Zadania úloh 3. série korešpondenčnej súťaže v školskom roku 2005/2006

1. Nájdite najmenšie prirodzené číslo n také, že $\sqrt{4n-2}$ je prirodzené číslo.

2. Každé z čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sa rovná 0, 1 alebo -2. Navyše platí

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -5,$$
$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 19.$$

Určte hodnotu $x_1^5 + x_2^5 + \ldots + x_n^5$.

3. V štvoruholníku $ABCD$, ktorého obsah je 2, platí $|AB| + |BD| + |CD| = 4$. Určte dĺžku úsečky AC.

4. Čísla strán knihy sú 1, 2, ... Ak sčítame všetky tieto čísla strán, ale jedno z nich započítame dvakrát, dostaneme 2006. Ktoré číslo sme započítali dvakrát a koľko strán má kniha?

5. Nájdite všetky riešenia rovnice

$$x + \frac{96}{x} = \lceil x \rceil + \frac{96}{\lceil x \rceil},$$

kde $\lceil x \rceil$ označuje hornú celú časť x, teda také celé číslo, pre ktoré platí

$$x \le \lceil x \rceil < x + 1.$$

6. Nech O je taký bod vnútri rovnobežníka $ABCD$, pre ktorý platí

$$|\angle AOB| + |\angle COD| = 180°.$$

Dokážte, že $|\angle OBC| = |\angle ODC|$.

7. Uvažujme abecedu, ktorá obsahuje len tri rôzne písmená a, b, c. Nájdite počet takých slov obsahujúcich práve n písmen, ktoré obsahujú párny počet písmen a.

8. Nájdite najmenšie prirodzené číslo K také, že každá K-prvková podmnožina množiny $\{1, 2, \ldots, 50\}$ obsahuje dva rôzne prvky a, b také, že $a + b$ delí ab.

9. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $n \ge 3$ existujú také nepárne prirodzené čísla x_n, y_n, že platí $7x_n^2 + y_n^2 = 2^n$.

10. Nech $x > 1$ je reálne číslo, ktoré nie je prirodzeným číslom. Pre $n \in \mathbf{N}$ definujeme $a_n = \lfloor x^{n+1} \rfloor - x \lfloor x^n \rfloor$. Dokážte, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nie je periodická.

11. Sú dané reálne čísla $0 = x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n} < x_{2n+1} = 1$, pričom platí $|x_{i+1} - x_i| \le h$ pre $1 \le i \le 2n$. Dokážte, že potom platí nerovnosť

$$\frac{1-h}{2} < \sum_{i=1}^{n} x_{2i} \cdot (x_{2i+1} - x_{2i-1}) < \frac{1+h}{2}.$$

12. Dokážte, že pre každú dvojicu *m*, *k* prirodzených čísel existuje jednoznačné vyjadrenie *m* v tvare

$$m = \binom{a_k}{k} + \binom{a_{k-1}}{k-1} + \cdots + \binom{a_t}{t},$$

pričom $a_k > a_{k-1} > \ldots > a_t \ge t \ge 1$.

13. Nech $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je taká funkcia, že pre všetky $x, y \in \mathbf{R}$ platí

$$f(x^3 + y^3) = (x + y)(f(x)^2 - f(x)f(y) + f(y)^2).$$

Dokážte, že potom pre všetky $x \in \mathbf{R}$ platí $f(2006x) = 2006 f(x)$.

14. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $k > 1$ existuje jeho násobok menší než k^4, ktorého dekadický zápis obsahuje maximálne štyri rôzne cifry.

Termín odoslania riešení úloh 3. série: do 15. 5. 2006