Korešpondenčná súťaž v školskom roku 2018/2019

Riešenia 2. série úloh korešpondenčnej súťaže

1. V autobuse je 8 ľudí – 7 dievčat a vodič. Každé dievča má práve jednu tašku. V každej taške je 7 veľkých mačiek, každá veľká mačka má 7 mačiatok. Všetky mačky majú po 4 nohy, všetci ľudia v autobuse po 2 nohy. Iní ľudia ani zvieratá sa v autobuse nenachádzajú. Koľko nôh je v autobuse?

Riešenie: Vodič má 2 nohy. Dievčatá majú $7 \cdot 2 = 14$ nôh. Mačky majú $7 \cdot 7 \cdot 4 = 196$ nôh. Mačiatka majú $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 4 = 1372$ nôh. Spolu to je 1 584 nôh.

2. Nájdite všetky reálne čísla x, pre ktoré platí: $\frac{1}{3x-6} = \frac{1}{2-x}$

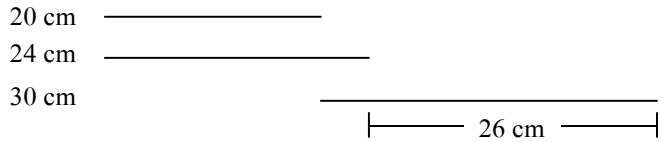
Riešenie: Túto rovnicu môžeme zapísať aj v tvare $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2-x} = \frac{1}{2-x}$. Keďže zlomok s čitateľom 1 je nenulový, tak vydelením $\frac{1}{2-x}$ dostaneme, že má platiť $\frac{1}{3} = 1$, čo nie je možné. Rovnica preto nemá riešenie, teda neexistuje žiadne reálne číslo x, pre ktoré by platilo $\frac{1}{3x-6} = \frac{1}{2-x}$.

3. Na stôl sme položili vedľa seba tri poháriky tak, že prostredný je položený hore dnom, zvyšné dva sú položené normálne – dole dnom. Vašou úlohou je zdvihnúť vždy dva poháriky naraz, každý z nich otočiť naopak ako bol, a potom ich znova položiť na stôl tak, aby boli po práve štyroch zdvihnutiach a otočeniach všetky poháriky hore dnom. Ako to urobíte?

Riešenie: Krajné poháriky si označme ľavý a pravý podľa toho, kde sa nachádzajú vzhľadom na stredný pohárik. V prvom zdvihnutí otočíme ľavý a pravý, v druhom ľavý a stredný, v treťom stredný a pravý a vo štvrtom ľavý a pravý. Ľavý sme otočili trikrát, preto bude hore dnom. Stredný sme otočili dvakrát, preto bude hore dnom. Pravý sme otočili trikrát, preto bude hore dnom. Všetky poháriky sú otočené hore dnom.

4. Michal má tri prútiky. Ich dĺžky sú 20 cm, 24 cm a 30 cm. Ako môže len pomocou týchto prútikov odmerať dĺžku 26 cm? (Prútiky nemôže rezať.)

Riešenie: Prútiky môžeme položiť napríklad takto (vyznačená úsečka bude mať dĺžku 20 cm + 30 cm – 24 cm = 26 cm):



Iné riešenie využíva napríklad to, že trojuholník so stranami 10 cm, 24 cm, 26 cm je pravouhlý a úsečku dlhú 10 cm vieme zostrojiť pomocou prútikov s dĺžkou 20 cm a 30 cm.

5. O 18:00 zapadlo slnko a Peter si vo svojej pracovni zapálil dve sviečky. Biela sviečka je vysoká 30 cm a celá zhorí za 150 minút. Modrá sviečka je vysoká 48 cm a celá zhorí za 120 minút. O koľkej budú obe sviečky rovnako vysoké?

