15. Stanovte posledné dve cifry čísla $3^{2\,018}$.

16. Nájdite rôzne trojice prirodzených čísel $x < y < z$, ktoré sú riešením rovnice

$$x \cdot y \cdot z + 4 = 2\,018.$$

17. Stanovte číselnú hodnotu výrazu

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{2\,016\cdot 2\,017}+\frac{1}{2\,017\cdot 2\,018}.$$

18. Stanovte, koľko rôznych štvoríc prirodzených čísel $x < y < z < t$ je riešením rovnice $x \cdot y \cdot z \cdot t + 16 = 2\,018$.

Dušan Jedinák

Korešpondenčná súťaž v školskom roku 2017/2018

Riešenia 2. série úloh korešpondenčnej súťaže

1. Šesť chlapcov bolo na brigáde. Peter a Pavol zarobili spolu 1 100 €, Pavol a Jozef 1 700 €, Jozef a Michal 1 100 €, Michal a Ján 3 300 €, Ján a Fero 5 300 €, Fero a Pavol zarobili 3 200 €. Koľko zarobil ktorý chlapec na brigáde?

Riešenie: Označme si sumy, ktoré si chlapci zarobili na brigáde, takto: Peter – a, Pavol – b, Jozef – c, Michal – d, Ján – e, Fero – f. Potom dostávame nasledujúcu sústavu rovníc (číselné údaje predstavujú eurá):

$$\begin{aligned} a+b&=1100,\\ b+c&=1\,700,\\ c+d&=1100,\\ d+e&=3\,300,\\ e+f&=5\,300,\\ f+b&=3\,200. \end{aligned}$$

Sčítaním prvej, tretej a piatej rovnice dostávame, že $a+b+c+d+e+f=7\,500$. Sčítaním všetkých šiestich rovníc dostávame, že platí

$$a+3b+2c+2d+2e+2f=15\,700.$$

Túto poslednú rovnicu môžeme zapísať aj ako

$$2\cdot(a+b+c+d+e+f)-a+b=15\,700.$$

Dosadením hodnoty 7 500 súčtu jednotlivých neznámych dostávame, že platí

$$2 \cdot 7\,500 - a + b = 15\,700,$$

$$b - a = 700.$$

Sčítaním tejto rovnice s prvou rovnicou zo zadania dostaneme, že platí

$$(b - a) + (a + b) = 700 + 1100,$$

$$2b = 1\,800$$

$$b = 900.$$

To znamená, že Pavol zarobil 900 €. Keďže Peter a Pavol zarobili spolu 1 100 €, Peter zarobil 1 100 € – 900 € = 200 €. Keďže Pavol a Jozef zarobili spolu 1 700 €, Jozef zarobil 1 700 € – 900 € = 800 €. Keďže Jozef a Michal zarobili spolu 1 100 €, Michal zarobil 1 100 € – 800 € = 300 €. Keďže Michal a Ján zarobili spolu 3 300 €, Ján zarobil 3 300 € – 300 € = 3 000 €. Keďže Ján a Fero zarobili spolu 5 300 €, Fero zarobil 5 300 € – 3 000 € = 2 300 €.

Celkovo dostávame, že Peter zarobil 200 €, Pavol 900 €, Jozef 800 €, Michal 300 €, Ján 3 000 € a Fero 2 300 €.

2. Za jednotlivé písmená dosaďte číslice 0 až 9 tak, aby platilo nasledujúce sčítanie (za rôzne písmená rôzne číslice):

```
  TWENTY
  TWENTY
  TWENTY
     TEN
     TEN
------
  EIGHTY
```

Riešenie: Úloha má jediné riešenie:

```
  123416
  123416
  123416
     134
     134
------
  370516
```

3. Piati kamaráti, A, B, C, D a E, majú taký zvyk, že denne striedajú kravaty. Vždy si zoberú tú, ktorú najdlhšie nemali. Každý z nich má aspoň dve kravaty, pričom ani

jeden z nich ich nemá viac ako 11. Žiadny z nich nemá dve kravaty rovnakej farby, žiadni dvaja nevlastnia rovnaký počet kravát. Uvádzané údaje sú z predchádzajúceho roka:

- 1. decembra mal A modrú, B a C červenú, D zelenú, E žltú kravatu.
- 19. decembra mal D zelenú, E žltú, C modrú, ostatní dvaja červenú kravatu.
- 23. decembra mal D bielu, 26. decembra žltú kravatu.
- 11. decembra nosili kravaty vo farbách: žltá, červená, modrá, zelená a biela.
- 31. decembra mal každý na sebe rovnakú kravatu ako 1. decembra.

