Riešenia 17 úloh pre rok 2017

1. Stanovte počet prirodzených čísel od 1 do 10^6, ktoré končia štvorčíslím **2 017**.

Riešenie: Ide o čísla tvaru XY2 017, pričom X a Y sú cifry 0 až 9. Takýchto čísel je $10 \cdot 10 = 100$.

2. Stanovte, koľko prvočísel menších než **2 017** má ciferný súčet 2.

Riešenie: Ide o prvočísla 2, 11 a 101, teda sú 3 (čísla 20, 200 a 2 000 sú deliteľné 10, teda nie sú prvočísla, podobne overíme zvyšné čísla obsahujúce dve jednotky).

3. V desiatkovej číselnej sústave stanovte ciferný súčet čísla $10^{\mathbf{2\,017}} + \mathbf{2\,017}$.

Riešenie: Uvedený súčet bude mať dekadický zápis 100...002017, teda ciferný súčet bude $1 + 2 + 1 + 7 = 11$.

4. Stanovte poslednú cifru čísla $\mathbf{2\,017}^{\mathbf{2\,017}} - 17$ vyjadreného v desiatkovej číselnej sústave.

Riešenie: Posledná cifra mocniny prirodzeného čísla závisí len od poslednej cifry tohto prirodzeného čísla, podobne posledná cifra rozdielu dvoch prirodzených čísel závisí od posledných cifier týchto dvoch čísel. Preto stačí hľadať poslednú cifru čísla $7^{2\,017} - 7$. Keďže platí $7^4 = 2\,401$, poslednou cifrou čísla $7^{2\,016} = \left(7^4\right)^{504} = 2\,401^{504}$ bude cifra 1, a teda poslednou cifrou čísla $7^{2\,017} = 7 \cdot 7^{2\,016}$ bude cifra 7, a teda poslednou cifrou čísla $7^{2\,017} - 7$ bude cifra 0.

5. Stanovte prvú číslicu najmenšieho prirodzeného čísla, ktorého súčet číslic je **2 017**.

Riešenie: Ak má byť prirodzené číslo s daným ciferným súčtom čo najmenšie, musí mať čo najmenej cifier (pričom žiadnu nulovú, keďže tie neovplyvňujú ciferný súčet) a medzi nimi čo najviac číslic 9 na konci čísla. Pretože $2\,017 = 224 \cdot 9 + 1$, hľadané číslo je 199.........9 (jednotka a za ňou 224-krát číslica 9), a teda hľadanou číslicou je číslica 1.

6. Zapíšme za sebou čísla od 1 do 999: 123 456 789 101 112 ... 997 998 999. Stanovte, aká číslica je na **2 017.** mieste od začiatku.

Riešenie: Jednociferných čísel je 9. Zaberajú 9 miest. Dvojciferných čísel je 90 (od 10 do 99). Zaberajú 180 miest. Trojciferných čísel je 900 (od 100 do 999). Zaberajú 2 700 miest. Hľadané 2 017. miesto je 1 828. miesto medzi trojcifernými číslami (1 828 = 2017 – 189). Na 1 828 miest sa zmestí 1828 : 3 = 609 úplných trojciferných čísel a ešte jedna cifra. 609. trojica cifier v postupnosti 100 101 102... je trojica 708 (lebo 100 je prvá trojica, 101 je druhá trojica, a teda 708 je 609. trojica), teda číslica na 2 017. mieste je 7 (7 je prvá cifra z nasledujúceho čísla 709).

7. Stanovte hodnotu výrazu

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2\,015}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2\,016}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2\,017}\right).$$

Riešenie: Jednotlivé časti výrazu možno upraviť vykrátiť na tvar:

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2\,017}{2\,016}\cdot\frac{2\,018}{2\,017}=\frac{2\,018}{2}=1\,009.$$

8. Stanovte zvyšok po delení čísla $10^{\mathbf{2\,017}}$ číslom 15.

Riešenie: Matematickou indukciou dokážeme, že 10^n dáva po delení číslom 15 zvyšok 10 pre všetky prirodzené čísla n. Pre $n=1$ tvrdenie triviálne platí. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre nejaké n. Potom platí $10^{n+1}=10\cdot 10^n\equiv 10\cdot 10=$ $=100\equiv 10\,(\mathrm{mod}\,15)$, čo sme chceli dokázať.

