Ročník: 24
Číslo: 4
Šk. rok: 2018/2019

Matematický časopis pre žiakov základných a stredných škôl



Treba viesť žiakov tak, aby sa riadili heslom: Mnoho toho neviem, ale to, čo viem, viem dobre.

Eduard Čech

Redakčná pošta

Milí čitatelia,

s koncom školského roka je tu aj štvrté číslo nášho časopisu v tomto školskom roku.

Z histórie matematiky sme sa zamerali na významnú osobnosť československej matematiky – Eduarda Čecha.

V článku S miernou dávkou logiky si môžete precvičiť svoje schopnosti pri riešení piatich zaujímavých matematických úloh.

Prinášame vám aj riešenia tretej série úloh korešpondenčnej súťaže a aj výsledkovú listinu po tretej sérii úloh. Víťazom jednotlivých kategórií blahoželáme a zasielame vecné ceny.

S prianím dobre prežitého leta sa na stretnutie s vami v septembri pri jubilejnom 25. ročníku časopisu teší

Martin Hriňák

Eduard Čech



Eduard Čech (29. 6. 1893 – 15. 3. 1960) bol výnimočne nadaný a široko rozhľadený matematik, akademický učiteľ so skutočnou ľudskou i matematickou osobnosťou. Narodil sa v Stračove, v severovýchodných Čechách. Jeho mimoriadne nadanie pre matematiku sa prejavilo už na Gymnáziu v Hradci Králové, kde zmaturoval s vyznamenaním (1912). Na Filozofickej fakulte Univerzity Karlovej v Prahe začal študoval matematiku. Cez prvú svetovú vojnu musel narukovať. Pobyt v armáde využil na štúdium ruštiny, nemčiny a taliančiny. Po návrate dokončil univerzitu (1919) a získal spôsobilosť vyučovať matematiku a deskriptívnu geometriu na vyšších stredných školách. Postupne vyučoval na niekoľkých reálkach v Prahe. V období 1920/21 bol na jednoročnom študijnom pobyte v Taliansku, kde v Turíne intenzívne spolupracoval s G. Fubinim (1879 – 1943). V roku 1923 odišiel do Brna a po prof. M. Lerchovi sa stal mimoriadnym profesorom Masarykovej univerzity, riadnym vysokoškolským profesorom (1928). V Brne oživil matematický život, bol obetavým a láskavým učiteľom, vzorom nesmierne pracovitého, pre matematiku nadšeného človeka. V období 1935/36 pracoval a prednášal v Ústave pre pokročilé štúdiá v Princetone (USA). Po návrate bol na vrchole svojich tvorivých síl. Založil v Brne seminár z topológie, v ktorom za šesť rokov vytvorili 26 pôvodných vedeckých prác. Venoval sa výchove novej generácie matematikov. Podstatne prispel k vzniku Matematického ústavu ČSAV i Matematického ústavu Univerzity Karlovej v Prahe ako bádateľských centier výskumnej práce. V roku 1952 sa stal akademikom ČSAV. Vedeckú prácu začal profesor Čech štúdiom projektívnych diferenciálnych vlastností geometrických útvarov. Spolu s Fubinim publikovali práce *Projektívna diferenciálna geometria* (Bologna 1926 – 27) a *Úvod do projektívnej diferenciálnej geometrie plôch* (Paríž 1931). Čech sa preslávil prácami v topológii. Jeho meno sa stalo súčasťou viacerých pojmov z algebrickej i všeobecnej topológie. Po česky vyšli jeho *Bodové množiny* (1936) a *Topologické priestory* (1959). Celková vedecká činnosť akademika Čecha obsahuje 94 pôvodných vedeckých prác, 9 odborných kníh, 7 stredoškolských učebníc. Za výsledky matematickej činnosti dostal štátne ceny (1951 – 1954) i Rád republiky (1958). Stal sa členom Poľskej akadémie vied (1956). Vytvoril u nás

významné vedecké školy v oblasti diferenciálnej geometrie a topológie. Zanechal trvalú stopu vo svetovej i v českej matematike. Eduard Čech podstatne prispel k modernizácii vyučovania na našich stredných školách a ovplyvnil českú matematickú terminológiu. Často zdôrazňoval, že nezáleží ani tak na tom, čo sa učí, ale ako sa učí. *Nemusíte dokazovať všetko, ale nesmiete nedokazovať nič. Nesmie sa stratiť fakt, že matematika je systém*. Dobrý učiteľ učí aj podľa zlej učebnice dobre, dotvára text výkladu, premýšľa nad učivom, vie posúdiť detaily i podstatu. Eduard Čech uznával, že matematika má nezanedbateľnú vzdelávaciu hodnotu a jej vyučovanie potrebuje aj didaktické podnety. *Treba viesť žiakov tak, aby sa riadili heslom: Mnoho toho neviem, ale to, čo viem, viem dobre.*

Dušan Jedinák

Korešpondenčná súťaž v školskom roku 2018/2019

Riešenia 3. série úloh korešpondenčnej súťaže

1. Sklenená tabuľa tvaru obdĺžnika s rozmermi 4 dm a 5 dm má hmotnosť 1 kg. Akú hmotnosť má 6 tabúľ skla rovnakej hrúbky, ak majú tvar obdĺžnika so stranami dlhými 0,2 m a 37,5 cm?

