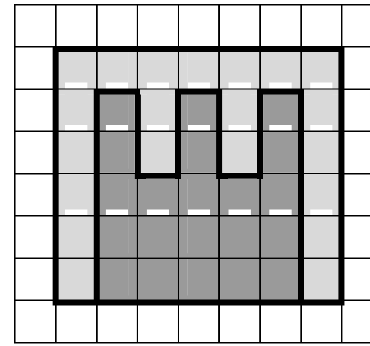
Zadania úloh 56. ročníka Matematickej olympiády v šk. roku 2006/2007

Kategória Z4



1. Na obrázku sú v štvorčekovej sieti znázornené dva ZUBOUHOLNÍKY (svetlosivý a tmavosivý), ktoré sa zahryzli do seba. (ZUBOUHOLNÍK je špeciálny druh mnohouholníka.) Zistite, ktorý z nich má väčší obsah a ktorý väčší obvod.

(Bednářová S.)

2. Miss STRANGELANDIA dostala tak veľa rôznych ponúk od rôznych modelingových agentúr, že si z nich nevedela vybrať. Napokon sa rozhodla, že prijme ponuku tej z nich, ktorá ako prvá uhádne číslo jej topánok. Prezradila im, že je to dvojciferné číslo s ciferným súčtom 12 a ak by sa v tomto čísle zmenilo poradie číslic, vzniklo by číslo o 54 väčšie. Aké číslo topánok nosí Miss STRANGELANDIA?

(Bednářová S.)

3. Jurko včera na magnetickej tabuli vytvoril vzorový príklad. Dnes, keď prišiel do školy, zistil, že pani upratovačka ho „upratala“ a všetky použité číslice a znaky zoradila na dolnom okraji tabule takto:

3 4 5 6 8 9 + =

Aký príklad vytvoril včera Jurko? Nájdi všetky možnosti.

(Dillingerová M.)

4. Rodičia prvej slovenskej superstar K. K. sa starajú o jaskyňu „Zlá diera“. V jaskyni je tma, návštevníci si svietia karbidovými lampášikmi. Pre seba a pre pani učiteľku má pán K. väčšiu lampičku. Lampášikov však mali len 9, preto sprievodca ujo K. zoradil našu skupinu ako husi tak, že tesne pred tým, ktorý nemal lampášik, išiel niekto s lampášikom alebo lampičkou. Prvý v zástupe bol on, posledná pani učiteľka s lampičkou. Lampášik niesli 4 chlapci, 4 dievčatá lampášik nedostali. Koľko dievčat bolo v našej skupine? Koľko tam bolo chlapcov? Poznámka: Nik neniesol dva lampášiky a žiadni dvaja s lampášikmi nešli tesne za sebou.

(Bednářová S.)

5. Sedem Snehulienkiných trpaslíkov bolo na hríboch. Prišli s košíčkami, v ktorých mali 34, 19, 50, 44, 31, 28 a 37 hríbov. Snehulienka im povedala, aby niektoré košíčky uložili do špajze, niektoré dali k sporáku a ostatné položili na stôl tak, že všade mal byť rovnaký počet hríbov. Trpaslíci sa rozhodli, že hríby z košíčkov nebudú vyberať. Podarí sa im uložiť košíčky tak, ako to chcela Snehulienka? Nájdi aspoň jeden spôsob.

(Ptáčková Š.)

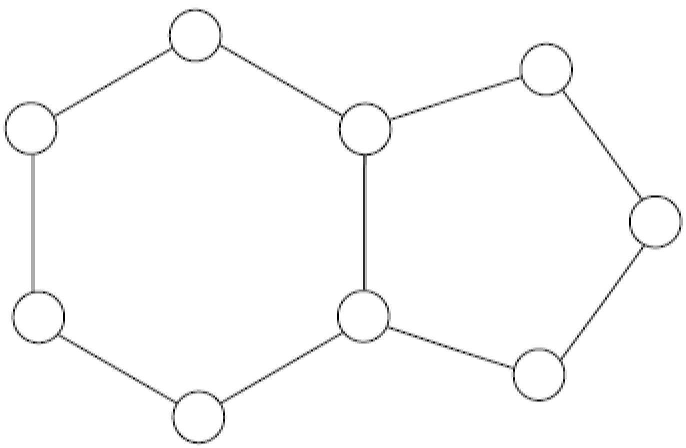
6. Z čísla 1583719 vyškrtni tri číslice tak, aby vzniklo čo najväčšie číslo, ktorého každá číslica je nepárna.