9. Stanovte poslednú cifru desatinného rozvoja čísla $5^{\mathbf{-2\,017}}$.

Riešenie: Keďže platí $2^{2\,017}=5^{-2\,017}\cdot 10^{2\,017}$, stačí nám určiť poslednú cifru čísla $2^{2\,017}$, pretože násobením mocninou desiatky len posúvame desatinnú čiarku. Keďže platí $2^5=32$, platí aj

$$2^{2\,017}=2^2\cdot 2^{2\,015}=2^2\cdot\left(2^5\right)^{403}=2\cdot 32^{504}\equiv 2^2\cdot 2^{504}=2^{505}=\left(2^5\right)^{101}\equiv 2^{101}=2\cdot 2^{100}=$$
$$=2\cdot\left(2^5\right)^{20}=2\cdot 32^{20}\equiv 2\cdot 2^{20}=2\cdot\left(2^5\right)^4=2\cdot 32^4\equiv 2\cdot 2^4=32\equiv 2\,(\mathrm{mod}\,10),$$

teda hľadanou poslednou cifrou desatinného rozvoja čísla $5^{-2\,017}$ je cifra 2.

10. Stanovte číselnú hodnotu výrazu

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{2\,015\cdot 2\,016}+\frac{1}{2\,016\cdot 2\,017}.$$

Riešenie: Jednotlivé časti výrazu možno upraviť takto:

$$\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2\,015}-\frac{1}{2\,016}\right)+\left(\frac{1}{2\,016}-\frac{1}{2\,017}\right)=1-\frac{1}{2\,017}=\frac{2\,016}{2\,017},$$

pretože ostatné zlomky sa postupne odčítajú.

11. Zápis čísla K v desiatkovej sústave sa skladá z **2 017** deviatok (999...999). Stanovte, koľko deviatok obsahuje desiatkový zápis čísla K^2.

Riešenie: Číslo K môžeme zapísať aj ako $10^{2\,017}-1$. Potom $K^2=\left(10^{2\,017}-1\right)^2=$ $=10^{4\,034}-2\cdot10^{2\,017}+1.$ Toto číslo vyzerá tak, že má na začiatku 2 016 deviatok, potom nasleduje 8, potom 2 016 núl a na konci jednotka, teda deviatok tam je 2 016.

12. V encyklopédii je očíslovaných **2 017** strán (prirodzené čísla do **2 017** vrátane). Stanovte, koľkokrát sa na týchto očíslovaných stránkach vyskytuje číslica 7.

Riešenie: Sedmička sa môže vyskytnúť len na mieste jednotiek, desiatok a stoviek, môže byť jedna, dve alebo tri. Najprv sa zaoberajme číslami väčšími ako 1 999 – z nich obsahujú sedmičku len dve – 2 007 a 2 017. Teraz sa zameriame na čísla menšie ako 2 000. Ak je jedna na mieste jednotiek, tak ide o čísla tvaru XYZ7, pričom X je 0 alebo 1, Y, Z sú cifry 0 až 9 rôzne od 7. Ľubovoľnej ich kombinácii zodpovedá vyhovujúce číslo, takže ich je $2\cdot9\cdot9=162$. Podobne čísel tvaru XY7Z aj X7YZ je 162. Ak sú tam sedmičky dve, ide o čísla typu XY77, X7Y7 a X77Y, pričom X je 0 alebo 1, Y je cifra 0 až 9 rôzna od 7. Každého typu ich je tam $2\cdot9=18$, avšak každý z nich obsahuje sedmičky dve. Ešte nám zostali tri sedmičky – tam sú len dve možnosti – 777 a 1 777. Dokopy sme použili číslicu sedem $2+3\cdot162+2\cdot3\cdot18+3\cdot2=602$-krát.

13. Stanovte, koľko prirodzených čísel menších než $10^{\mathbf{2\,017}}$ má ciferný súčet 3.

Riešenie: Každé prirodzené číslo menšie než $10^{2\,017}$ má najviac 2 017 cifier. Ciferný súčet 3 môžeme dostať tromi spôsobmi: 3, 1 + 2 a 1 + 1 + 1 (plus ľubovoľný počet nulových cifier). Vyhovujúcich čísel s práve jednou nenulovou číslicou 3 je 2 017 (sú to 3, 30, 300, ..., $3\cdot10^{2\,016}$). Ak tam bude dvojica nenulových cifier 1 a 2, možností je $2\,017\cdot2\,016=4\,066\,272$ – najprv vyberieme jedno miesto z 2 017, kam umiestnime cifru 1, a potom jedno miesto zo zvyšných 2 016 miest, kam umiestnime cifru 2 (zvyšok doplníme nulami). Ak tam budú práve tri jednotky, bude ich

(2 017 · 2 016 · 2 015)/6 = 1 365 589 680 (na výber umiestnenia prvej jednotky máme 2 017 miest, pre druhú 2 016 a pre tretiu 2 015 miest, avšak jednotky sú rovnaké, takže každú možnosť sme započítali 1 · 2 · 3 = 6-krát).