Riešenie: Biela sviečka horí rýchlosťou 1 cm za 150 : 30 = 5 minút a modrá sviečka horí rýchlosťou 1 cm za 120 : 48 = 2,5 minúty. To znamená, že za 5 minút zhoria 2 cm modrej sviečky, a teda za 5 minút sa modrá sviečka skráti oproti bielej o 1 cm. Keďže na začiatku bol rozdiel vo veľkosti sviečok 18 cm, rovnakú výšku dosiahnu o $18 \cdot 5 = 90$ minút, teda o 19:30. Druhý okamih rovnakej veľkosti sviečok bude, keď zhoria obe, teda o 150 minút (o 20:30).

6. Petrova kocka s hranou dlhou 10 cm sa rozpadla na niekoľko kociek s hranami 2 cm a 3 cm. Na aký počet kociek sa mohla Petrova kocka rozpadnúť?

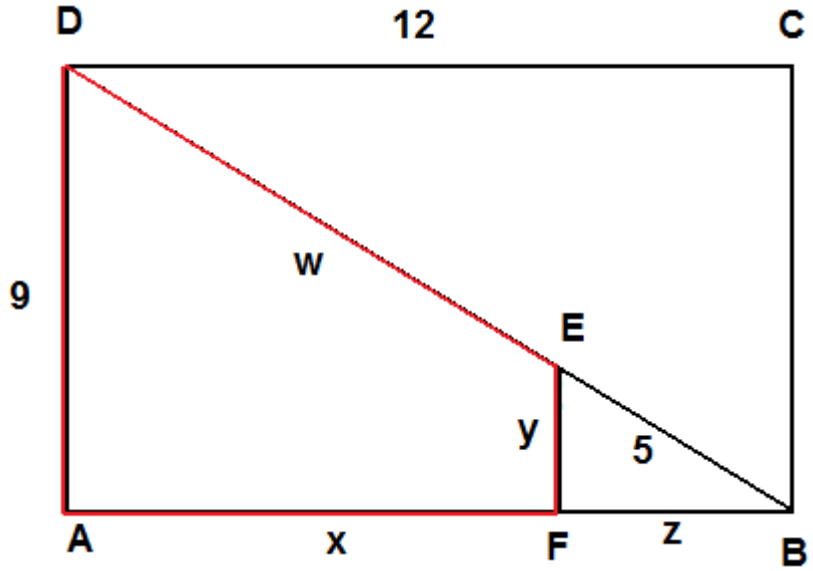
Riešenie: Keďže kocka sa úplne rozpadla, tak každú jej hranu dlhú 10 cm musíme rozdeliť na niekoľko úsekov dlhých 2 cm a 3 cm. Prvou možnosťou je rozdeliť hranu na 5 úsekov po 2 cm. Ak to urobíme na každej hrane, týmto rozdelením dostaneme $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ kociek s rozmermi 2 cm x 2 cm x 2 cm. Druhou možnosťou je rozdeliť 10 cm na 2 úseky dlhé 3 cm a 2 úseky dlhé 2 cm. Skombinovaním týchto dvoch možných rozdelení dostaneme 8 kociek s hranou dĺžky 3 cm (budú spolu vytvárať kocku s hranou dĺžky 6 cm) a $(1\,000 - 8 \text{ x } 27) : 8 = 98$ kociek s hranou dĺžky 2 cm (vyplnia zvyšok veľkej kocky). Spolu dostávame 106 malých kociek.

7. Športového turnaja sa zúčastnilo 6 družstiev, pričom každá dvojica družstiev zohrala štyri vzájomné zápasy. Žiaden zo zápasov neskončil remízou. Na konci turnaja sa zverejnilo, koľko percent svojich zápasov vyhrali jednotlivé družstvá. Bolo to 20 %, 30 %, 35 %, 60 % a 80 %. Chýbal len údaj o družstve, ktoré získalo druhé miesto. Koľko percent svojich zápasov vyhralo toto družstvo?

