Zadania 3. série úloh korešpondenčnej súťaže

1. Francúzsky matematik Lucas pripravil nasledujúcu hru: na jedenástich poliach je 5 bielych a 5 čiernych figúr. Figúry možno ťahať buď na susedné pole (ak je voľné), alebo preskočiť cez jednu figúrku na ďalšie voľné pole. Biele sa musia pohybovať len doprava, čierne len doľava.

B	B	B	B	B		Č	Č	Č	Č	Č

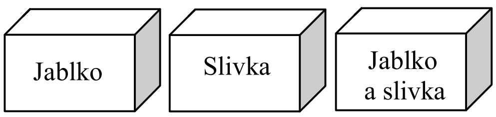
Napíšte postup, ktorým dokážeme vymeniť úplne ich pôvodné postavenie (biele figúrky budú vpravo a čierne vľavo).

2. Zoberte si (staršiu) kalkulačku a prezrite si, ako sa na nej zobrazujú jednotlivé číslice. Teraz si predstavte, že sa dve zo siedmich zobrazovacích políčok pokazia. Ktoré to musia byť, aby ste stále dokázali jednoznačne určiť, ktorá číslica je ktorá?

3. Na stole je 10 minci, z toho niekoľko má na spodnej časti bielu nálepku. Traja súrodenci Adam, Boris a Cyril sa s nimi raz začali hrať. Najskôr si Adam vybral tri mince a na papier si zaznačil koľko z nich bolo s nálepkou. Potom mince vrátil na ich pôvodné miesto. Následne to isté zopakoval aj Boris a Cyril a pokračovali dookola. Každý si priebežne zaznačoval, ktoré tri mince už boli spolu ťahané a rovnaký výber si už potom nikto nemohol vytiahnuť. Takto sa striedali dovtedy, kým Adam povedal, že už nemôže vyberať. Pozreli sa na svoje výsledky. Adam a Boris priznali, že nemali prípad, kedy by všetky tri mince boli bez nálepky. Cyril sa potom pochválil s tým, že jemu sa na každý druhýkrát podarilo vybrať všetky tri bez nálepky. Koľko mincí malo nálepku?

4. Koľko existuje trojciferných prirodzených čísel takých, že ich druhá aj tretia mocnina končia na tú istú číslicu?

5. Máme tri škatule. V jednej je jablko, v druhej slivka, v tretej jablko a slivka. Ale každá z nich je zle označená. Môžeme vytiahnuť iba jeden kus ovocia z iba jednej škatule. Ako zistíme, čo je v ktorej škatuli?



6. V nepriehľadnej obálke je 100 lístkov, na ktorých sú napísané prirodzené čísla od 1 po 100. Na každom je iné číslo. Najmenej koľko lístkov musíme so zatvorenými očami vytiahnuť z obálky, aby sme mali istotu, že súčin všetkých čísel na vytiahnutých lístkoch je deliteľný 4?

7. Na ukazovateli prejdených kilometrov v aute bolo na štarte pretekov zobrazené číslo 10. S týmto autom sme 12-krát absolvovali ten istý okruh a odčítali stav ukazovateľa pri prechode štartom. Výsledky sú v tabuľke. Akú dĺžku má okruh za predpokladu, že do začiatku počítania auto prešlo presne 10,75 km? (Keď je na ukazovateli napr. číslo 50, dovtedy prejdená vzdialenosť je aspoň 50 km a zároveň menej ako 51 km).

Okruhy	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Kilometre	10	14	17	21	25	28	32	36	39	43	46	50	54

8. Do kružnice je vpísaný štvoruholník, ktorého dve strany majú dĺžku 12 cm a dve 5 cm, a ktorého uhlopriečky majú rôzne dĺžky. Vypočítajte ich dĺžky.

9. Dokážte, že v trojuholníku *ABC* pri štandardnom označení platí:

$$t_a + t_b + t_c > \frac{1}{2}(a+b+c).$$

10. Dokážte, že ak máme zadaných 9 mrežových bodov v priestore, potom existujú aspoň dva z nich také, že aj stred úsečky nimi určenej je mrežový bod.

11. Zistite, či existuje množina 4 032 takých prirodzených čísel, že súčet čísel ľubovoľnej 2 017-prvkovej podmnožiny tejto množiny nie je deliteľný číslom 2 017.

12. Nech a, b, c sú kladné reálne čísla, ktorých súčin nie je väčší ako ich súčet. Dokážte, že potom platí nerovnosť $a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{3}abc$.

13. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je definovaná predpisom $a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1}$, pričom $a_1 = 20$, $a_2 = 30$. Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré je $5a_{n+1}a_n + 1$ druhou mocninou celého čísla.

14. Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla n platí nasledujúca nerovnosť:

$$\left(2n^2+3n+1\right)^n \geq 6^n \cdot \left(n!\right)^2$$

Termín odoslania riešení úloh 3. série: do 5. 6. 2017

Riešenia zasielajte na adresu:

MATMIX
Ing. Mgr. Martin Hriňák
Bratislavská 716/2
900 46 Most pri Bratislave

.