(Dillingerová M.)

Kategória Z5

1. Na obrázku vidíš päťuholník a šesťuholník so spoločnou stranou. Doplň do krúžkov na tomto obrázku číslice 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9 tak, aby súčet čísel v šesťuholníku aj súčet čísel v päťuholníku bol 24. Každé číslo smieš použiť len raz. Stačí, keď nájdeš jedno riešenie.

(Hozová L.)



2. Cyklistického preteku *Krížom - krážom* sa zúčastnili šesťčlenné družstvá z celej Európy. Prvých desať etáp ešte zvládli všetci, ale v jedenástej etape po hromadnom páde odstúpilo 17 cyklistov. V každej ďalšej etape ich potom odstúpilo o troch menej ako v predošlej. Do cieľa poslednej 15. etapy došlo 53 cyklistov. Koľko družstiev sa zúčastnilo preteku?

(Ptáčková Š.)

3. Tomáškova cvičená blcha Skákalka stála na ciferníku hodín na bodke pri čísle 12. Hrala sa s ním takúto hru: Tomáško hodil kockou a blcha skočila o toľko bodiek ďalej, koľko mu padlo na kocke. Po prvom hode skákala v smere pohybu hodinových ručičiek, po druhom proti smeru a po treťom opäť v smere pohybu hodinových ručičiek. Vieme, že Tomáško hodil dvojku, päťku a šestku, ale nevieme v akom poradí mu padli.

a) Na bodke pri ktorom čísle mohla skončiť Skákalka po treťom skoku?
b) Na ktoré číslo sa blcha počas hry vôbec nemohla dostať?

(Hozová L.)

4. Pomocou číslic 0 až 9 a dvoch desatinných čiarok utvor dve desatinné čísla tak, aby ich súčet bol čo najmenší. Nájdi všetky možnosti! (Každú číslicu treba použiť práve raz!)

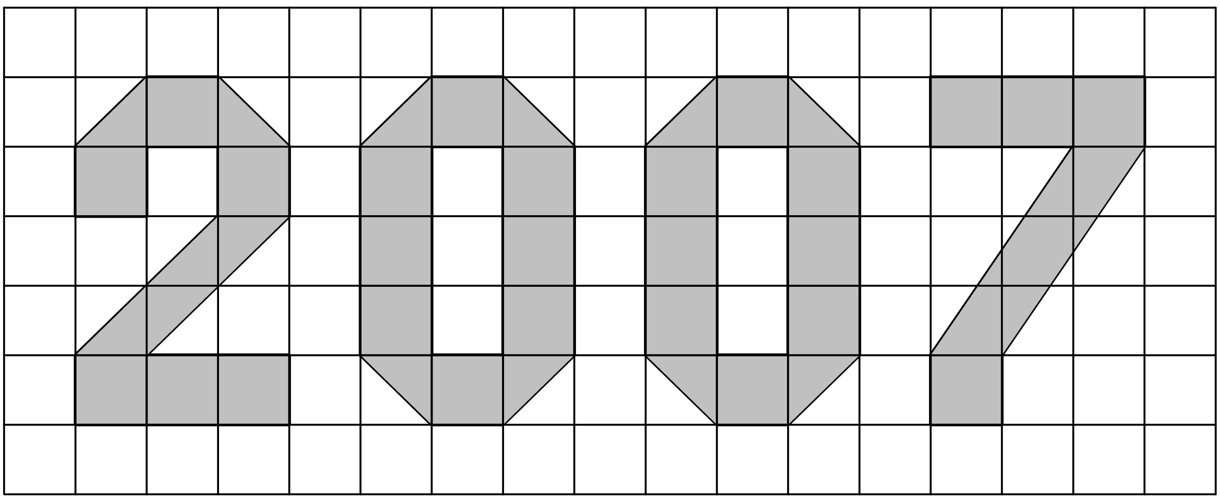
(Bednářová S.)

5. Sedem Snehulienkiných trpaslíkov bolo na hríboch. Prišli s košíčkami, v ktorých mali 34, 19, 50, 44, 31, 28 a 37 hríbov. Snehulienka im povedala, aby niektoré košíčky uložili do špajze, niektoré dali ku sporáku a ostatné položili na stôl tak, že všade malo byť rovnako veľa hríbov. Trpaslíci sa rozhodli, že hríby z košíčkov nebudú vyberať. Podarí sa im uložiť košíčky tak, ako to chcela Snehulienka? Nájdi aspoň jeden spôsob!