Akú kravatu mal na sebe B 1. januára tohto roku?

Riešenie: To, že si kamaráti vždy zoberú tú kravatu, ktorú najdlhšie nemali, znamená, že kravaty nosia stále v rovnakom poradí, a teda kravatu rovnakej farby vždy nosia v rovnakých časových rozstupoch (periódach). Dĺžka tejto periódy sa rovná počtu kravát, ktoré majú. Keďže 1. a 31. decembra mali všetci rovnakú farbu kravaty, perióda nosenia kravát je u každého deliteľom čísla 30 (rozdiel 31 a 1). Keďže každý z nich má iný počet kravát, ktorý je aspoň 2 a maximálne 11, do úvahy pripadajú len tieto delitele 30: 2, 3, 5, 6 a 10. Keďže ich je práve 5, tak každý z nich bude počtom kravát práve jedného kamaráta.

1. a 19. decembra mali rovnaké kravaty B (červenú), D (zelenú) a E (žltú). To znamená, že ich počty kravát delia 18 – sú to 2, 3, 6. Keďže D mal 23. inú kravatu ako 26. decembra, nebude ich mať 3. Podobne mal D inú kravatu 19. a 23., teda nemohol ich mať ani dve. Preto má D 6 kravát. Keďže 23. decembra mal na sebe bielu kravatu, mal ju na sebe aj 11. decembra (rozdiel 12 dní).

Keďže sme už priradili tri delitele, pre A a C platí, že majú 5 a 10 kravát. To znamená, že 11. decembra mali na sebe to isté, čo 1. decembra, pretože je to 10 dní po 1. decembri. Teda mali modrú a červenú kravatu. To znamená, že B a E mali 11. decembra na sebe zelenú a žltú kravatu.

Medzi 31. a 11. decembrom je 20 dní. Ak by mal B dve kravaty, tak 11. decembra musel mať na sebe červenú kravatu. Pre B a E však ostali len žltá a zelená kravata, takže B nemohol mať 2 kravaty a musel mať 3. Potom mal E dve kravaty a 11. decembra mal na sebe tú istú ako 31. decembra, teda žltú. To znamená, že B mal na sebe 11. decembra na sebe zelenú kravatu. Keďže má tri kravaty, tak o 21 dní po tomto dni, teda 1. januára tohto roka, mal na sebe tú istú – zelenú – kravatu.

B mal na sebe 1. januára tohto roku zelenú kravatu.

4. Nájdite všetky sedemciferné čísla zostavené z ľubovoľných cifier, ktoré sa môžu opakovať s touto podmienkou: ak označíme zľava cifry postupne A, B, C, D, E, F, G, tak platí: $A - B = C$, $B - C = D$, $C - D = E$, $D - E = F$, $E - F = G$.

Riešenie: Ak by posledné dve cifry boli 0, tak je celé číslo 0 a nie je sedemciferné. Ak by bol súčet posledných dvoch cifier aspoň 2, tak A by malo hodnotu aspoň 10, čo už nie je cifra (E bude aspoň 2, D aspoň 2, C aspoň 4, B aspoň 6, A aspoň 10). To znamená, že súčet posledných dvoch cifier musí byť 1. Potom vyhovujú len dve možnosti: 8 532 110 a 5 321 101, ktoré sú aj riešením našej úlohy.

5. Súčet cifier trojciferného prirodzeného čísla x označíme y. Určte hodnotu x, ak viete, že $x + y$ a $x - y$ sú také prirodzené čísla, ktorých všetky cifry sú rovnaké.