Riešenie: Ak niektoré družstvo vyhrá, tak druhé prehrá. Preto súčet všetkých percentuálnych bodov výhier všetkých družstiev sa bude rovnať 6-násobku 50 percentuálnych bodov, teda 300 %. Ak od tohto čísla odčítame známe zisky piatich družstiev, dostaneme 75 %, teda družstvo na druhom mieste malo úspešnosť 75 %.

8. V obdĺžniku $ABCD$ platí $|AB| = 12\ \text{cm}$, $|BC| = 9\ \text{cm}$. Na uhlopriečke BD je vyznačený bod E tak, že $|BE| = 5\ \text{cm}$. Na strane AB je vyznačený bod F tak, že EF je rovnobežné s AD. Vypočítajte obvod štvoruholníka $AFED$ v centimetroch.

Riešenie: Dĺžku uhlopriečky BD obdĺžnika $ABCD$ vypočítame z pravouhlého trojuholníka ABD pomocou Pytagorovej vety:



$$|BD|^2 = |AD|^2 + |AB|^2,$$
$$|BD|^2 = (9\ \text{cm})^2 + (12\ \text{cm})^2,$$
$$|BD|^2 = 225\ \text{cm}^2,$$
$$|BD| = 15\ \text{cm}.$$

Potom platí $|DE| = 15\ \text{cm} - 5\ \text{cm} = 10\ \text{cm}$.

Na základe podobnosti trojuholníkov vypočítame dĺžky strán štvoruholníka *AFED*. Trojuholníky *ABD* a *FBE* sú podobné na základe vety *uu* (majú jeden spoločný uhol a jeden pravý uhol), preto platí:

$$\frac{|AD|}{|EF|} = \frac{|BD|}{|BE|}, \qquad \frac{|AB|}{|BF|} = \frac{|BD|}{|BE|},$$

$$|EF| = \frac{|AD|}{|BD|} \cdot |BE|, \qquad |BF| = \frac{|AB|}{|BD|} \cdot |BE|,$$

$$|EF| = \frac{9\ \text{cm}}{15\ \text{cm}} \cdot 5\ \text{cm} = 3\ \text{cm}, \qquad |EF| = \frac{12\ \text{cm}}{15\ \text{cm}} \cdot 5\ \text{cm} = 4\ \text{cm}.$$

Potom platí $|AF| = |AB| - |BF| = 12\ \text{cm} - 4\ \text{cm} = 8\ \text{cm}.$

Potom pre obvod štvoruholníka *AFED* dostávame, že platí

$$O = |AF| + |FE| + |ED| + |DA| = 8\ \text{cm} + 3\ \text{cm} + 10\ \text{cm} + 9\ \text{cm} = 30\ \text{cm}.$$

Obvod štvoruholníka *AFED* je 30 cm.

9. Vo futbalovej jedenástke mužstva je priemerný vek hráčov 23 rokov. Tréner dvoch najstarších 26-ročných hráčov vymenil za dvoch mladších, čím priemerný vek mužstva klesol na 22 rokov. Obaja noví hráči sa narodili v ten istý deň, rok po sebe. Koľko rokov majú noví hráči?

Riešenie: Súčet vekov hráčov v pôvodnej zostave bol $23 \cdot 11 = 253$. V novej zostave je súčet vekov hráčov $22 \cdot 11 = 242$. To znamená, že súčet vekov klesol o 11. Keďže rozdiel vekov nových hráčov je 1, musel nastať pokles o 5, resp. 6 rokov oproti veku 26, teda noví hráči majú 21, resp. 20 rokov.

10. Vo vreci je 100 kartičiek, na ktorých sú napísané všetky prirodzené čísla od 1 do 100 (na každej kartičke je práve jedno číslo). Aký najmenší počet kartičiek musíme vytiahnuť, ak ťaháme so zatvorenými očami a chceme mať istotu, že medzi nimi budú tri kartičky také, že súčet čísel na nich napísaný je deliteľný troma?