Riešenie: 6 tabúľ skla rovnakej hrúbky tvaru obdĺžnika so stranami dlhými 0,2 m a 37,5 cm predstavuje plochu $6 \cdot 2\ \text{dm} \cdot 3{,}75\ \text{dm} = 45\ \text{dm}^2$. Keďže tabuľa s plochou $4\ \text{dm} \cdot 5\ \text{dm} = 20\ \text{dm}^2$ má hmotnosť 1 kg, hmotnosť 6 tabúľ skla bude $45\ \text{dm}^2 : 20\ \text{dm}^2 = 2{,}25$-krát väčšia, teda 2,25 kg.

2. O koľko percent je číslo 0,75 väčšie ako päť sedmín?

Riešenie: Hľadaný počet percent môžeme vyjadriť ako hodnotu nasledujúceho zlomku:

$$\frac{0{,}75 - \frac{5}{7}}{\frac{5}{7}} \cdot 100 = \frac{\frac{3}{4} - \frac{5}{7}}{\frac{5}{7}} \cdot 100 = \frac{\frac{21-20}{28}}{\frac{5}{7}} \cdot 100 = \frac{7}{140} \cdot 100 = 5.$$

Číslo 0,75 je o 5 % väčšie ako päť sedmín.

3. V sklade je v dvoch rovnakých sudoch rovnaká látka. Jeden sud je úplne plný, druhý je naplnený presne do polovice. Hmotnosti týchto sudov sú 86 kg a 53 kg. Akú hmotnosť má prázdny sud?

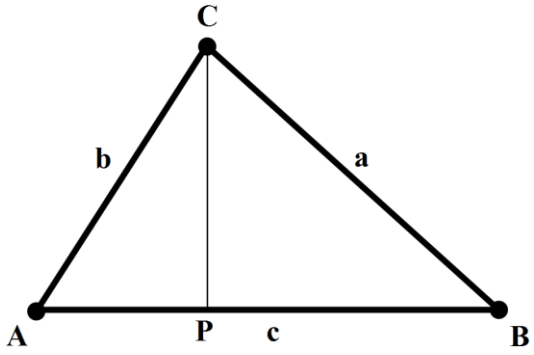
Riešenie: Odčítaním hmotnosti poloplného suda od hmotnosti plného suda dostaneme hmotnosť polovice jeho obsahu, teda hmotnosť látky v polovici suda je 86 kg – 53 kg = 33 kg. Odčítaním tejto hmotnosti od hmotnosti poloplného suda dostaneme hmotnosť prázdneho suda, teda jeho hmotnosť je 53 kg – 33 kg = 20 kg.

4. V detskom tábore boli deti ubytované v stanoch. Keby boli v každom stane práve štyri deti, zostali by dve bez ubytovania. Keby bolo v každom stane po päť detí, mohlo by sa ubytovať ešte desať detí. Koľko detí bolo v tábore?

Riešenie: Označme počet stanov x. Počet detí môžeme vyjadriť dvomi spôsobmi – ako $4x+2$ a $5x-10$. Tieto dva výrazy sa musia rovnať, a teda platí $4x+2=5x-10$. Vyriešením tejto lineárnej rovnice dostávame, že $x=12$, a teda v tábore bolo $5\cdot 12-10=50$ detí.

5. Zistite veľkosť vnútorných uhlov ostrouhlého trojuholníka *ABC*, ak viete, že výška na stranu *c* zviera so stranou *a* uhol 40° a so stranou *b* uhol 30°.

Riešenie: Označme pätu výšky na stranu *c* ako *P* (ako na obrázku).



Potom v pravouhlom trojuholníku *APC* má uhol pri vrchole *A* veľkosť 180° – 90° – 30° = 60° a uhol pri vrchole *B* veľkosť 180° – 90° – 40° = 50°. Uhol pri vrchole *C* má veľkosť 30° + 40° = 70°. Veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka *ABC* sú 50°, 60° a 70°.

6. Istý matematik v 19. storočí vyhlásil, že daný rok je druhou mocninou jeho veku. V ktorom roku sa tento matematik narodil a koľko mal rokov v tomto roku?