Spolu všetkých požadovaných možností teda je

2 017 + 4 066 272 + 1 365 589 680 = 1 369 657 969.

14. Nájdite všetky rôzne trojice prirodzených čísel $x < y < z$, ktoré sú riešením rovnice $x \cdot y \cdot z + 4 = \mathbf{2\,017}$.

Riešenie: Pretože 2017 – 4 = 2013 = 3 · 11 · 61, hľadané čísla x, y, z budú mať len tieto vyššie uvedené prvočíselné delitele (prípadne 1). Ak zvolíme $x = 1$, y a z už musia byť väčšie ako 1, teda jedno z nich bude 3, 11 alebo 61 a druhé bude súčinom zvyšných dvoch prvočísel. Ak zvolíme $x = 3$, tak nutne $y = 11$ a $z = 61$ vzhľadom na usporiadanie čísel. Sú teda spolu štyri trojice prirodzených čísel pre požadované riešenie úlohy: 1, 3, 671; 1, 11, 183; 1, 33, 61; 3, 11, 61.

15. Stanovte, koľko rôznych štvoríc prirodzených čísel $x < y < z < t$ je riešením rovnice $x \cdot y \cdot z \cdot t + 15 = \mathbf{2\,017}$.

Riešenie: Analogicky ako v predchádzajúcej úlohe dostaneme, že musí platiť $x \cdot y \cdot z \cdot t = 2\,002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. Ak zvolíme $x = 1$, zostali nám 4 prvočísla. Keďže z nich máme vytvoriť tri čísla, jedno sa bude rovnať súčinu niektorých dvoch prvočísel a zvyšné dve sa budú rovnať zvyšným dvom prvočíslam (budú určené jednoznačne vzhľadom na podmienku usporiadania zo zadania). Vyberáme teda dve čísla zo štyroch, čo vieme urobiť 6 spôsobmi (kombinácie bez opakovania). Ak zvolíme $x = 2$, tak ďalšie čísla budú $y = 7$, $z = 11$ a $t = 13$, teda je to siedma možnosť. Ďalšie možnosti už nevyhovujú vzhľadom na usporiadanie čísel. Spomínanej úlohe vyhovuje sedem možností pre požadované usporiadané štvorice.

16. Na tabuli sú napísané všetky prirodzené čísla od 1 do **2 017** (vrátane). Ak najprv označíme z nich všetky, ktoré sú deliteľné dvomi, potom inou značkou označíme všetky čísla deliteľné tromi a na záver označíme zase inou značkou všetky čísla deliteľné štyrmi, stanovte, koľko z čísel na tabuli bude potom označených práve dvomi značkami.

Riešenie: Keďže číslo deliteľné štyrmi je deliteľné aj dvomi, každé číslo deliteľné štyrmi bude mať aspoň dve značky. Potom číslo, ktoré má práve dve značky a je deliteľné štyrmi, nesmie byť nedeliteľné tromi (teda dvanástimi). Keďže $2\,017 : 4 = 504$ zv. 1, čísel deliteľných štyrmi je 504. Keďže $2\,017 : 12 = 168$ zv. 1, čísel deliteľných dvanástimi je 168, a teda vyhovujúcich čísel tohto typu je 504 – 168 = 336. Ak číslo nie je deliteľné štyrmi a má dve značky, musí byť deliteľné dvomi a súčasne tromi, teda šiestimi (ale nie je deliteľné štyrmi, teda nie je deliteľné dvanástimi). Keďže $2\,017 : 6 = 336$ zv. 1, čísel deliteľných šiestimi je 336. Čísel deliteľných dvanástimi je 168, a teda vyhovujúcich čísel tohto typu je 336 – 168 = 168. Dokopy teda dostávame 336 + 168 = 504 čísel s práve dvoma značkami.

17. Vieme, že $s_n = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot n$. Stanovte $s_{2\,016} + s_{\mathbf{2\,017}}$.

Riešenie: Ľahko nahliadneme, že $s_1 = 1$, $s_2 = -1$, $s_3 = 2$, $s_4 = -2$, $s_5 = 3$, $s_6 = -3$, ..., $s_{2k-1} = k$ a $s_{2k} = -k$ pre k z množiny prirodzených čísel (tvrdenie ľahko dokážeme matematickou indukciou). Teda $s_{2\,016} = s_{2\cdot 1\,008} = -1\,008$ a $s_{2\,017} = s_{2\cdot 1\,009\,-\,1} = 1\,009$, teda $s_{2\,016} + s_{2\,017} = -1\,008 + 1\,009 = 1$.

Dušan Jedinák, Martin Hriňák