Riešenie: Ak vytiahneme napríklad čísla 1, 3, 4, 6, tak možné súčty trojíc kartičiek vytvorených z týchto čísel, sú 13, 11, 10, 8, pričom ani jedno z týchto čísel nie je deliteľné troma. Preto maximálne 4 kartičky nestačia. Ukážeme, že 5 kartičiek stačí.

Predpokladajme, že by 5 kartičiek nestačilo, teda by existovalo 5 takých čísel, že súčet ľubovoľných troch z nich by nebol deliteľný tromi.

Ak by z týchto 5 čísel aspoň tri mali rovnaký zvyšok po delení tromi, tak ich súčet bude deliteľný tromi, čo nemôže nastať. Preto rovnaký zvyšok po delení tromi dávajú maximálne dve čísla. To ale znamená, že existuje aspoň jedno číslo, ktoré dáva zvyšok 0 po delení tromi, aspoň jedno číslo, ktoré dáva zvyšok 1 po delení tromi, a aspoň jedno číslo, ktoré dáva zvyšok 2 po delení tromi (ak by to tak nebolo, tak by čísla mohli byť maximálne štyri). Súčet týchto troch čísel je však deliteľný tromi, čo je spor s predpokladom. Preto neexistuje 5 takých čísel, že súčet ľubovoľných troch z nich nie deliteľný tromi, a teda nám stačí vybrať 5 kartičiek.

11. Pri golfe boli jamky od seba vzdialené 150, 300, 250, 325, 275, 350, 225, 400 a 425 metrov. Robot Golfík sa dá nastaviť tak, aby odpaľoval loptičky na dve rôzne vzdialenosti. (Napr. keď ho nastavíme na odpaľovanie na vzdialenosti 4 a 10 metrov, poradí si hravo s jamkou vzdialenou 18 metrov – zvládne to na tri údery: 10, 4, 4; pri jamke vzdialenej 48 metrov potrebuje pri tomto nastavení aspoň 6 úderov: 10, 10, 10, 10, 4, 4.) Navrhnite, na aké vzdialenosti treba nastaviť Golfíka, aby mu na prejdenie cez všetkých deväť jamiek stačilo menej ako 35 úderov.

Riešenie: Všetky vzdialenosti sú násobkami 25, preto nie je výhodné použiť vzdialenosť, ktorá nie je deliteľná týmto číslom. Teraz postupne vyskúšame kombinácie dvoch vzdialeností, ktoré sú násobkami 25 metrov. Nastavením prvej vzdialenosti na 100 metrov a druhej vzdialenosť na 75 metrov dostaneme, že 150 metrov vieme dosiahnuť na 2 údery (75 + 75), 300 metrov vieme dosiahnuť na 3 údery (100 + 100 + 100), 250 metrov na 3 údery (100 + 75 + 75), 325 metrov na 4 údery (100 + 75 + 75 + 75), 275 metrov na 3 údery (100 + 100 + 75), 350 metrov na 4 údery (100 + 100 + 75 + 75), 225 metrov na 3 údery (75 + 75 + 75), 400 metrov na 4 údery (100 + 100 + 100 + 100) a 425 metrov na 5 úderov (100 + 100 + 75 + 75 + + 75). Spolu je to 31 úderov, čo vyhovuje podmienkam zo zadania. Golfíka môžeme nastaviť na vzdialenosti 75 metrov a 100 metrov.

12. Nech pre členy nekonečnej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = -1$ a pre $n > 3$ definujme $a_n = a_{n-1}a_{n-3}$. Nájdite hodnotu $a_{2\,019}$.