Riešenie: Keďže ide o 19. storočie, ide o roky 1800 až 1899. V tomto intervale sa nachádza jediná druhá mocnina prirodzeného čísla – 1849. Keďže toto číslo je druhou mocninou jeho veku, jeho vek je $\sqrt{1849} = 43$ rokov, a teda sa narodil v roku 1849 – 43 = 1806.

7. V lese sa nachádzajú rovnaké eukalyptové stromy, ktoré boli v teritóriu jednej rodinky koál (matka, otec, dieťa). Matka koala dokáže zjesť listy z jedného stromu za 3 dni, otcovi trvá zjedenie listov z jedného stromu 2 dni a dieťa zje listy z jedného stromu za 6 dní. Listy z koľkých stromov dokáže zjesť celá rodinka dohromady za 2 dni?

Riešenie: Matka koala zje za jeden deň jednu tretinu listov z jedného stromu, otec jednu polovicu a dieťa jednu šestinu. Dokopy teda za jeden deň zjedia listy z jedného stromu, pretože platí $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=1$. To znamená, že za dva dni zjedia listy z dvoch stromov.

8. Ženy tvoria 40 % obyvateľov ostrova, vlastnia však spolu 60 % pozemkov na ostrove. Zvyšných 60 % obyvateľov ostrova sú muži, ktorí vlastnia spolu 40 % pozemkov. Ak muž vlastní priemerne 10 árov pozemkov, akú plochu majú pozemky, ktoré vlastní priemerne jedna žena?

Riešenie: Ak označíme počet mužov ako m, tak počet žien na ostrove je $m \cdot \frac{0,4}{0,6} = \frac{2}{3} \cdot m.$ Plocha pozemkov mužov je $10m$ árov. Plocha pozemkov žien je potom $10m \cdot \frac{0,6}{0,4} = 15m$ árov. Potom priemerná plocha pozemkov, ktoré vlastní jedna žena, je $\frac{15m}{\frac{2}{3}m} = 22,5$ árov.

9. Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel, pre ktoré platí $|x-2|+|y-3|=3-y$.

Riešenie: Ľavá strana rovnice je vždy nezáporné číslo, preto musí platiť $3-y\geq 0$. Preto pre hodnotu y dostávame len tri možnosti: 1, 2, 3. Zároveň vieme, že pre tieto y platí aj $|y-3|=3-y$. Dosadením tejto rovnosti do rovnice dostávame, že platí $|x-2|=0$, a teda $x=2$.

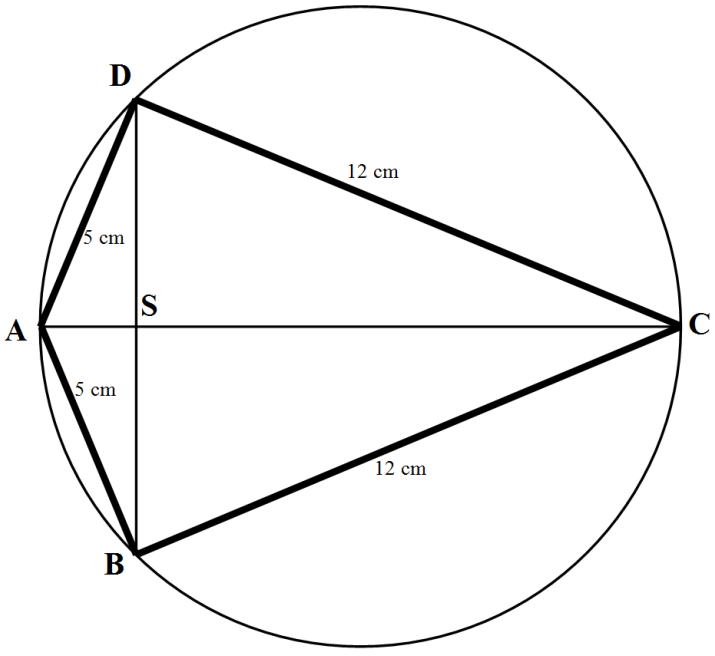
Rovnica má preto tri riešenia v tvare usporiadanej dvojice $[x;y]$: $[2;1]$, $[2;2]$ a $[2;3]$.

10. Do kružnice je vpísaný štvoruholník, ktorého dve strany majú dĺžku 12 cm a dve 5 cm, a ktorého uhlopriečky majú rôzne dĺžky. Vypočítajte ich dĺžky.

Riešenie: Keďže dve a dve strany štvoruholníka majú rovnaké dĺžky, môžu nastať dva základné prípady – strany dĺžky 12 cm nemajú spoločný vrchol alebo spoločný vrchol majú.

