Metodicko-pedagogické centrum, Tomášikova 4, Bratislava

Združenie na podporu vzdelávania
EDUKÁCIA
CASIO

Ročník: 10
Číslo: 3
Šk. rok: 2004/2005

Matematický časopis pre žiakov základných a stredných škôl



Krása matematiky je v nachádzaní pravdy bez ťažkostí.

György Pólya

(Podrobnosti v čísle na s. 1)

Redakčná pošta

Veľmi nás mrzí, že sme pri hodnotení niektorých vašich riešení zistili, že ste odpisovali, a preto sme museli pristúpiť ku krajnému riešeniu, a to udeleniu 0 bodov pre oboch riešiteľov. Naša súťaž je súťažou jednotlivcov, a preto aj naďalej budú skupinové riešenia hodnotené rovnako. Vo vlastnom záujme preto riešte príklady samostatne.

Prof. Peller nás dodatočne poprosil o uverejnenie vyhlásenia:

Dozvedeli sme sa, že riaditelia niektorých stredných škôl dostali list s hlavičkou Ekonomickej univerzity, kde Katedra matematiky FHI EU upozorňuje na nízku kvalitu vzdelávania rôznych akadémií a inštitútov pri príprave na prijímacie skúšky na EU. Tento list je falzifikát a Katedra matematiky FHI EU takýto list nikdy nikomu neposlala. Taktiež podpis prof. Pellera je sfalšovaný. K obsahu listu sa pre nedostatok informácií katedra nevyjadruje.

Vaša redakcia

György Pólya – zaujatosť pre spôsob myslenia

Cesty riešenia

Koľko populárnych kníh o riešení matematických úloh poznáte? Svetoznámou, vydanou v 17 jazykoch v náklade viac než milión výtlačkov, je publikácia Pólya, G.: *How to solve it?* (Ako to riešiť?) Autor sa snaží ukázať logiku objavovania, postupnosť riešenia (vymedzenie a porozumenie problému, strategická analýza ciest riešenia, syntetická realizácia plánu, nájdenie riešenia a jeho overenie, kritické zhodnotenie s dôsledkami a možnosťami využitia). Pri hľadaní riešení netreba zabudnúť na podobné, zvláštne a analogické problémy, na rozloženie do čiastkových úloh. „*Výsledkom tvorivej práce matematika je dôkaz a ten sa objavuje na základe dôveryhodných úvah, s pomocou pravdepodobných domnienok... pre dômyselnosť a dôvtip musí byť v matematike miesto*."



Matematickým poznatkom netreba iba rozumieť a vedieť ich využívať, matematiku je potrebné aj dobre vyučovať. Oba tieto ciele vedel naplniť americký matematik maďarského pôvodu a vysokoškolský profesor **György Pólya (1887-1985)**. Uvedomil si princípy aktívneho štúdia: „*Radosť z objavu je najlepším podnetom pre ďalšiu prácu. Najlepšia cesta ako sa niečo naučiť, je objaviť to*." Dokázal, že pri štúdiu matematiky možno tieto zásady vhodne uplatniť. Spoznal, že matematika je vtedy zaujímavá, keď živí našu vynachádzavosť a zdatnosť usudzovania. Vyžadoval nezávislosť myslenia, tvorivý rozum, originálnosť, vynaliezavosť. Hovorieval: „*Učenie sa začína činnosťou a konaním, postupuje k slovám a predstavám a malo by sa končiť žiadanými algoritmami rozumového uvažovania.*" Učiteľom matematiky odkázal: *„Učte žiakov rozmýšľať*." Študentom naznačil a mnohých aj presvedčil: „*Krása matematiky je v nachádzaní pravdy bez ťažkostí*."