Riešenie: Keďže x je trojciferné prirodzené číslo, tak hodnota $x + y$ je maximálne $999 + 27 = 1\,026$, takže nepôjde o štvorciferné číslo s rovnakými ciframi (najmenšie je 1 111). Ak má trojciferné číslo všetky cifry rovnaké, tak je deliteľné 111. Ak by boli $x + y$ a $x - y$ obe trojciferné čísla deliteľné 111, tak potom ich rozdiel bude deliteľný 111. Tento rozdiel je však $2y$. Keďže y je ciferný súčet trojciferného čísla, má hodnotu aspoň 1 a maximálne 27. To znamená, že $2y$ má hodnotu aspoň 2 a maximálne 54. V tomto intervale však nie je žiadna hodnota deliteľná 111. Preto je $x + y$ trojciferné číslo a $x - y$ dvojciferné číslo. Keďže $x - y$ je dvojciferné číslo a y má hodnotu maximálne 27, bude mať x hodnotu maximálne 126 (99 + 27). Preto je prvá cifra čísla x jednotka a druhá maximálne 2. Hodnota $x + y$ potom môže byť jedine 111. Ciferný súčet čísla x je maximálne 12 (1 + 2 + 9). Preto $x - y$ má hodnotu 99 (hodnota 88 môže vzniknúť jedine ako 100 – 12, avšak číslo 100 má ciferný súčet 1, takže hodnotu 88 nemôžeme dosiahnuť). Vyriešením tejto sústavy dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi dostaneme jediné riešenie: $x = 105$, , $y = 6$ (potom $x + y = 111$ a $x - y = 99$).

6. Vlak prešiel vzdialenosť z mesta A do mesta B priemernou rýchlosťou 56 km/h. Po 90 minútach cesty touto rýchlosťou zo stanice A vlak pol hodiny stál. Aby sa podľa stanoveného času dostal do stanice B, musel prejsť zvyšnú vzdialenosť priemernou rýchlosťou 63 km/h. Vypočítajte vzdialenosť miest A a B.

Riešenie: Vlak prešiel za 1,5 hodiny vzdialenosť 84 km. Vzdialenosť od miesta zastavenia vlaku do miesta B označme s, čas, za ktorý doň dorazí, t. Potom dostávame, že platí

$$s = 63t,$$
$$84 + s = 56 \cdot (2 + t).$$

Vyriešením tejto sústavy dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi dostávame, že $t = 4$ hod a $s = 252$ km, teda vzdialenosť miest A a B je 84 km + 252 km = 336 km.

7. Nájdite všetky riešenia nasledujúcej rovnice:

$$\frac{x+11}{2013} + \frac{x+9}{2015} + \frac{x+7}{2017} = \frac{x+2017}{7} + \frac{x+2015}{9} + \frac{x+2013}{11}$$

Riešenie: Pripočítaním 1 ku každému zlomku a úprave dostaneme ekvivalentnú rovnicu

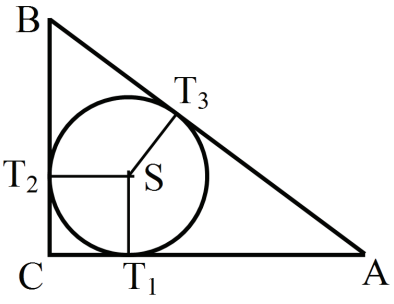
$$\frac{x+11+2013}{2013} + \frac{x+9+2015}{2015} + \frac{x+7+2017}{2017} = \frac{x+2017+7}{7} + \frac{x+2015+9}{9} + \frac{x+2013+11}{11},$$

ktorú upravíme na tvar

$$(x+2024)\left(\frac{1}{2013} + \frac{1}{2015} + \frac{1}{2017} - \frac{1}{7} - \frac{1}{9} - \frac{1}{11}\right) = 0.$$

Keďže $\frac{1}{2013} + \frac{1}{2015} + \frac{1}{2017} - \frac{1}{7} - \frac{1}{9} - \frac{1}{11} < 0$, musí platiť $x + 2\,024 = 0$, a teda jediným riešením tejto rovnice je $x = -2\,024$.