V prvom prípade to znamená, že strany dĺžky 12 cm susedia so stranami dĺžky 5 cm, teda protiľahlé strany majú rovnaké dĺžky, teda ide o rovnobežník. Avšak rovnobežníku sa nedá opísať kružnica okrem špeciálneho prípadu, ktorým je obdĺžnik. Ten má však obe uhlopriečky rovnako dlhé, a tak nevyhovuje. Preto v prvom prípade nedostávame vyhovujúce riešenie úlohy.

V druhom prípade to znamená, že tieto dve 12 cm strany sú susedné. Potom sú aj dve 5 cm strany susedné. Tento štvoruholník teda bude osovo súmerný podľa jednej uhlopriečky. Keďže sa mu súčasne dá opísať kružnica, táto uhlopriečka (vzhľadom na vyššie uvedenú symetriu) bude zároveň priemerom tejto kružnice. Označme si vrcholy štvoruholníka podľa nasledujúceho obrázka.



Keďže AC je priemerom kružnice, podľa Tálesovej vety sú uhly ADC a ABC pravé, a teda v trojuholníku ADC platí Pytagorova veta. Pomocou nej vypočítame, že platí

$$|AC| = \sqrt{|AD|^2 + |CD|^2} = \sqrt{(5\,\text{cm})^2 + (12\,\text{cm})^2} = 13\,\text{cm}.$$

Obsah trojuholníka ADC môžeme vypočítať dvomi spôsobmi:

$$\frac{|AD| \cdot |CD|}{2} = S_{\triangle ADC} = \frac{|AC| \cdot |SD|}{2}.$$

Úpravou a dosadením známych hodnôt dostaneme, že platí

$$|SD| = \frac{|AD| \cdot |CD|}{|AC|} = \frac{5\,\text{cm} \cdot 12\,\text{cm}}{13\,\text{cm}} = \frac{60}{13}\,\text{cm}.$$

Potom už ľahko (vzhľadom na symetriu) dopočítame, že platí

$$|BD| = 2 \cdot |SD| = \frac{120}{13}\,\text{cm}.$$

Uhlopriečky štvoruholníka majú veľkosť 13 cm a $\frac{120}{13}$ cm.

11. Nájdite najväčšie reálne číslo d také, že pri rozdelení jednotkového štvorca na dve disjunktné množiny aspoň jedna z nich obsahuje aspoň dva body, ktorých vzdialenosť je aspoň d.

Riešenie: Rozdeľme jednotkový štvorec na polovicu – jednu časť bude tvoriť obdĺžnik s rozmermi 1 x 0,5, druhú časť bude tvoriť obdĺžnik s rozmermi 1 x 0,5 bez jednej strany dlhej 1. Maximálna vzdialenosť bodov v obidvoch častiach je $\frac{\sqrt{5}}{2}$, čo predstavuje dĺžku uhlopriečky v uvedených obdĺžnikoch. To znamená, že pre hľadané číslo d máme horné ohraničenie.

Teraz ukážeme, že pri ľubovoľnom rozdelení jednotkového štvorca na dve disjunktné množiny aspoň jedna z nich obsahuje aspoň dva body, ktorých vzdialenosť je aspoň $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Zvoľme si 4 vrcholy jednotkového štvorca a stredy jeho strán. Ak by jedna z množín obsahovala dva nesusedné vrcholy štvorca, bola by ich vzdialenosť aspoň $\sqrt{2}$, čo je viac ako $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Ak obe množiny obsahujú po dva susedné vrcholy, pozrime sa na stredy strán štvorca, ktoré spájajú body z týchto dvoch rôznych

množín. Aspoň jeden z nich patrí do aspoň jednej z množín, a teda dostávame 3 body v jednej množine, pričom vzdialenosť dvoch z nich je $\frac{\sqrt{5}}{2}$, a teda táto množina obsahuje aspoň dva body, ktorých vzdialenosť je aspoň $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Hľadané číslo *d* má hodnotu $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

12. Dokážte, že v trojuholníku *ABC* pri štandardnom označení platí

$$t_a + t_b + t_c > \frac{1}{2}(a+b+c).$$

Riešenie: Stred strany *BC* (*CA, AB*) označme S_1 (S_2, S_3). Z trojuholníkov ABS_1, BCS_2, CAS_3 vyplývajú na základe trojuholníkovej nerovnosti tieto nerovnosti:

$$t_a + \frac{a}{2} > c \;\Rightarrow\; t_a > c - \frac{a}{2},$$
$$t_b + \frac{b}{2} > a \;\Rightarrow\; t_b > a - \frac{b}{2},$$
$$t_c + \frac{c}{2} > b \;\Rightarrow\; t_c > b - \frac{c}{2}.$$

Po sčítaní nerovností na pravej strane a úprave dostávame požadované tvrdenie.