Zo života G. Pólyu

Narodil sa v Budapešti 13. decembra 1887. Už po skončení strednej školy, v ktorej často obsadzoval popredné umiestnenia v matematických súťažiach nadaných študentov, sa rozhodol pre profesiu matematika. „*Nepokladal som sa za dosť dobrého pre fyziku a bol som príliš dobrý pre filozofiu: Matematika bola uprostred*." Univerzitné štúdiá dokončil v Budapešti (1912). Počas vysokoškolského štúdia i po ňom (1912 – 1914) bol určitý čas na študijných pobytoch na univerzitách v Paríži, Viedni i v Göttingene. Zoznámil sa s významnými matematikmi a spoznal moderné smery v matematike. Viac ako 25 rokov pôsobil v Polytechnickej škole v Zürichu (1914 – 1940), kde sa stal vysokoškolským profesorom (1928). Usporadúval prednášky a kurzy na rôznych univerzitách v Európe i v Amerike. V roku 1940 odišiel natrvalo do USA. Tam pôsobil na Stanfordskej univerzite v Kalifornii až do odchodu na penziu (1953). Ešte ako 90-ročný aktívne pracoval so študentmi. Až do posled-

ných dní mal všestranné záujmy, vrodenú čulosť povahy, sympatickú láskavosť k ľuďom. Zomrel 7. septembra 1985 v Stanforde.

Veda i vyučovanie

Vedeckým záujmom G. Pólyu boli rôzne oblasti teoretickej a aplikovanej matematiky. Rozvinul kombinatorickú analýzu, dosiahol úspešné výsledky vo funkcionálnej analýze, matematickej štatistike i v teórii čísel. Ovplyvnil postavenie matematickej fyziky. Teoreticko-pravdepodobnostnými výsledkami a prácami z oblasti nerovností prispel k novým aplikáciám mnohých matematických disciplín. Za výsledky svojich matematických prác (napísal viac než 230 pojednaní) sa stal členom americkej akadémie vied v Bostone a Národnej akadémie vo Washingtone. Bol zahraničným členom akadémií v Maďarsku a vo Francúzsku. Z viacerých vedeckých ocenení spomeňme aspoň cenu „Za mimoriadne zásluhy v matematike“ (1963) Americkej matematickej spoločnosti.

Ovplyvnil mnohých svojich študentov a trvalo ich pripútal k štúdiu matematiky alebo jej vyučovaniu. Učiteľom vždy zdôrazňoval: „*Nechajte svojich študentov klásť otázky alebo sa pýtajte tak, ako sa oni môžu pýtať. Nechajte svojich študentov odpovedať alebo dávajte odpovede, ktoré oni môžu dávať. Vyhýbajte sa odpovediam na otázky, na ktoré sa nik nepýtal, ani vy sám... Vyučovanie má žiaka pripraviť pre objavy alebo vo väčšej miere dať niektoré predstavy o objavoch*.“ Mnohé pedagogicko-didaktické práce G. Pólyu sú ukážkami objavných postupov pri matematickom štúdiu. Človeku, ktorý chce matematickému poznaniu venovať čas a prácu, sa dá pomôcť. Možno stačí, ak uverí, že ovládať matematiku znamená tvorivo riešiť úlohy, robiť vlastné matematické objavy. „*Veľký objav rieši veľký problém, ale zrnko objavu je v každom probléme*.“ Pólyove heuristické metódy sú dodnes ukážkou možností, ktoré treba pri vyučovaní matematiky nasledovať a rozvíjať. *„Štúdium umenia riešiť úlohy je výchovou vôle*.“

Spôsob myslenia

György Pólya zvýrazňoval rozvíjanie hodnotiaceho myslenia, zovšeobecňovanie a činnosť s vierohodnými úvahami. Učil organizovať myslenie v postupnosti zmysluplných krokov na základe vlastnej myšlienkovej aktivity pri odhaleniach metód a s primeraným vnútorným záujmom na vyriešení problémov. Vedel vyhľadávať inšpiráciu vo vonkajšom svete, bol prístupný reálnym aplikáciám. Ako matematik je známy hlavne pre svoje pedagogické dielo a didakticko-matematické názory. Vedel jasne a hutne formulovať svoje myšlienky o heuristike a dôveryhodnom uvažovaní. Odhalil podstatné vzťahy medzi pozorovaním, hypotézami a ich overením. Dôveryhodnosť chápal ako druh kvalitatívnej pravdepodobnosti. Vynikal intelektuálnym zápalom pre matematickú kultúru, v ktorej vysoko oceňoval každé samostatné a tvorivé myslenie. Matematika bola pre neho jazykom, intelektuálnym cvičením i vedou. Didaktika matematiky musí hľadať odpovede na otázku čo a ako vyučovať, aké problémové úlohy riešiť.