8. Dĺžka odvesny pravouhlého trojuholníka je 3 cm, polomer vpísanej kružnice je 1 cm. Vypočítajte jeho obsah.



Riešenie: Označme trojuholník ABC tak, aby vrchol C bol pri pravom uhle a dĺžka strany BC bola 3 cm. Označme body dotyku vpísanej kružnice s obvodom trojuholníka ako T_1, T_2, T_3 ako na obrázku. Potom CT_1ST_2 je štvorec (keďže má tri pravé uhly, aj štvrtý uhol musí byť pravý). Keďže polomer vpísanej kružnice je 1 cm, platí $|CT_1| = |CT_2| = 1$ cm. Keďže BT_2 a BT_3 sú spoločné dotyčnice k tejto vpísanej kružnici, platí $|BT_3| = |BT_2| = 3 \text{ cm} - 1 \text{ cm} = 2$ cm. Analogicky dostaneme, že platí aj

$|AT_1| = |AT_3| = x$ cm. Potom si môžeme vyjadriť dĺžky odvesien pomocou x: $|AC| = (1+x)$ cm, $|AB| = (2+x)$ cm.

V trojuholníku ABC platí Pytagorova veta: $|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$. Dosadením vyššie uvedených vyjadrení dostaneme, že platí

$$(1+x)^2 + 3^2 = (2+x)^2.$$

Vyriešením tejto rovnice dostaneme, že $x = 3$ cm, a teda obsah trojuholníka ABC je $\frac{3\text{ cm} \cdot 4\text{ cm}}{2} = 6\text{ cm}^2$.

9. Daná je množina A všetkých prirodzených čísel, ktoré dávajú po delení číslom 18 zvyšok 2, a množina B všetkých prirodzených čísel, ktoré dávajú po delení číslom 19 zvyšok 1. Určte počet všetkých prirodzených čísel, ktoré patria do prieniku týchto dvoch množím a sú menšie ako 100 000.

Riešenie: Prvky množiny A môžeme zapísať v tvare $18a + 2$, kde a je nezáporné celé číslo, prvky množiny B môžeme zapísať v tvare $19b + 1$, kde b je nezáporné celé číslo. Ak patrí nejaké číslo do prieniku množín A a B, musia existovať také nezáporné celé čísla a a b, že platí $18a + 2 = 19b + 1$. Úpravou tejto rovnice a pripočítaním a k obom jej stranám dostávame, že platí $19a - 19b = a - 1$. To znamená, že číslo $a - 1$ je deliteľné 19, teda existuje také nezáporné celé číslo k, že platí $a - 1 = 19k$. Potom hľadané prvky prieniku množín A a B majú tvar $18 \cdot (19k + 1) + 2 = 342k + 20$. Keďže tieto čísla dávajú po delení 19 zvyšok 1, ide o nutnú a aj postačujúcu podmienku. Najmenšie číslo tohto tvaru je 20 ($k = 0$), najväčšie číslo tohto tvaru je 99 884 ($k = 292$). Celkový počet týchto čísel je preto 293.

10. Nech x a y sú reálne čísla väčšie ako 1. Nech a označuje logaritmus x pri základe y a b označuje logaritmus y pri základe x. Nájdite minimálnu hodnotu súčtu $a + b$.

Riešenie: Zo zadania máme, že $a = \log_y x = \frac{\log x}{\log y}$ a $b = \log_x y = \frac{\log y}{\log x}$. Keďže x a y sú reálne čísla väčšie ako 1, čísla a a b sú kladné. Potom pre ne platí nerovnosť medzi aritmetickým a geometrickým priemerom: $a + b \geq 2 \cdot \sqrt{ab}$. Po dosadení vyjadrení a a b pomocou x a y dostaneme, že platí

$$\frac{\log x}{\log y}+\frac{\log y}{\log x}\geq 2\cdot\sqrt{\frac{\log x}{\log y}\cdot\frac{\log y}{\log x}}=2,$$

teda minimálna hodnota súčtu $a + b$ je 2. To, že túto hodnotu vieme dosiahnuť, si overíme napríklad pre $x = y = 10$. Potom $a = b = 1$ a $a + b = 2$.