13. Určte, koľkými spôsobmi vieme zapísať dané prirodzené číslo ako súčet nepárnych prirodzených čísel (aspoň jedného), pričom berieme ohľad na ich poradie. Napríklad 5 vieme zapísať piatimi spôsobmi, pretože platí 5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = = 1 + 1 + 3 = 1 + 3 + 1 = 3 + 1 + 1 = 5.

Riešenie: Označme hľadaný počet spôsobov, ako zapísať dané prirodzené číslo *n* ako súčet nepárnych prirodzených čísel (aspoň jedného), pričom berieme ohľad na ich poradie, ako $s(n)$. Ľahko nahliadneme, že platí

$$s(1)=1,\ s(2)=1,\ s(3)=2,\ s(4)=3,\ s(5)=5.$$

Ukážeme, že platí $s(n)=s(n-1)+s(n-2)$, a teda platí $s(n)=F_{n-1}$, kde F_n je *n*-té Fibonacciho číslo. Rozdeľme všetky prípustné zápisy prirodzeného čísla *n* na dve časti – na tie, ktoré začínajú číslom 1, a na tie, ktorých prvý člen je aspoň 3. Ak si odmyslíme prvý člen, tak v prvej skupine sú potom všetky možné zápisy prirodzeného čísla $n-1$ požadovaným spôsobom, ktorých je $s(n-1)$. V druhej

skupine odčítajme v každom zápise od prvého člena číslo 2. Dostaneme tak všetky možné zápisy prirodzeného čísla $n-2$ požadovaným spôsobom, ktorých je $s(n-2)$. Dokázali sme tak, že platí $s(n)=s(n-1)+s(n-2)$, a teda platí $s(n)=F_{n-1}$, kde F_n je *n*-té Fibonacciho číslo.

14. Dokážte, že najväčší spoločný deliteľ všetkých možných rozdielov štvrtých mocnín dvojíc aspoň dvojciferných prvočísel je 240.

Riešenie: Ak zvolíme za prvočísla 11 a 13, dostaneme, že rozdiel ich štvrtých mocnín je 13 920. Ak zvolíme za prvočísla 11 a 17, dostaneme, že rozdiel ich štvrtých mocnín je 68 880. Keďže platí $13\,920=2\cdot 29\cdot 240$ a $68\,880=7\cdot 41\cdot 240$, najväčším spoločným deliteľom týchto dvoch čísel je 240, a teda najväčší spoločný deliteľ všetkých možných rozdielov štvrtých mocnín dvojíc aspoň dvojciferných prvočísel bude deliteľom 240. Prvočíselný rozklad čísla 240 je $240=2^4\cdot 3\cdot 5$.

Aspoň dvojciferné prvočísla sú určite nepárne. Zvoľme si dve z nich. Potom ich môžeme zapísať v tvare $2k+1$ a $2l+1$, pričom *k* a *l* sú prirodzené čísla. Potom pre rozdiel ich štvrtých mocnín dostávame, že platí

$$\begin{aligned}
&(2k+1)^4-(2l+1)^4=\left[(2k+1)^2-(2l+1)^2\right]\cdot\left[(2k+1)^2+(2l+1)^2\right]=\\
&=\left[(2k+1)-(2l+1)\right]\cdot\left[(2k+1)+(2l+1)\right]\cdot\left[(2k+1)^2+(2l+1)^2\right]=\\
&=\left[2k-2l\right]\cdot\left[2k+2l+2\right]\cdot\left[(2k+1)^2+(2l+1)^2\right]=\\
&=2^3\cdot\left[k-l\right]\cdot\left[k+l+1\right]\cdot\left[2k^2+2k+2l^2+2l+1\right].
\end{aligned}$$

Keďže rozdiel medzi číslami $k-l$ a $k+l+1$ je $2l+1$, práve jedno z nich bude párne a práve jedno nepárne. Preto je rozdiel štvrtých mocnín aspoň dvojciferných prvočísel deliteľný 2^4.

Keďže ide o aspoň dvojciferné prvočísla, ani jedno z nich nie je deliteľné tromi, a teda dávajú po delení tromi zvyšok 1 alebo 2. Štvrté mocniny potom dávajú po delení tromi zvyšok 1, pretože $2^4=16$ dáva po delení tromi zvyšok 1. Ich rozdiel potom dáva zvyšok 0 po delení tromi, a teda je deliteľný tromi.

Keďže ide o aspoň dvojciferné prvočísla, ani jedno z nich nie je deliteľné piatimi, a teda dávajú po delení piatimi zvyšok 1, 2, 3 alebo 4. Štvrté mocniny potom dávajú po delení piatimi zvyšok 1, pretože $2^4=16$ dáva po delení piatimi zvyšok 1, $3^4=81$

dáva po delení piatimi zvyšok 1 aj $4^4 = 256$ dáva po delení piatimi zvyšok 1. Ich rozdiel potom dáva zvyšok 0 po delení piatimi, a teda je deliteľný piatimi.