Nie každý uznávaný matematik bol aj obľúbeným učiteľom alebo uznávaným didaktikom. György Pólya patril k tým učencom, ktorí účinnou metodológiou získavali jednoduchými prostriedkami nielen úžasné odborné výsledky v matematických disciplínach, ale aj pri šírení kultúry matematického spôsobu myslenia v školách. „*Matematika je veda, ktorá dáva najlepšiu príležitosť pozorovať proces myslenia a má tú prednosť, že pri jej pestovaní nadobúdame cvik v metóde rozumového uvažovania, ktorú potom môžeme používať pri štúdiu ktoréhokoľvek predmetu.*“

Dušan Jedinák

POLYNÓMY II.

3. Viètove vzťahy

Nech x_1, x_2 sú korene polynómu $P(x) = ax^2 + bx + c$ druhého stupňa. Potom $P(x)$ môžeme zapísať v tvare

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Roznásobením a porovnaním koeficientov pri zodpovedajúcich si mocninách dostávame

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Podobne dostávame pre polynóm $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tretieho stupňa a jeho korene x_1, x_2, x_3 nasledujúce vzťahy:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = \frac{c}{a},$$

$$x_1 x_2 x_3 = -\frac{d}{a}.$$

Uvažujme polynóm

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

pričom $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sú reálne čísla a $a_n \neq 0$. Nech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sú jeho (vo všeobecnosti komplexné) korene. Potom platia nasledujúce vzťahy:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_1 x_n + x_2 x_3 + \ldots + x_2 x_n + \ldots + x_{n-1} x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n},$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_1x_2x_n + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

$$\vdots$$

$$x_1x_2\ldots x_{n-1} + x_1x_2\ldots x_{n-2}x_n + \ldots + x_2x_3\ldots x_n = (-1)^{n-1}\frac{a_1}{a_n},$$

$$x_1x_2\ldots x_n = (-1)^n\frac{a_0}{a_n},$$

pričom v k-tej rovnici sčítavame cez všetky k-tice premenných $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Nazývame ich *Viètovými vzťahmi*.

Príklad 3.1. Ak sú koeficienty a, b, c, d polynómu $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ také celé čísla, že ad je nepárne a bc párne, tak aspoň jeden koreň tohto polynómu nie je racionálny. Dokážte.

Riešenie: Predpokladajme, že všetky korene x_1, x_2, x_3 daného polynómu sú racionálne čísla. Čísla $y_i = ax_i$ sú potom racionálne korene polynómu $y^3 + by^2 + acy + a^2d$. Každý racionálny koreň polynómu s celočíselnými koeficientmi, kde koeficient pri najvyššej mocnine je 1, je celé číslo. Preto čísla y_i sú celé a každé z nich delí absolútny člen a^2d, čo je nepárne číslo. Odtiaľ vyplýva, že čísla y_i sú nepárne, takže aj čísla

$$y_1 + y_2 + y_3 = -b,$$
$$y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1 = ac$$

sú nepárne. Teda aj abc je nepárne číslo, čo je v spore s predpokladom, že bc je párne číslo. □

Príklad 3.2. Pre korene polynómu $x^2 + ax + b$ platí, že ich súčet je $a + b$ a súčin ab. Nájdite koeficienty a, b.

Riešenie: Označme si korene tohto polynómu x_1, x_2. Potom zo zadania máme $x_1 + x_2 = a + b$, $x_1x_2 = ab$. Na základe Viètových vzťahov platí aj $x_1 + x_2 = -a$, $x_1x_2 = b$. Preto musí platiť $a + b = -a$ a $ab = b$. Riešením tejto sústavy dostávame buď $a = b = 0$ alebo $a = 1$ a $b = -2$. □

Príklad 3.3. Ak má polynóm $P(x) = x^3 + px + q$, kde $p, q \in \mathbf{R}$, $q \neq 0$, tri reálne korene, potom platí $p < 0$. Dokážte.