11. Fibonacciho postupnosť $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ je definovaná tak, že pre jej členy platí $F_0 = F_1 = 1$ a $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ pre všetky prirodzené čísla n. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo k existuje člen tento postupnosti, ktorý končí aspoň k nulami.

Riešenie: Nech je k pevné. Označme $a_n = F_n \pmod{10^k}$. Pre túto postupnosť taktiež platí $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. Uvažujme dvojice $(a_n; a_{n-1})$. Každá takáto dvojica jednoznačne definuje postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Keďže existuje len konečne veľa možností (10^{2k}) pre hodnoty dvojíc $(a_n; a_{n-1})$, postupnosť dvojíc $\{(a_n; a_{n-1})\}_{n=1}^{\infty}$ musí byť periodická. Keďže $(a_1; a_0) = (1; 1)$, existuje nekonečne veľa prirodzených čísel n, pre ktoré platí $(a_n; a_{n-1}) = (1; 1)$. Potom ale $a_{n-2} = 0$, takže existuje nekonečne veľa takých prirodzených čísel n, pre ktoré platí $0 = a_{n-2} = F_{n-2} \pmod{10^k}$. Keďže Fibonacciho postupnosť obsahuje len kladné čísla, našli sme nekonečne veľa jej členov s požadovanou vlastnosťou.

12. Nech a, b, c sú kladné reálne čísla, ktorých súčin nie je väčší ako ich súčet. Dokážte, že potom platí nerovnosť $a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{3}abc$.

Riešenie: Vieme, že pre čísla a, b, c platí $a + b + c \geq abc$ a zároveň, že platí

$$(a+b+c)^2 - 3(a^2+b^2+c^2) = -(a-b)^2 - (b-c)^2 - (c-a)^2 \leq 0.$$

Potom platí

$$3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2 \geq (abc)^2.$$

Ak by platilo $a^2 + b^2 + c^2 < \sqrt{3}abc$, potom by platilo aj $3\sqrt{3}abc > (abc)^2$, teda $3\sqrt{3} > abc$. Na základe nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom vieme, že platí $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2}$.

Potom platí aj $\sqrt{3}abc > a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2}$, teda $abc > 3\sqrt{3}$, čo je spor s tým, že má platiť $3\sqrt{3} > abc$. Preto bol náš predpoklad nesprávny a musí platiť $a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{3}abc$.

13. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je definovaná predpisom $a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1}$, pričom $a_1 = 20$, $a_2 = 30$. Nájdite všetky prirodzené čísla *n*, pre ktoré je $5a_{n+1}a_n + 1$ druhou mocninou celého čísla.

Riešenie: Matematickou indukciou dokážeme, že pre všetky prirodzené čísla *n* platí $5a_{n+1}a_n + 1 = (a_n + a_{n+1})^2 + 501$. Pre *n* = 1 tvrdenie platí:

$$5a_2a_1 + 1 = 5 \cdot 30 \cdot 20 + 1 = 3\,001 = 2\,500 + 501 = 50^2 + 501 = (a_1 + a_2)^2 + 501.$$

Predpokladajme, že tvrdenie platí pre nejaké *n* – 1. Vieme, že platí $a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1}$. Potom platí aj $5a_n = 2a_n + a_{n+1} + a_{n-1}$. Vynásobením oboch strán rovnosti výrazom $a_{n+1} - a_{n-1}$ dostávame, že platí

$$5a_n \cdot (a_{n+1} - a_{n-1}) = (2a_n + a_{n+1} + a_{n-1}) \cdot (a_{n+1} - a_{n-1}) = 2a_na_{n+1} - 2a_na_{n-1} + a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2.$$