Keďže sme dokázali, že rozdiel štvrtých mocnín aspoň dvojciferných prvočísel je deliteľný 240 a existuje aspoň jedna dvojica, pre ktorú je to práve 240, najväčší spoločný deliteľ všetkých možných rozdielov štvrtých mocnín dvojíc aspoň dvojciferných prvočísel je 240.

Výsledková listina po 3. sérii úloh korešpondenčnej súťaže

Kategória C

Por.	Priezvisko a meno	Škola	PS	3	4	5	6	Spolu
1	Novotný Peter	SOŠ Bratislava	25	5	5	0	0	35
2	Horváth Ján	G Bratislava	20	5	5	0	0	30
3	Roth Roman	SOŠP Svit	18	0	0	0	0	18
4	Kaľavská Lenka	SOŠP Svit	12	0	0	0	0	12
4	Maniaková Andrea	SOŠP Svit	12	0	0	0	0	12
4	Šoltysová Viktória	SOŠP Svit	12	0	0	0	0	12
7	Vernarecová Alexandra	SOŠP Svit	6	0	0	0	0	6
8	Kolář Martin	SOŠP Svit	1	0	0	0	0	1

Kategória B

Por.	Priezvisko a meno	Škola	PS	5	6	7	8	Spolu
1	Pokorný Matej	G Žilina	30	5	1	0	0	36
2	Skokan Dominik	SOŠP Svit	26	0	0	0	0	26
3	Kováč Michal	G Bratislava	16	0	0	0	0	16
4	Colotka Richard	SOŠP Svit	1	0	0	0	0	1

Kategória A

Por.	Priezvisko a meno	Škola	PS	7	8	9	10	Spolu
1	Novotný Ján	G Prešov	21	5	5	0	0	31
2	Závodský Branislav	G Košice	19	0	0	0	0	19

S miernou dávkou logiky

Vysokoškolský profesor Ilja Černý v predhovore ku svojej knižke *Úvod do inteligentního kalkulu* (Praha: Academia, 2002) uznáva: *Získal som pevné presvedčenie, že jednou z najdôležitejších úloh výučby matematiky má byť výcvik v logickom myslení v tom najširšom zmysle slova.*

Vybral som päť nenáročných zadaní úloh a na ich riešení ukazujem postupne narastajúcu miernu dávku logického prístupu aj s primeranou školskou matematikou. Záverečná úloha vám pripraví prekvapenie, jej riešenie je už rafinovaným prejavom užitočných logicko-matematických úvah.

Votrelec

Preskúmajte rozličné vlastnosti čísiel v jednotlivých radoch a vyraďte z každého nasledujúceho radu čísiel vždy jedno číslo, ktoré nezodpovedá „logike“ ostatných čísiel v príslušnom rade – svoje rozhodnutie zdôvodnite:

a) 12, 34, 58, 78;

b) 46, 84, 73, 91;

c) 134, 245, 467, 754, 689;

d) 1764, 4761, 6174, 6832, 7641.

Riešenie:

a) 58; ostatné sú dvojciferné čísla s postupne rastúcimi číslicami;

b) 84; ostatné čísla majú súčet číslic rovnaký (10);

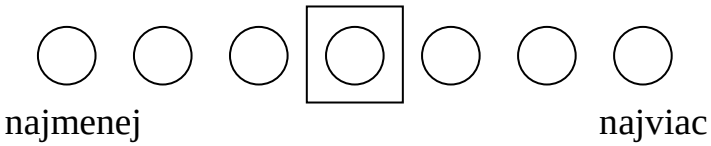
c) 754; ostatné čísla sú zostavené z pravidelne narastajúcich číslic;

d) 6832; ostatné čísla sú zostavené vždy z tých istých číslic {1, 4, 6, 7}.

Šikovní hubári

Sedem hubárov nazbieralo spolu 100 húb tak, že každý z nich nazbieral iný počet. Dokážte, že medzi nimi sú traja takí, ktorí dohromady nazbierali aspoň 50 húb.

Riešenie: Usporiadajme počty nájdených húb vzostupne



Priemerný počet nazbieraných húb je medzi počtom 14 – 15. Ak je prostredný počet (označený štvorčekom) aspoň 15, tak potom od stredu napravo sú počty najmenej 16, 17, 18, to znamená spolu 51 a tým je dokázané tvrdenie našej úlohy.