Riešenie: Z Viètových vzťahov máme

$$0 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2p.$$

Potom

$$p = -\frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right).$$

Keďže $q \neq 0$, je $x_1 x_2 x_3 \neq 0$, a teda $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 0$. Preto $p < 0$. □

Príklad 3.4. Riešte sústavu troch rovníc s troma neznámymi :

$$a + b + c = 2,$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = 26,$$
$$a^3 + b^3 + c^3 = 38.$$

Riešenie: Prvá rovnica nám napovedá, že riešenia tejto sústavy môžu mať niečo spoločné s koreňmi nejakej kubickej rovnice. Skúsme zistiť, čomu sa rovná $ab + bc + ca$ a abc. Platí

$$2(ab + bc + ca) = (a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2),$$

odkiaľ máme $ab + bc + ca = -11$.
Ďalej platí

$$a^3 + b^3 + c^3 - (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 3abc,$$

odkiaľ máme $abc = -12$.
Z toho dostávame, že hľadané a, b, c sú koreňmi kubickej rovnice

$$x^3 - 2x^2 - 11x + 12 = 0.$$

Na základe vety 5 zistíme, že táto rovnica má tri reálne korene $x_1 = 1$, $x_2 = -3$, $x_3 = 4$. Naša sústava má preto šesť rôznych riešení $(a; b; c)$, pričom platí $\{a; b; c\} = \{1; -3; 4\}$. □

Príklad 3.5. Dokážte, že ak sa súčet niektorých dvoch koreňov polynómu $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ rovná súčtu zvyšných dvoch, potom platí

$$a^3 - 4ab + 8c = 0.$$

Riešenie: Označme si korene polynómu P ako x_1, x_2, x_3, x_4 a predpokladajme, že platí $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$. Keďže platí

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4),$$

roznásobením prvých a druhých dvoch zátvoriek dostávame, že platí

$$P(x) = (x^2 + px + q)(x^2 + px + r),$$

kde

$$p = -(x_1 + x_2) = -(x_3 + x_4),$$
$$q = x_1 x_2,$$
$$r = x_3 x_4.$$

Roznásobením dostávame, že

$$P(x) = x^4 + 2px^3 + (p^2 + q + r)x^2 + p(q + r)x + qr.$$

Porovnaním koeficientov pri zodpovedajúcich si mocninách vo vyššie uvedených dvoch zápisoch polynómu *P* dostávame štyri rovnosti:

$$a = 2p,$$
$$b = p^2 + q + r,$$

$$c = p(q+r),$$
$$d = qr.$$

Potom pre hodnotu výrazu $a^3 - 4ab + 8c$ dostávame

$$a^3 - 4ab + 8c = (2p)^2 - 4.2p.\left(p^2 + q + r\right) + 8p(q+r) = 0,$$

čo sme chceli dokázať. □

Príklad 3.6. Nájdite všetky reálne čísla *a*, *b*, pre ktoré majú rovnice

$$x^3 + ax^2 + 18 = 0,$$
$$x^3 + bx + 12 = 0$$

v obore komplexných čísel práve dve spoločné riešenia a určte ich.

Riešenie: Označme si x_1, x_2, x_3 riešenia prvej rovnice a x_1, x_2, x_4 riešenia druhej rovnice. Riešenia týchto rovníc sú korene polynómov uvedených na ľavých stranách zadaných rovníc. Z Viètových vzťahov pre ne dostávame, že platí

(1) $-a = x_1 + x_2 + x_3$ (4) $0 = x_1 + x_2 + x_4$

(2) $0 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$ (5) $b = x_1x_2 + x_2x_4 + x_4x_1$

