54. ročník matematickej olympiády

Úlohy I. kola – domáca časť

Kategória A

A – I – 1

Neprázdnu podmnožinu prirodzených čísel nazveme *malou*, keď má menej prvkov, ako je jej najmenší prvok. Určte počet všetkých malých množín M, ktoré sú podmnožinami množiny $\{1,2,3,\ldots,100\}$ a majú nasledujúcu vlastnosť: ak do M patria dve rôzne čísla x a y, potom do M patrí aj číslo $|x-y|$.

J. Földes

A – I – 2

Nech M je ľubovoľný vnútorný bod kratšieho oblúka CD kružnice opísanej štvorcu $ABCD$. Označme P, R priesečníky priamky AM postupne s úsečkami BD, CD a podobne Q, S priesečníky priamky BM s úsečkami AC, DC. Dokážte, že priamky PS a QR sú navzájom kolmé.

J. Švrček

A – I – 3

Nech k je ľubovoľné prirodzené číslo. Uvažujme dvojice (a,b) celých čísel, pre ktoré majú kvadratické rovnice

$$x^2 - 2ax + b = 0, \qquad y^2 + 2ay + b = 0$$

reálne korene (nie nutne rôzne), ktoré možno označiť $x_{1,2}$ resp. $y_{1,2}$ v takom poradí, že platí rovnosť $x_1y_1 - x_2y_2 = 4k$.

a) Pre dané k určte najväčšiu možnú hodnotu b zo všetkých takých dvojíc (a,b).

b) Pre $k = 2004$ určte počet všetkých takých dvojíc (a,b).

c) Pre dané k vypočítajte súčet čísel b zo všetkých takých dvojíc (a,b), pričom každé číslo b sa pripočíta toľkokrát, v koľkých dvojiciach (a,b) vystupuje.

E. Kováč

A – I – 4

Dané aritmetické postupnosti $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ a $(y_i)_{i=1}^{\infty}$ majú rovnaký prvý člen a nasledujúcu vlastnosť: existuje index k $(k>1)$, pre ktorý platia rovnosti

$$x_k^2 - y_k^2 = 53, \qquad x_{k-1}^2 - y_{k-1}^2 = 78, \qquad x_{k+1}^2 - y_{k+1}^2 = 27.$$

Nájdite všetky také indexy k.

V. Bálint

A – I – 5

V lichobežníku $ABCD$, kde $AB \parallel CD$, platí $|AB| = 2|CD|$. Označme E stred ramena BC. Dokážte, že rovnosť $|AB| = |BC|$ platí práve vtedy, keď štvoruholník $AECD$ je dotyčnicový.

R. Horenský

A – I – 6

Nájdite všetky funkcie $f:\langle 0,+\infty)\to\langle 0,+\infty)$, ktoré spĺňajú zároveň tri nasledujúce podmienky:

a) Pre ľubovoľné nezáporné čísla x,y také, že $x+y>0$, platí rovnosť

$$f\big(x\,f(y)\big)f(y)=f\left(\frac{xy}{x+y}\right);$$

b) $f(1)=0$;

c) $f(x)>0$ pre ľubovoľné $x>1$.

P. Calábek

Kategória B

B – I – 1

Určte všetky dvojice (a,b) reálnych čísel, pre ktoré má každá z rovníc

$$x^2+ax+b=0,\quad x^2+(2a+1)x+2b+1=0$$

dva rôzne reálne korene, pričom korene druhej rovnice sú prevrátenými hodnotami koreňov prvej rovnice.

E. Kováč

B – I – 2

Daný je rovnobežník $ABCD$. Priamka vedená bodom D pretína úsečku AC v bode G, úsečku BC v bode F a polpriamku AB v bode E tak, že trojuholníky BEF a CGF majú rovnaký obsah. Určte pomer $|AG|:|GC|$.

T. Jurík

B – I – 3

Na stole leží k hromádok s $1,2,3,\ldots,k$ kameňmi, kde $k\geq 3$. V každom kroku si vyberieme tri ľubovoľné hromádky na stole, zlúčime ich do jednej a pridáme k nej jeden kameň, ktorý dovtedy na stole nebol. Dokážte, že ak po niekoľkých krokoch vznikne jediná hromádka, potom výsledný počet kameňov nie je deliteľný tromi.

J. Zhouf

B – I – 4

Označme V priesečník výšok a S stred kružnice opísanej trojuholníku ABC, ktorý nie je rovnostranný. Dokážte, že ak uhol pri vrchole C má $60°$, potom os uhla ACB je osou úsečky VS.

J. Zhouf

B – I – 5

V obore reálnych čísel vyriešte rovnicu

$$\frac{x}{x+4}=\frac{5\lfloor x\rfloor-7}{7\lfloor x\rfloor-5},$$

kde $\lfloor x \rfloor$ označuje najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako x (tzv. dolná celá časť reálneho čísla x).

J. Šimša

B – I – 6

Do kružnice k s polomerom r sú vpísané dve kružnice k_1, k_2 s polomerom $\frac{r}{2}$, ktoré sa vzájomne dotýkajú. Kružnica l sa zvonka dotýka kružníc k_1, k_2 a s kružnicou k má vnútorný dotyk. Kružnica m má vonkajší dotyk s kružnicami k_2 a l a vnútorný dotyk s kružnicou k. Vypočítajte polomery kružníc l a m.

L. Boček

Kategória C

C – I – 1

Nech a, b, c, d sú také reálne čísla, že $a + d = b + c$. Dokážte nerovnosť

$$(a-b)(c-d) + (a-c)(b-d) + (d-a)(b-c) \geq 0.$$

E. Kováč

C – I – 2

Zistite, pre ktoré prirodzené čísla $n \geq 2$ je možné z množiny $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ vybrať navzájom rôzne párne čísla tak, aby ich súčet bol deliteľný číslom n.

J. Zhouf

C – I – 3

V ľubovoľnom konvexnom štvoruholníku $ABCD$ označme E stred strany BC a F stred strany AD. Dokážte, že trojuholníky AED a BFC majú rovnaký obsah práve vtedy, keď sú strany AB a CD rovnobežné.

J. Šimša

C – I – 4

Tri štvormiestne čísla k, l, m majú rovnaký tvar $ABAB$, t.j. číslica na mieste jednotiek je rovnaká ako číslica na mieste stoviek a číslica na mieste desiatok je rovnaká ako číslica na mieste tisícok. Číslo l má číslicu na mieste jednotiek o 2 väčšiu a číslicu na mieste desiatok o 1 menšiu ako číslo k. Číslo m je súčtom čísel k a l a je deliteľné deviatimi. Určte všetky také čísla k.

T. Joska

C – I – 5

Určte počet všetkých trojíc dvojmiestnych prirodzených čísel a, b, c, ktorých súčin abc má zápis, v ktorom sú všetky číslice rovnaké. Trojice líšiace sa len poradím čísel považujeme za rovnaké, t.j. započítavame ich len raz.

J. Šimša

C – I – 6

V trojuholníku ABC so stranou BC dĺžky $2\,\text{cm}$ je bod K stredom strany AB. Body L a M rozdeľujú stranu AC na tri zhodné úsečky. Trojuholník KLM je rovnoramenný a pravouhlý. Určte dĺžky strán AB, AC všetkých takých trojuholníkov ABC.

P. Leischner