Ak je v strede počet najviac 14, tak naľavo od stredu sú najviac počty 11, 12, 13, teda spolu so stredným počtom najviac 50, ale to znamená, že od stredu doprava bude súčet tých zvyšných troch aspoň 50 a to je tvrdenie našej úlohy.

Rozhovor dvoch matematikov

Dvaja matematici (*A* a *B*) sa takto zhovárali:

A: *Súčin veku mojich troch synov je 36*.

B: *Táto informácia mi nestačí na určenie veku každého z nich*.

A: *Súčet veku mojich synov je rovnaký ako počet okien na dome, ktorý vidíme pred sebou.*

B: *Ani teraz sa nedá určiť vek tvojich synov*.

A: *Najstarší z mojich synov má čierne vlasy*.

B: *Ďakujem, to stačí, už poznám vek tvojich synov*.

Koľko rokov má každý zo spomínaných synov?

Koľko okien bolo na budove, ktorú videli matematici pred sebou?

Riešenie: Vek synov je celočíselný. Rozložme číslo 36 na súčin troch kladných celých čísel a zapíšme hneď vedľa aj súčet ich veku:

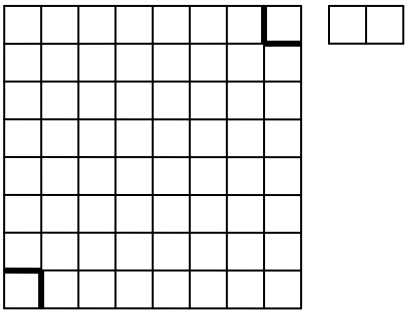
$1 \cdot 1 \cdot 36$	*38*	$1 \cdot 4 \cdot 9$	*14*	$2 \cdot 3 \cdot 6$	*11*
$1 \cdot 2 \cdot 18$	*21*	$1 \cdot 6 \cdot 6$	*13*	$3 \cdot 3 \cdot 4$	*10*
$1 \cdot 3 \cdot 12$	*16*	$2 \cdot 2 \cdot 9$	*13*		

Teraz jasne vidíme, prečo *B* nemohol po druhej odpovedi určiť vek synov: na budove bolo 13 okien. Sú dve možnosti pre vek synov: buď 1, 6, 6 alebo 2, 2, 9. Matematik *A* v poslednej odpovedi (*najstarší* z mojich synov) naznačil, že najstarší jeho syn nie je z dvojičiek (mali by rovnaký vek). Teda synovia majú vek dva, dva a deväť rokov.

Vystrihnutá šachovnica

Ukážte, že ak zo šachovnice 8 x 8 štvorcových políčok odstrihneme dve políčka v protiľahlých kútoch uhlopriečky, tak takúto „vystrihnutú“ šachovnicu nemožno úplne pokryť „dvojpolíčkovými obdĺžnikmi“.

Riešenie: Ak si predstavíme aj striedanie farebných štvorčekov ako na šachovnici pre šachovú hru (striedavo biele a tmavé), uvidíme, že oba vystrihnuté štvorce majú rovnakú farbu. Na vystrihnutej šachovnici je 32 štvorčekov jednej farby a len 30 štvorčekov druhej farby. Pokrývajúce „dvojpolíčkové obdĺžniky“ majú vždy jeden štvorček biely a jeden tmavý. Pri postupnom pokrývaní sa teda vždy pokryje obdĺžnik zložený z dvoch štvorčekov rôznych farieb. To znamená, že spomínaným postupom nemožno súčasne pokryť nerovnaký počet bielych a tmavých štvorčekov.



Záhada dvanástich dukátov

Medzi dvanástimi dukátmi je jeden falošný (nemá rovnakú hmotnosť ako ostatné). Stanovte postup, akým nájdete tento falošný dukát najviac tromi váženiami na rovnoramenných váhach, ak nie sú k dispozícii žiadne závažia.

Riešenie: Ak rozdelíme 12 dukátov na tri skupiny po 4 dukátoch a porovnáme prvé dve skupiny môžu nastať dve možnosti:

A. Zvolené dve skupiny majú rovnakú hmotnosť. To znamená, že falošný dukát sa nachádza v zostávajúcej tretej skupine a všetky dukáty z porovnávaných skupín sú pravé. Označíme teda dukáty z tretej skupiny číslami 1, 2, 3 a 4.

Porovnajme teraz dukáty 1 a 2 s niektorými dvoma pravými dukátmi (sú v rovnovážnych skupinách). Môžu nastať opäť dve možnosti:

a) Ak sa hmotnosti rovnajú, znamená to, že falošný dukát je 3 alebo 4. Zoberieme dukát 3 a porovnáme ho s niektorým už pravým dukátom. Ak sú hmotnosti rovnaké, falošný je dukát 4, ak nie, tak je falošný dukát 3.