(Ptáčková Š.)

6. Na obrázku je v štvorčekovej sieti znázornené číslo 2007. Zisti obsah sivej časti obrázka, ak vieš, že strana každého malého štvorčeka meria 4 cm.

(Raabová M.)



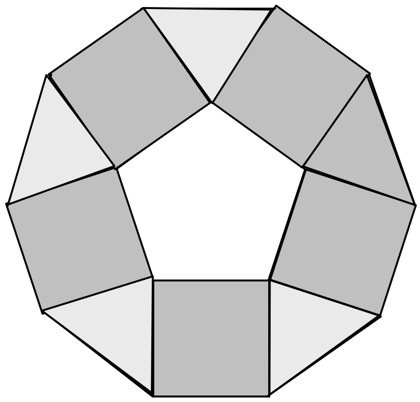
Kategória Z6

1. Lukáš natieral latkový plot. Každých 10 minút natrel 8 latiek. Jeho mladší brat Kubko mu chvíľku pomáhal. Za 7 minút natrel vždy 4 latky, takže Lukáš skončil o štvrť hodiny skôr, ako predpokladal. Ako dlho mu Kubko pomáhal?

(Raabová M.)

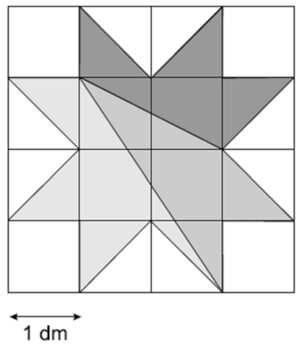
2. Zo zhodných rovnoramenných trojuholníkov a štvorcov sme zložili (bez prekrývania) útvar znázornený na obrázku. Zisti veľkosti vnútorných uhlov týchto rovnoramenných trojuholníkov.

(Bednářová S.)

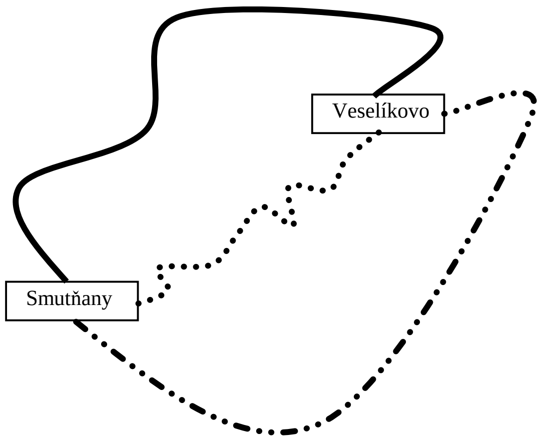


3. Hviezda na obrázku je rozdelená dvomi úsečkami na tri časti. Zisti obsahy jednotlivých častí.

(Šimůnek L.)



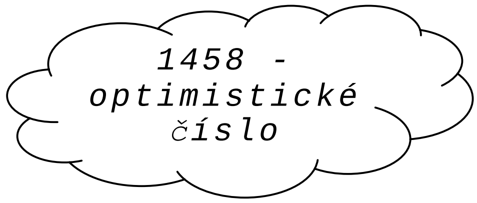
4. Zo Smutňan do Veselíkova vedú tri cesty. Tá, ktorá je na mape vyznačená ako plná, meria 40 km, najvyššia povolená rýchlosť na nej je 80 km/h a vyberá sa na nej mýto 50 korún. „Bodkovaná“ cesta je dlhá 35 km, najvyššia povolená rýchlosť je na nej 60 km/h a mýtne je 150 korún. Na „čiarkovanej“ ceste, ktorá je dlhá 45 km, sa vyberá mýto 100 korún a najvyššia povolená rýchlosť je 100 km/h. Ujo Ponáhľavý a teta Šporovlivá sa chcú dostať zo Smutňan do Veselíkova, ujo čo najskôr a teta čo najlacnejšie. Obaja si zavolali taxík. Šoféri taxíkov celú cestu idú maximálnou povolenou rýchlosťou a účtujú si 15 korún za jeden km cesty a zaplatené mýtne.



1. Ktorou cestou sa má vybrať taxikár uja Ponáhľavého?
2. Ktorou cestou sa má vybrať taxikár tety Šporovlivej?
3. O koľko minút menej bude trvať ujova cesta v porovnaní s tetinou?
4. O koľko korún viac zaplatí ujo ako teta?

(Bednářová S.)