(3) $-18 = x_1x_2x_3$ (6) $-12 = x_1x_2x_4$

Z rovníc (1) a (4) dostávame

(7) $-a = x_3 - x_4.$

Z rovníc (3) a (6) dostávame

(8) $3x_4 = 2x_3.$

Z rovníc (7) a (8) dostávame, že platí

$$x_3 = -3a,$$
$$x_4 = -2a.$$

Úpravou rovnice (2) dostávame

$$x_1x_2 = -x_3(x_1 + x_2) = -x_3 \cdot (-x_4) = x_3x_4 = 6a^2,$$

teda

(9) $x_1x_2 = 6a^2$

Dosadením (9) do (3) dostávame

$$-18 = 6a^2 \cdot (-3a) = -18a^3,$$

odkiaľ

$$a^3 = 1.$$

Táto rovnica má jediné reálne riešenie $a = 1$. Potom

$$x_1x_2 = 6,\ x_3 = -3,\ x_4 = -2.$$

Z (4) máme

$$x_1 + x_2 = -x_4 = 2a = 2,$$

teda

$$x_1 + x_2 = 2.$$

Dosadením do (5) dostávame

$$b = x_1x_2 + x_4(x_1 + x_2) = 2.$$

Máme teda riešiť sústavu

$$x^3 + x^2 + 18 = 0,$$
$$x^3 + 2x + 12 = 0.$$

Prvá rovnica má celočíselné riešenie $x = -3$ a druhá $x = -2$. Vydelením príslušných polynómov na ľavých stranách koreňovými činiteľmi $x + 3$, resp. $x + 2$ dostávame, že platí

$$x^3 + x^2 + 18 = (x + 3)(x^2 - 2x + 6),$$
$$x^3 + 2x + 12 = (x + 2)(x^2 - 2x + 6).$$

Korene polynómu $x^2 - 2x + 6$ sú $x_1 = 1 + i\sqrt{5}$ a $x_2 = 1 - i\sqrt{5}$. Riešením je teda $a = 1$ a $b = 2$ a príslušné spoločné korene sú $x_1 = 1 + i\sqrt{5}$ a $x_2 = 1 - i\sqrt{5}$. □

Martin Hriňák

Ekonomická univerzita a matematika

(na naše otázky odpovedá prof. RNDr. Ing. František Peller, PhD.,
vedúci Katedry matematiky FHI EU)

Keďže našimi čitateľmi sú žiaci so záujmom o matematiku a ich učitelia, poprosili sme o krátky rozhovor o možnostiach uplatnenia takýchto študentov v ekonó-mii profesora Pellera, ktorý vedie Katedru matematiky FHI EU v Bratislave.

Pán profesor, ako podľa vás súvisí štúdium ekonómie a jej neskoršie uplatnenie s matematikou?

Matematika čoraz viac preniká do ekonomických disciplín. Svedčia o tom i výsledky tých najuznávanejších ekonomických kapacít. Zreteľne je to vidieť na výbere nositeľov tzv. Nobelovej ceny za ekonómiu. Sú to buď ekonómovia, ktorí aplikujú matematiku, alebo matematici, ktorí sa zaoberajú ekonomickou problematikou. Seriózne ekonomické knihy (napr. Samuelson) obsahujú kvantifikáciu ekonomických vzťahov, teda aplikujú matematiku.

Aké možnosti sa otvárajú na ekonomickej univerzite pre študentov s hlbším záujmom o matematiku?

Ekonomická univerzita má 6 fakúlt a na všetkých sa matematika využíva a vyučuje v dvoch základných kurzoch. Na fakulte hospodárskej informatiky je špecializované štúdium kvantitatívnych metód v ekonómii a podnikaní v rámci študijných programov:

- aplikovaná štatistika,
- aktuárstvo (poistná matematika),
- operačný výskum a ekonometria.

V rámci týchto odborov je rozšírená výučba matematiky a možnosť uplatnenia matematického talentu. Títo študenti získajú aj aplikačné schopnosti, preto ich napríklad aj v zahraničí berú „všetkými desiatimi“.

Ako sa najlepšie pripraviť na prijímacie skúšky z matematiky a kde možno získať podrobnejšie informácie, prípadne pomoc?

Predovšetkým si treba dobre zopakovať učivo z matematiky, ktorá je na našich stredných školách na veľmi dobrej úrovni. O rozsahu a náročnosti úloh na prijímacích skúškach podrobne informuje knižka „Matematika – krok za krokom na Ekonomickú univerzitu“. Je to zbierka riešených i neriešených úloh a možno ju dostať priamo u nás na Dolnozemskej ceste v Bratislave. Pre záujemcov prebiehajú i prípravné kurzy, o ktorých sa dá informovať na našej internetovej stránke alebo priamo na katedre matematiky.

