci, z toho niekoľko má na spodnej časti bielu nálepku. Traja súrodenci Adam, Boris a Cyril sa s nimi raz začali hrať. Najskôr si Adam vybral tri mince a na papier si zaznačil koľko z nich bolo s nálepkou. Potom mince vrátil na ich pôvodné miesto. Následne to isté zopakoval aj Boris a Cyril a pokračovali dookola. Každý si priebežne zaznačoval, ktoré tri mince už boli spolu ťahané a rovnaký výber si už potom nikto nemohol vytiahnuť. Takto sa striedali dovtedy, kým Adam povedal, že už nemôže vyberať. Pozreli sa na svoje výsledky. Adam a Boris priznali, že nemali prípad, kedy by všetky tri mince boli bez nálepky. Cyril sa potom pochválil s tým, že jemu sa na každý druhýkrát podarilo vybrať všetky tri bez nálepky. Koľko mincí malo nálepku?

4. Koľko existuje trojciferných prirodzených čísel takých, že ich druhá aj tretia mocnina končia na tú istú číslicu?

5. Máme tri škatule. V jednej je jablko, v druhej slivka, v tretej jablko a slivka. Ale každá z nich je zle označená. Môžeme vytiahnuť iba jeden kus ovocia z iba jednej škatule. Ako zistíme, čo je v ktorej škatuli?



6. V nepriehľadnej obálke je 100 lístkov, na ktorých sú napísané prirodzené čísla od 1 po 100. Na každom je iné číslo. Najmenej koľko lístkov musíme so zatvorenými očami vytiahnuť z obálky, aby sme mali istotu, že súčin všetkých čísel na vytiahnutých lístkoch je deliteľný 4?

7. Na ukazovateli prejdených kilometrov v aute bolo na štarte pretekov zobrazené číslo 10. S týmto autom sme 12-krát absolvovali ten istý okruh a odčítali stav ukazovateľa pri prechode štartom. Výsledky sú v tabuľke. Akú dĺžku má okruh za predpokladu, že do začiatku počítania auto prešlo presne 10,75 km? (Keď je na ukazovateli napr. číslo 50, dovtedy prejdená vzdialenosť je aspoň 50 km a zároveň menej ako 51 km).

Okruhy	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Kilometre	10	14	17	21	25	28	32	36	39	43	46	50	54

8. Do kružnice je vpísaný štvoruholník, ktorého dve strany majú dĺžku 12 cm a dve 5 cm, a ktorého uhlopriečky majú rôzne dĺžky. Vypočítajte ich dĺžky.

9. Dokážte, že v trojuholníku *ABC* pri štandardnom označení platí:

$$t_a + t_b + t_c > \frac{1}{2}(a+b+c).$$

10. Dokážte, že ak máme zadaných 9 mrežových bodov v priestore, potom existujú aspoň dva z nich také, že aj stred úsečky nimi určenej je mrežový bod.

11. Zistite, či existuje množina 4 032 takých prirodzených čísel, že súčet čísel ľubovoľnej 2 017-prvkovej podmnožiny tejto množiny nie je deliteľný číslom 2 017.

12. Nech *a*, *b*, *c* sú kladné reálne čísla, ktorých súčin nie je väčší ako ich súčet. Dokážte, že potom platí nerovnosť $a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{3}abc$.

13. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je definovaná predpisom $a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1}$, pričom $a_1 = 20$, $a_2 = 30$. Nájdite všetky prirodzené čísla *n*, pre ktoré je $5a_{n+1}a_n + 1$ druhou mocninou celého čísla.

14. Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla *n* platí nasledujúca nerovnosť:

$$\left(2n^2 + 3n + 1\right)^n \geq 6^n \cdot (n!)^2$$

Termín odoslania riešení úloh 3. série: do 5. 6. 2017

Riešenia zasielajte na adresu:

MATMIX
Ing. Mgr. Martin Hriňák
Bratislavská 716/2
900 46 Most pri Bratislave

.

Výsledkové listiny po 2. sérii úloh korešpondenčnej súťaže

Kategória Z

Por.	Priezvisko	Meno	Škola	PS	1	2	3	4	Spolu
1	Pokorný	Matej	ZŠ Žilina	14	3	0	0	5	22
2	Stanovský	Peter	ZŠ Košice	8	5	0	2	5	20
3	Píľa	Michal	ZŠ Levoča	19	0	0	0	0	19
4	Popeľaš	Matej	ZŠ s MŠ Palín	5	0	0	0	0	5
4	Klajban	Jakub	ZŠ s MŠ Palín	5	0	0	0	0	5

Kategória C

Por.	Priezvisko	Meno	Škola	PS	3	4	5	6	Spolu
1	Ozimák	Sebastián	HA Piešťany	14	0	5	3	1	23
1	Szücsová	Radoslava	SOŠ Svit	12	0	5	1	5	23
3	Kyselová	Barbora	SOŠ Svit	16	0	1	0	5	22
3	Novotný	Ján	G Prešov	11	5	2	1	3	22
5	Varga	Tomáš	G Košice	10	0	5	0	5	20
6	Závodský	Branislav	G Košice	8	0	0	0	0	8

Kategória B

Por.	Priezvisko	Meno	Škola	PS	5	6	7	8	Spolu
1	Horváth	Jakub	G Bratislava	20	4	1	5	3	33
2	Nová	Jana	G Prešov	15	4	0	5	3	27
2	Mišík	Ján	G Košice	18	4	0	5	0	27
4	Novotný	Peter	G Prešov	18	3	0	5	0	26
5	Farkaš	Zoltán	G Dunajská Streda	13	0	0	0	0	13
6	Nagy	Peter	G Košice	11	0	0	0	0	11

Kategória A

Por.	Priezvisko	Meno	Škola	PS	7	8	9	10	Spolu
1	Varga	Juraj	G Košice	11	3	2	5	5	26
2	Kováč	Jakub	G Košice	10	3	0	5	5	23
3	Polák	Patrik	G Prešov	7	3	0	5	4	19
4	Molnár	Martin	G Košice	9	0	0	5	4	18
5	Tóthová	Katarína	G Prešov	6	0	0	5	5	16