Riešenie: Vypočítaním prvých 10 členov tejto postupnosti dostaneme, že sú to čísla 1, 1, –1, –1, –1, 1, –1, 1, 1, –1. Posledné tri členy sú rovnaké ako prvé tri členy tejto postupnosti. Keďže *n*-tý člen pre $n > 3$ závisí len od troch predchádzajúcich členov, hodnoty členov postupnosti sa budú od 8. člena opakovať s periódou 7. Keďže platí $2\,019 = 288 \cdot 7 + 3,$ hodnota 2019. člena tejto postupnosti bude rovnaká ako hodnota 3. člena, teda $a_{2\,019} = -1.$

13. Predpokladajme, že $x_1, x_2, \ldots, x_{2\,018}$ sú kladné reálne čísla, pre ktoré platí

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{2x_2} + \ldots + \sqrt{2\,018x_{2\,018}} = 1.$$

Nájdite najmenšiu možnú hodnotu súčtu $x_1 + x_2 + \ldots + x_{2\,018}.$

Riešenie: Na základe Caychyho-Schwarzovej-Buňakovského nerovnosti pre kladné reálne čísla $1, 2, 3, \ldots, 2\,018$ a $x_1, x_2, \ldots, x_{2\,018}$ dostaneme, že platí

$$1 = \left(\sum_{i=1}^{2018} \sqrt{ix_i} \right)^2 \le \sum_{i=1}^{2018} i \cdot \sum_{i=1}^{2018} x_i .$$

Z tejto nerovnosti dostávame, že platí

$$\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{2018} i} \le \sum_{i=1}^{2018} x_i,$$

teda

$$\frac{1}{2\,037\,171} \le \sum_{i=1}^{2018} x_i,$$

pretože platí

$$\sum_{i=1}^{2018} i = \frac{2\,018 \cdot 2\,019}{2} = 2\,037\,171.$$

Rovnosť nastáva pre $x_i = c \cdot i,$ kde $c = \frac{1}{2\,037\,171^2}.$

Najmenšia možná hodnotu súčtu $x_1 + x_2 + \ldots + x_{2\,018}$ je preto $\frac{1}{2\,037\,171}.$

14. Zistite, či nasledujúci nekonečný rad konverguje, a ak áno, nájdite jeho súčet:

$$\frac{1}{2^1 + 1} + \frac{2}{2^2 + 1} + \frac{4}{2^4 + 1} + \frac{8}{2^8 + 1} + \cdots$$

Riešenie: Označme $a_k = \frac{2^k}{2^{2^k}+1}, b_k = \frac{2^k}{2^{2^k}-1}$. Vzhľadom na to, že platí $\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}$, platí aj $a_k = b_k - b_{k+1}$. Ak označíme postupnosť čiastočných súčtov uvedeného nekonečného radu $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, potom platí

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} \left(b_k - b_{k+1}\right) = b_0 - b_n = 1 - \frac{2^n}{2^{2^n}-1}.$$

Ľahko nahliadneme, že táto postupnosť má pre *n* idúce do nekonečna limitu 1, teda uvedený nekonečný rad konverguje a jeho súčet má hodnotu 1.

Výsledková listina po 2. sérii úloh korešpondenčnej súťaže

Kategória C

Por.	Priezvisko a meno	Škola	PS	3	4	5	6	Spolu
1	Novotný Peter	SOŠ Bratislava	10	5	5	5	0	25
2	Horváth Ján	G Bratislava	5	5	5	5	0	20
3	Roth Roman	SOŠP Svit	18	0	0	0	0	18
4	Kaľavská Lenka	SOŠP Svit	12	0	0	0	0	12
4	Maniaková Andrea	SOŠP Svit	12	0	0	0	0	12
4	Šoltysová Viktória	SOŠP Svit	12	0	0	0	0	12
7	Vernarecová Alexandra	SOŠP Svit	6	0	0	0	0	6
8	Kolář Martin	SOŠP Svit	1	0	0	0	0	1

Kategória B

Por.	Priezvisko a meno	Škola	PS	5	6	7	8	Spolu
1	Pokorný Matej	G Žilina	14	5	3	4	4	30
2	Skokan Dominik	SOŠP Svit	12	5	1	3	5	26
3	Kováč Michal	G Bratislava	11	5	0	0	0	16
4	Colotka Richard	SOŠP Svit	1	0	0	0	0	1