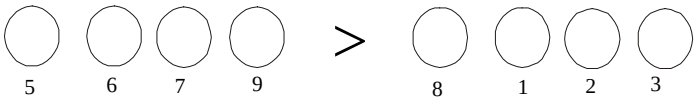
b) Ak sú hmotnosti rozdielne, znamená to, že falošný je buď dukát 1 alebo dukát 2. Porovnáme dukát 1 s niektorým pravým dukátom. Ak sa hmotnosti rovnajú, falošný je dukát 2. Ak nie, falošným dukátom je dukát 1.

B. Zvolené dve skupiny (po štyroch dukátoch) nemajú rovnakú hmotnosť. Nech prvá skupina má väčšiu hmotnosť. Označme si dukáty v prvej skupine číslami 5 až 8 a dukáty v druhej skupine 9 až 12. Falošný dukát sa nachádza v jednej z dvoch prvých skupín a všetky dukáty v tretej skupine sú pravé (označíme ich 1 – 4).

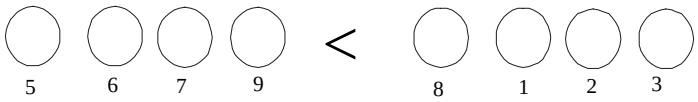
Rozdelíme teraz dukáty do dvoch skupín 5, 6, 7, 9 a 8, 1, 2, 3 a porovnáme ich.



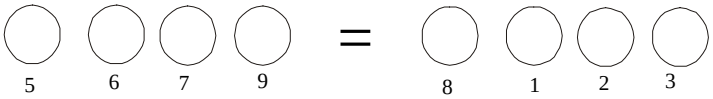
Ich vážením môžu nastať tri možnosti:

a) 

Ak nastane tento prípad, znamená to (dukát 9 mohol byť ľahší, ale nie je), že falošný (ťažší) dukát je 5, 6, alebo 7. Zoberieme teda dukát 5 a 6 a porovnáme ich medzi sebou. Ak majú rovnakú hmotnosť, falošný je dukát 7. Ak nie, falošný je ten s väčšou hmotnosťou.

b) 

Ak nastane tento prípad, znamená to, že falošný dukát je dukát 8 (ťažší) alebo 9 (ľahší). Zoberme teda dukát 8 a porovnajme ho s niektorým už pravým. Ak sa hmotnosti rovnajú, falošný je 9. Ak sa nerovnajú, falošný je 8.

c) 

Ak nastane tento prípad, znamená to, že falošný dukát je medzi dukátmi 10 – 12, o nich už vieme, že musia byť ľahšie. Zoberme teda dukát 10 a 11 a porovnajme ich medzi sebou. Ak sa ich hmotnosti rovnajú, falošný je dukát 12. Ak nie, falošný je dukát s nižšou hmotnosťou z posledného váženia.

Trvalým úsilím školskej matematiky má byť aj príspevok k rozvoju správneho uvažovania, spoznaniu základných pravidiel logického myslenia. Pretože nielen vedecko-technická, ale aj spoločensko-kultúrna prax prehĺbia svoju užitočnosť vtedy, ak sa v nich budeme vyjadrovať stručne, zrozumiteľne a jednoznačne. Český matematik I. Černý svojou učiteľskou praxou spoznal, že *ak človek hovorí sám sebe pravdu, môže si ušetriť mnohé ťažkosti*.

Dušan Jedinák

Obsah

Redakčná pošta ..... 2. strana obálky
Eduard Čech 1
Korešpondenčná súťaž v školskom roku 2018/2019 2
Riešenia 3. série úloh korešpondenčnej súťaže 2
Výsledková listina po 3. sérii úloh korešpondenčnej súťaže 9
S miernou dávkou logiky 10
Obsah ..... 4. strana obálky

MATMIX – matematický časopis pre žiakov základných a stredných škôl, vydáva Ing. Mgr. Martin Hriňák v spolupráci s Jednotou slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Bratislava 1, ako pomocnú literatúru pre predmetové komisie matematiky a pre žiakov so záujmom o matematiku.

Šéfredaktor: Ing. Mgr. Martin Hriňák
Redakcia: Dušan Jedinák, Mgr. Katarína Hriňáková, PhD.
Vydavateľ: Ing. Mgr. Martin Hriňák, Havanská 17, 040 13 Košice, IČO 41857836
Adresa redakcie: Ing. Mgr. Martin Hriňák, MATMIX, M. R. Štefánika 716/29, 900 46 Most pri Bratislave
Časopis vychádza štyrikrát ročne. Cena 1,35 €. Náklad: 150 ks. Jún 2019.
E-mail: matmix@matmix.sk
Webová stránka: http://www.matmix.sk
Registračné číslo MK SR: EV 2029/08
ISSN: 1336-7854