5. Viacciferné číslo sa nazýva optimistické, ak jeho číslice zľava doprava rastú. Ak číslice čísla zľava doprava klesajú, hovoríme, že je to číslo pesimistické. Súčet sedemciferného pesimistického a sedemciferného optimistického čísla zloženého z tých istých číslic je 11001000. Ktoré číslice sme použili na zápis týchto dvoch čísel?



(Bednářová S.)

6. Naša trieda plánovala turistický výlet. Niektorí žiaci sa dohadovali o dĺžke jeho trasy a tvrdili, že je to 28, 16, 32, 37 a 15 km. Mýlili sa však o 5, 7, 8, 9 a 14 km. Aký dlhý bol výlet v skutočnosti?

(Volfová M.)

Kategória Z7

1. Janka narysovala 6-uholník, ktorého dĺžky strán vyjadrené v cm sú celé čísla. Potom si uvedomila, že každé dve jeho susedné strany sú na seba kolmé. Zisti, ako mohol vyzerať Jankin 6-uholník, ak má byť jeho obvod 16 cm a jeho obsah 12 cm^2. Narysuj obe možnosti.

(Dillingerová M.)

2. Rozdeľ obdĺžnik na obrázku, ktorý sa skladá z rovnakých štvorcov, na čo najmenší počet zhodných častí tak, aby každá z nich obsahovala len také čísla, ktoré dávajú po delení tromi navzájom rôzne zvyšky. Pozor, rezať sa smie len po čiarach siete!

(Bednářová S.)

		14	32		
43	102	11			90
22	18		301		7
	35		99	29	
12				62	

3. Urč počet zlomkov, ktorých hodnota je násobkom troch a čitateľ aj menovateľ sú trojciferné prirodzené čísla.

(Šimůnek L.)

4. Rozprávkový deduško niesol vrece zrna do mlyna. Po ceste mu zrno začalo z vreca vypadávať. Tri vtáčiky si všimli, že za deduškom ostáva cestička označená jednotlivými zrnkami. Prvý išiel zobať zrnká zelený vtáčik a zozobal každé štvrté zrnko ležiace na zemi. Potom priletel zobať červený vtáčik a zozobal každé piate

zrnko ležiace na zemi. Nakoniec zlietol na cestičku modrý vtáčik a zozobal každé tretie zrnko ležiace na zemi. Koľko zrniek stratil deduško z vreca, ak vtáčiky zozobali spolu 79 zrniek?

(Dillingerová M.)

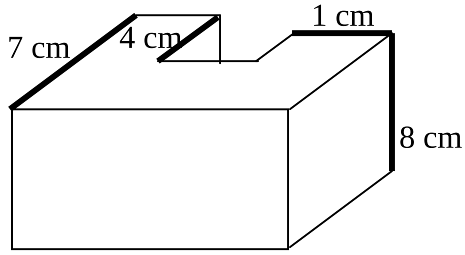
5. Troj- a viacciferné číslo s navzájom rôznymi ciframi, pre ktorého žiadne tri za sebou idúce číslice a, b, c neplatí $a < b < c$ ani $a > b > c$, sa nazýva vlnité. Napíš

a) najväčšie vlnité číslo, ktoré nie je deliteľné 3,
b) najväčšie vlnité číslo deliteľné 150.

(Bednářová S.)

6. Osemboký kolmý hranol načrtnutý na obrázku vznikol zlepením troch kvádrov. Zisti objem a povrch tohto hranola, ak poznáš dĺžky vyznačených hrán a vieš, že z ôsmich jeho bočných stien sú vždy dve a dve zhodné.

(Bednářová S.)



Kategória Z8

1. Z číslic 1 až 9 sme utvorili tri zmiešané čísla $a\frac{b}{c}$. Potom sme tieto tri čísla správne sčítali. Aký najmenší súčet sme mohli dostať? (Každú číslicu sme použili práve raz!)

(Bednářová S.)

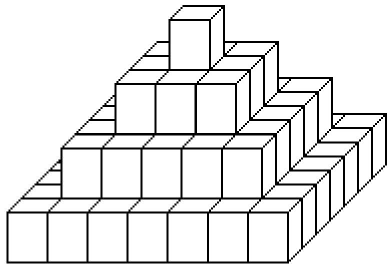
2. Pán kráľ si dal naliať plnú čašu vína. Pätinu vína z nej odpil. Potom si nechal čašu doplniť vodou a odpil štvrtinu objemu. Opäť mu ju doliali vodou a kráľ odpil tretinu. Nakoniec čašu ešte raz doliali vodou doplna. Koľko percent objemu čaše tvorí pôvodné víno?