Ďakujem za rozhovor a cenné informácie pre našich čitateľov.

(*S prof. Pellerom sa zhováral Milan Maxian*)

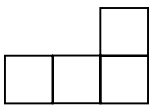
Riešenia súťažných úloh 2. série

1. V triede je 33 žiakov. Súčet ich vekov je 430 rokov. Dokážte, že v triede existuje 20 žiakov, ktorých súčet vekov je viac ako 260 rokov.

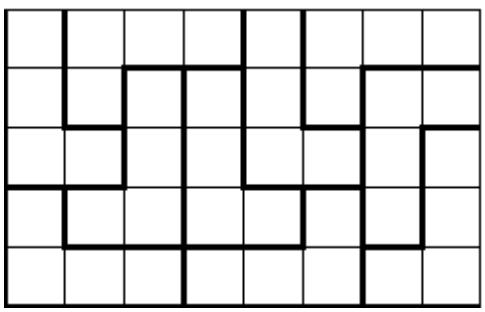
Riešenie: Zoraďme si žiakov od najmladšieho po najstaršieho. Uvažujme skupinu 20 najstarších žiakov. Predpokladajme, že súčet ich vekov je maximálne 260 rokov. Potom najmladší z nich má maximálne 13 rokov (ak by mal viac ako 13 rokov, tak aj ostatní budú mať vek väčší ako 13 rokov, a teda súčet ich vekov by bol viac ako 260). Preto zvyšných 13 žiakov musí mať vek maximálne 13 rokov. Potom ale súčet vekov všetkých žiakov v triede je maximálne $260 + 13.13 = 429$ rokov, čo je spor so zadaním úlohy. Preto v triede musí existovať 20 žiakov, ktorých súčet vekov je viac ako 260 rokov.

Komentár a bodovanie: Častou chybou vo vašich riešeniach bolo to, že ste uvažovali, že žiaci môžu mať len celočíselný vek alebo, že žiaci majú v triede približne rovnaký počet rokov. Tieto predpoklady nie sú spomenuté v zadaní, preto ich nemôžete využívať. Strácali ste za ne 1 až 2 body. Ďalšou chybou bolo, že ste povedali, že všetci žiaci majú priemerný vek, a preto tvrdenie platí. Za takéto riešenia ste mohli získať maximálne 2 body, pretože v triede nemusí mať nikto priemerný vek.

2. Zistite, či sa dá obdĺžnik s rozmermi 5×8 bezo zvyšku rozdeliť na niekoľko častí tvaru „L“:

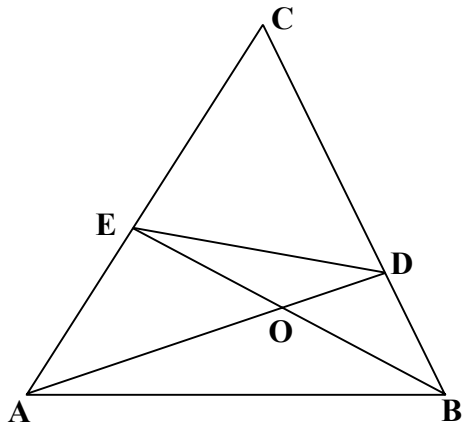


Riešenie: Jedno z možných riešení je na obrázku:



3. V trojuholníku ABC bod D delí stranu BC v pomere $|BD|:|BC|=1:3$ a bod O úsečku AD v pomere $|AO|:|OD|=5:2$. V akom pomere delí priamka BO úsečku AC?