Na základe indukčného predpokladu predpokladáme, že platí $5a_na_{n-1} + 1 = (a_n + a_{n-1})^2 + 501$. Pripočítaním tohto výrazu k obom stranám vyššie uvedenej rovnice dostávame, že platí

$$5a_n \cdot (a_{n+1} - a_{n-1}) + 5a_na_{n-1} + 1 = 2a_na_{n+1} - 2a_na_{n-1} + a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2 + a_n^2 + 2a_na_{n-1} + a_{n-1}^2 + 501,$$

$$5a_na_{n+1} + 1 = a_{n+1}^2 + 2a_na_{n+1} + a_n^2 + 501 = (a_n + a_{n+1})^2 + 501,$$

a teda sme tvrdenie dokázali matematickou indukciou.

Vieme, že rozdiel druhých mocnín dvoch za sebou idúcich prirodzených čísel sa rovná ich súčtu. Preto $m^2 + 501$ nemôže byť druhou mocninou prirodzeného čísla pre $m > 250$. Matematickou indukciou ľahko nahliadneme, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a že $a_3 = 70, a_4 = 180, a_5 = 470$, takže nám stačí preskúmať len hodnoty menšie ako 4. Pre *n* = 1 dostávame, že platí $5a_2a_1 + 1 = 3\,001$, čo nie je druhou mocninou celého čísla. Pre *n* = 2 dostávame, že platí $5a_3a_2 + 1 = 10\,501$, čo nie je druhou mocninou celého čísla. Pre *n* = 3 dostávame, že platí $5a_4a_3 + 1 = 63\,001 = 251^2$, čo je druhou mocninou celého čísla, a teda jediným riešením úlohy.

14. Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla n platí nasledujúca nerovnosť:

$$\left(2n^2+3n+1\right)^n \geq 6^n \cdot \left(n!\right)^2$$

Riešenie: Vieme, že platí $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)$. Predelením oboch strán rovnosti kladným číslom n a použitím nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom dostávame, že platí:

$$\frac{2n^2+3n+1}{6}=\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n}\geq \sqrt[n]{1^2\cdot 2^2\cdot\ldots\cdot n^2}=\sqrt[n]{\left(n!\right)^2}.$$

Umocnením na n-tú dostávame požadované tvrdenie.

Zadania 3. série úloh korešpondenčnej súťaže

1. Miloša sa pýtali, koľko žiakov je v ich triede. Odpovedal: „Ak zväčšíme počet žiakov našej triedy o 100 % a potom pridáme ešte polovicu počtu žiakov triedy, dostaneme 100.“ Koľko žiakov je v Milošovej triede?

2. Naše digitálne hodinky ukazujú hodiny a minúty (sekundy neukazujú). Koľko času ubehne od polnoci, kým ukážu 23-krát číslicu 2? (Ukázať číslicu znamená, že v danej minúte je zobrazená na hodinkách na jednej zo štyroch pozícií, teda napríklad od 19:59 po 20:10 (vrátane) je dvojka zobrazená 12-krát.)

3. Bazén na kúpalisku je dlhý 50 m a široký 12,5 m. Na pláne mesta je znázornený ako obdĺžnik s obsahom 1 cm^2. Určte, v akej mierke je plán mesta.

4. Aby sme si mohli pripraviť pukance, je potrebné na jar zasiať na polia semená kukurice pukancovej. Jeden kilogram kukuričných zŕn ich obsahuje približne 6 500 kusov. Hustota porastu kukurice je 80 000 rastlín na jeden hektár poľa. Pri siatí treba brať do úvahy aj to, že nie všetky zasadené zrná vyklíčia, takže dobrý poľnohospodár vyseje približne o 15 % zŕn viac oproti očakávanému počtu rastlín. Na siatie kukurice má k dispozícii sejačku, ktorá naraz seje v pásoch širokých 5 metrov. Keďže sa pohybuje po poli, jej priemerná rýchlosť je 4 km/h. Čas potrebný na otáčanie sejačky na konci poľa je už zahrnutý v jej priemernej rýchlosti. Koľko kukurice pukancovej má dobrý poľnohospodár kúpiť, ak chce