(Krejčová M.)

3. Je daný pravidelný deväťuholník $ABCDEFGHI$. Vypočítajte veľkosť uhla, ktorý zvierajú priamky DG a BE.

(Krejčová M., Raabová M.)

4. Žiaci postavili z množstva rovnakých kociek pyramídu, ktorej časť vidíte na obrázku. Pyramída, svojho druhu najväčšia na svete, stála od tej doby na školskom dvore a pršalo na ňu. Po čase sa museli všetky kocky, na ktoré



pršalo, teda tie na povrchu, vymeniť. Vymenilo sa celkom 2 025 kociek. Koľko mala pyramída vodorovných vrstiev?

(Šimůnek L.)

5. Na lúke sa pásli ovce. Tých s rohmi bolo dvakrát menej ako tých bez rohov. Tých s tmavým kožúškom bolo toľko ako tých so svetlým kožúškom. (Iné ovce, jednorohé, fľakaté a pod., sa na lúke nepásli.) Iba tri tmavé ovečky nemali rohy a svetlé vôbec nemali rohy. Koľko sa páslo ovečiek na lúke?

(Dillingerová M.)

6. Výška rovnoramenného trojuholníka *ABC* delí tento trojuholník na dve časti, ktorých obsahy sú v pomere 1 : 3. Určte obsah a obvod trojuholníka *ABC*, ak viete, že $|AC| = |BC|$ a $|AB| = \sqrt{32}$ cm.

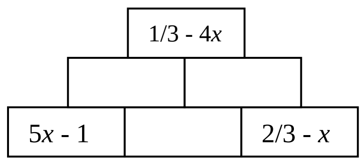
(Hozová L.)

Kategória Z9

1. Zistite, koľko je takých šesťciferných čísel, ktoré majú ciferný súčin 750?

(Tlustý P.)

2. V sčítacej pyramíde sa na každej tehličke (okrem tých z najspodnejšieho riadka) nachádza súčet tých čísel, ktoré sú napísané na dvoch s ňou susediacich tehličkách z nižšieho riadka. Doplňte na prázdne tehličky sčítacej pyramídy znázornenej na obrázku chýbajúce výrazy.



(Bednářová S.)

3. Do kružnice s polomerom 2 cm je vpísaný pravidelný šesťuholník *ABCDEF*. Priesečník priamok *FE* a *CD* označme *M*. Vypočítajte dĺžku úsečky *AM*.

(Volfová M.)

4. Matematickej súťaže sa zúčastnilo 142 žiakov. Po skončení súťaže autor zistil, že priemerný počet bodov udelených za tretiu úlohu pripadajúci na jedného súťažiaceho je 2,7 (zaokrúhlené na desatiny). Nie každý súťažiaci však tretiu úlohu odovzdal, takže priemerný počet bodov udelených za tretiu úlohu pripadajúci na jedno odovzdané riešenie bol 3,9 (zaokrúhlené na desatiny). Koľko súťažiacich mohlo odovzdať tretiu úlohu?

Poznámka: Udeľovali sa len celé body, neodovzdaná úloha bola hodnotená 0 bodmi.

(Šimůnek L.)

5. Trojuholník *REZ* s obsahom 300 cm^2, stranou *RE* dĺžky 25 cm a stranou *ZE* dĺžky 30 cm sme dvomi priamymi rezmi rozdelili na 3 časti a z týchto častí zložili (bez prekrývania) obdĺžnik. Aké rozmery mohol mať tento obdĺžnik? Nájdite všetky možnosti.

(Bednářová S.)

6. Ukážte, že číslo

$$\left(1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot 2003\cdot 2005\right)+\left(2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot \ldots \cdot 2004\cdot 2006\right)$$

je deliteľné číslom 2007^4.

(Tlustý P.)

Kategória C

1. Určte všetky dvojice prirodzených čísel (a, b), pre ktoré platí

$$a + 5\sqrt{b} = b + 5\sqrt{a}\ .$$

(Jaroslav Švrček)

2. Nájdite všetky trojuholníky, ktoré sa dajú rozrezať na lichobežníky so stranami dĺžok 1 cm, 1 cm, 1 cm a 2 cm.

(Ján Mazák)

3. Nájdite všetky prirodzené čísla, ktorých zápis neobsahuje nulu a má nasledujúcu vlastnosť: Ak v ňom vynecháme ľubovoľnú číslicu, dostaneme číslo, ktoré je deliteľom pôvodného čísla.