Riešenie: V riešení využijeme to, že ak dva trojuholníky majú rovnakú výšku na jednu stranu, tak potom sa pomer dĺžok zodpovedajúcich si strán, na ktoré túto výšku uvažujeme, rovná pomeru obsahov týchto dvoch trojuholníkov. Označme prienik priamky BO a úsečky AC ako E. Keďže platí $|BD|:|BC|=1:3$, tak platí $|BD|:|CD|=1:2$. Potom pre pomer obsahov trojuholníkov BDE a CDE platí



$$S_{\Delta CDE}=2\cdot S_{\Delta BDE}.$$

Keďže $|AO|:|OD|=5:2$, tak pre pomer obsahov trojuholníkov ABO a BDO, resp. AOE a DOE platí

$$S_{\Delta ABO}:S_{\Delta BDO}=5:2,$$
$$S_{\Delta AOE}:S_{\Delta DOE}=5:2.$$

Potom pre pomer obsahov trojuholníkov ABE a BDE platí

$$\frac{S_{\Delta ABE}}{S_{\Delta BDE}}=\frac{S_{\Delta ABO}+S_{\Delta AOE}}{S_{\Delta BDO}+S_{\Delta ODE}}=\frac{\frac{5}{2}\cdot S_{\Delta BDO}+\frac{5}{2}\cdot S_{\Delta ODE}}{S_{\Delta BDO}+S_{\Delta ODE}}=\frac{5}{2}.$$

Nakoniec dostávame, že platí

$$\frac{S_{\Delta ABE}}{S_{\Delta BCE}}=\frac{S_{\Delta ABE}}{S_{\Delta BDE}+S_{\Delta CDE}}=\frac{S_{\Delta ABE}}{S_{\Delta BDE}+2\cdot S_{\Delta BDE}}=\frac{\frac{5}{2}\cdot S_{\Delta BDE}}{3\cdot S_{\Delta BDE}}=\frac{5}{6}.$$

Keďže pomer obsahov trojuholníkov ABE a BCE je $5:6$, aj pomer $|AE|:|CE|$ sa rovná $5:6$.

Komentár a bodovanie: Celkovo ste našli štyri principiálne odlišné riešenia. Jedno využívalo podobnosť, druhé Cèvovu vetu, tretie vlastnosti ťažiska a štvrté vzťahy medzi obsahmi trojuholníkov. Vyskytli sa aj konštrukčné riešenia, kde ste rysovali nejaké konkrétne prípady trojuholníka ABC. Avšak ak aj vyjde pravdivosť tvrdenia hoc aj pre 10 rôznych možností, stále to neznamená, že tvrdenie platí všeobecne (nehľadiac na nepresnosť rysovania...). Za takéto riešenia ste mohli získať maximálne 2 body podľa počtu prebraných trojuholníkov a príslušných úvah. Častou chybou v riešeniach bolo to, že ak ste mali uvedené, že úsečky sa delia v pomere $|BD|:|BC|=1:3$ a $|AO|:|OD|=5:2$, tak dĺžky príslušných úsečiek ste uvažovali 1, 3, 2 a 5, čo nie je správne, pretože my nepoznáme ich vzájomný vzťah – rovnako tie úsečky mohli mať aj veľkosti 1, 3, 4, 10.

4. Do nasledujúcej rovnice vložte zátvorky tak, aby ste dostali pravdivý výrok:

$$1-2\cdot 3+4+5\cdot 6\cdot 7+8\cdot 9+10=2005.$$

Riešenie: Riešením je napríklad $(1-2)\cdot 3+(4+5\cdot 6\cdot 7+8)\cdot 9+10=2005$.

Komentár a bodovanie: Keďže v zadaní úlohy sme od vás nežiadali, aby ste našli všetky riešenia, stačilo nájsť toto jedno. Avšak bolo potrebné aj ukázať, že toto riešenie vyhovuje, teda vypočítať hodnotu výrazu na ľavej strane. Ak ste tak neurobili, mohli ste stratiť 2 body.

5. Riešte rovnicu $|x-1|+|y|=2$ v reálnych číslach.

Riešenie: Keďže ide o rovnicu s absolútnou hodnotou, najprv ju odstránime a potom rovnicu vyriešime. Rozoberieme štyri prípady:

a) $x \geq 1,\ y \geq 0$. Rovnicu môžeme upraviť na tvar $y = -x+3$. Aby platila podmienka $x \geq 1,\ y \geq 0$, dostávame, že $x \in \langle 1,3 \rangle$.

b) $x < 1,\ y \geq 0$. Rovnicu môžeme upraviť na tvar $y = x+1$. Aby platila podmienka $x < 1,\ y \geq 0$, dostávame, že $x \in \langle -1,1)$.

c) $x \geq 1,\ y < 0$. Rovnicu môžeme upraviť na tvar $y = x-3$. Aby platila podmienka $x \geq 1,\ y < 0$, dostávame, že $x \in \langle 1,3)$.

d) $x < 1,\ y < 0$. Rovnicu môžeme upraviť na tvar $y = -x-1$. Aby platila podmienka $x < 1,\ y < 0$, dostávame, že $x \in (-1,1)$.