Kategória A

Por.	Priezvisko a meno	Škola	PS	7	8	9	10	Spolu
1	Novotný Ján	G Prešov	13	1	5	1	1	21
2	Závodský Branislav	G Košice	11	1	4	3	0	19

Zadania 3. série úloh korešpondenčnej súťaže

1. Sklenená tabuľa tvaru obdĺžnika s rozmermi 4 dm a 5 dm má hmotnosť 1 kg. Akú hmotnosť má 6 tabúľ skla rovnakej hrúbky, ak majú tvar obdĺžnika so stranami dlhými 0,2 m a 37,5 cm?

2. O koľko percent je číslo 0,75 väčšie ako päť sedmín?

3. V sklade je v dvoch rovnakých sudoch rovnaká látka. Jeden sud je úplne plný, druhý je naplnený presne do polovice. Hmotnosti týchto sudov sú 86 kg a 53 kg. Akú hmotnosť má prázdny sud?

4. V detskom tábore boli deti ubytované v stanoch. Keby boli v každom stane práve štyri deti, zostali by dve bez ubytovania. Keby bolo v každom stane po päť detí, mohlo by sa ubytovať ešte desať detí. Koľko detí bolo v tábore?

5. Zistite veľkosť vnútorných uhlov ostrouhlého trojuholníka ABC, ak viete, že výška na stranu c zviera so stranou a uhol 40° a so stranou b uhol 30°.

6. Istý matematik v 19. storočí vyhlásil, že daný rok je druhou mocninou jeho veku. V ktorom roku sa tento matematik narodil a koľko mal rokov v tomto roku?

7. V lese sa nachádzajú rovnaké eukalyptové stromy, ktoré boli v teritóriu jednej rodinky koál (matka, otec, dieťa). Matka koala dokáže zjesť listy z jedného stromu za 3 dni, otcovi trvá zjedenie listov z jedného stromu 2 dni a dieťa zje listy z jedného stromu za 6 dní. Listy z koľkých stromov dokáže zjesť celá rodinka dohromady za 2 dni?

8. Ženy tvoria 40 % obyvateľov ostrova, vlastnia však spolu 60 % pozemkov na ostrove. Zvyšných 60 % obyvateľov ostrova sú muži, ktorí vlastnia spolu 40 % pozemkov. Ak muž vlastní priemerne 10 árov pozemkov, akú plochu majú pozemky, ktoré vlastní priemerne jedna žena?

9. Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel, pre ktoré platí $|x-2|+|y-3|=3-y$.

10. Do kružnice je vpísaný štvoruholník, ktorého dve strany majú dĺžku 12 cm a dve 5 cm, a ktorého uhlopriečky majú rôzne dĺžky. Vypočítajte ich dĺžky.

11. Nájdite najväčšie reálne číslo d také, že pri rozdelení jednotkového štvorca na dve disjunktné množiny aspoň jedna z nich obsahuje aspoň dva body, ktorých vzdialenosť je aspoň d.

12. Dokážte, že v trojuholníku ABC pri štandardnom označení platí

$$t_a + t_b + t_c > \frac{1}{2}(a + b + c).$$

13. Určte, koľkými spôsobmi vieme zapísať dané prirodzené číslo ako súčet nepárnych prirodzených čísel (aspoň jedného), pričom berieme ohľad na ich poradie. Napríklad 5 vieme zapísať piatimi spôsobmi, pretože platí 5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = = 1 + 1 + 3 = 1 + 3 + 1 = 3 + 1 + 1 = 5.

14. Dokážte, že najväčší spoločný deliteľ všetkých možných rozdielov štvrtých mocnín dvojíc aspoň dvojciferných prvočísel je 240.

Termín odoslania riešení úloh 3. série: do 10. 6. 2019