(Jaromír Šimša)

4. Daný je lichobežník *ABCD* so základňami *AB* a *CD*. Označme *E* stred strany *AB*, *F* stred úsečky *DE* a *G* priesečník úsečiek *BD* a *CE*. Vyjadrite obsah lichobežníka *ABCD* pomocou jeho výšky v a dĺžky d úsečky *FG* za predpokladu, že body *A*, *F*, *C* ležia na jednej priamke.

(Ján Mazák)

5. Zistite, pre ktoré prirodzené číslo n je podiel

$$\frac{33\,000}{(n-4)(n+1)}$$

a) čo najväčšie,
b) čo najmenšie prirodzené číslo.

(Eva Řídká)

6. Daný je ostrouhlý trojuholník *ABC*, v ktorom je *D* päta výšky z vrcholu *C* a *V* priesečník výšok. Dokážte, že $|AD|.|BD| = |AB|.|VD|$ práve vtedy, keď $|CD| = |AB|$.

(Jaroslav Zhouf)

Kategória B

1. Nájdite všetky dvojice celých čísel (a, b), ktoré sú riešením rovnice

$$a^2 + 7ab + 6b^2 + 5a + 4b + 3 = 0.$$

(Pavel Novotný)

2. Daná je kružnica k s priemerom AB. K ľubovoľnému bodu Y kružnice k, $Y \neq A$, zostrojme na polpriamke AY bod X, pre ktorý platí $|AX| = |YB|$. Určte množinu všetkých takých bodov X.

(Pavel Leischner)

3. Nájdite najmenšie prirodzené číslo k také, že každá k-prvková množina trojciferných po dvoch nesúdeliteľných čísel obsahuje aspoň jedno prvočíslo.

(Pavel Novotný)

4. V ľubovoľnom trojuholníku ABC označme T jeho ťažisko, D stred strany AC a E stred strany BC. Nájdite všetky pravouhlé trojuholníky ABC s preponou AB, pre ktoré je štvoruholník $CDTE$ dotyčnicový.

(Ján Mazák)

5. Nájdite všetky dvojice reálnych čísel (p, q) také, že mnohočlen $x^2 + px + q$ je deliteľom mnohočlena $x^4 + px^2 + q$.

(Jozef Moravčík)

6. Daná je úsečka AA_0 a priamka p. Zostrojte trojuholník s vrcholom A a výškou AA_0, ktorého ťažisko a stred kružnice opísanej ležia na priamke p.

(Eva Řídká)

Kategória A

1. V obore reálnych čísel vyriešte rovnicu

$$4x^4 - 12x^3 - 7x^2 + 22x + 14 = 0,$$

keď viete, že má štyri rôzne reálne korene, pričom súčet dvoch z nich sa rovná číslu 1.

(Jaromír Šimša)

2. Kružnica vpísaná do daného trojuholníka ABC sa dotýka strán BC, CA, AB postupne v bodoch K, L, M. Označme P priesečník osi vnútorného uhla pri vrchole C s priamkou MK. Dokážte, že priamky AP a LK sú rovnobežné.

(Peter Novotný)

3. Ak x, y, z sú reálne čísla z intervalu $\langle -1, 1\rangle$ spĺňajúce podmienku $xy + yz + zx = 1$, tak platí

$$6\sqrt[3]{\left(1 - x^2\right)\left(1 - y^2\right)\left(1 - z^2\right)} \leq 1 + \left(x + y + z\right)^2.$$

Dokážte a zistite, kedy nastáva rovnosť.

(Jaroslav Švrček)

4. Určte, pre ktoré prirodzené čísla n sa množina $M = \{1, 2, \dots, n\}$ dá rozdeliť

a) na dve,
b) na tri

navzájom disjunktné podmnožiny s rovnakým počtom prvkov tak, aby každá z nich obsahovala aj aritmetický priemer všetkých svojich prvkov.

(Peter Novotný)

5. V rovine je daná kružnica k so stredom S a bod $A \neq S$. Určte množinu stredov kružníc opísaných všetkým trojuholníkom ABC, ktorých strana BC je priemerom kružnice k.

(Jiří Dula)

6. Určte všetky funkcie $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ také, že pre všetky celé čísla x, y platí

$$f\left(f(x) + y\right) = x + f\left(y + 2006\right)$$

(Petr Kaňovský)