Ak si nakreslíme graf tejto rovnice, zistíme, že je to štvorec (jeho strany) s vrcholmi v bodoch $[-1,0]$, $[1,2]$, $[3,0]$ a $[1,-2]$.

Komentár a bodovanie: Časté boli problémy s odstraňovaním absolútnej hodnoty... Niektorí z vás prehlásili, že táto úloha má 4 riešenia. To však nie je pravda, lebo úloha má nekonečne veľa riešení.

6. Nech a, b, c sú stranami trojuholníka. Dokážte, že platí nerovnosť

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c} \geq 3 .$$

Riešenie: Odčítaním 3 od oboch strán nerovnosti a úpravou na spoločného menovateľa dostávame, že platí

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}-3 =$$
$$= \frac{4\left[(a+b-c)(a-b)^2+(c+a-b)(c-a)^2+(b+c-a)(b-c)^2\right]}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)} \geq 0 ,$$

pretože z trojuholníkovej nerovnosti vyplýva, že $a+b-c$, $b+c-a$ a $c+a-b$ sú kladné čísla. Zároveň vidíme, že rovnosť nastáva len ak $a=b=c$, teda keď je trojuholník rovnostranný.

Komentár a bodovanie: Body ste strácali hlavne za to, že ste robili rôzne úpravy nerovnosti bez toho, aby ste sa zmienili o tom, či sú ekvivalentné alebo nie. Niektorí zase zabudli na to, že pri dôkaze sa má vychádzať zo známych tvrdení a na ich zákla-

de treba dokázať dokazované tvrdenie a nie naopak. Našlo sa aj niekoľko riešení, ktoré dokazovali resp. vyvracali nerovnosť na konkrétnych príkladoch. Za tieto riešenia ste samozrejme veľa bodov získať nemohli, pretože tvrdenie platí, a teda sa nedá konkrétnym príkladom vyvrátiť, a samozrejme ani dokázať.

7. Do nasledujúcej rovnice vložte zátvorky tak, aby ste dostali pravdivý výrok:

$$1-2\cdot 3+4+5\cdot 6\cdot 7+8\cdot 9+10=2005.$$

Riešenie, komentár a bodovanie: Pozri príklad 4.

8. Nájdite aspoň jeden polynóm s racionálnymi koeficientmi s čo najmenším stupňom, ktorého koreňom je číslo $\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}$.

Riešenie: Nech $x-\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}=0$, teda $\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}$ je koreňom polynómu

$$P_1(x)=x-\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}.$$

Úpravou dostávame, že $\left(x-\sqrt{2}\right)^3=-\left(\sqrt[3]{3}\right)^3$. Roznásobením a preskupením členov dostávame

$$x^3+6x+3=\left(3x^2+2\right)\sqrt{2}.$$

Umocnením tejto rovnice na druhú dostávame, že

$$x^6-6x^4+6x^3+12x^2+36x+1=0,$$

a teda hľadaný polynóm je

$$P(x)=x^6-6x^4+6x^3+12x^2+36x+1.$$

Už len treba dokázať, že má minimálny stupeň, teda že žiaden polynóm s racionálnymi koeficientmi maximálne piateho stupňa nemá koreň $\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}$. Dokážeme to sporom. Predpokladajme, že taký polynóm existuje. Potom sa dá bez ujmy na všeobecnosti zapísať v tvare $Q(x)=x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$, kde $a_4,a_3,a_2,a_1,a_0\in\mathbf{Q}$. Keďže jeho koreňom je číslo $\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}$, platí

$$Q\left(\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}\right)=\left(\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}\right)^5+\ldots+a_1\left(\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}\right)+a_0=0.$$

Roznásobením dostávame rovnicu

$$0=\sqrt{2}f_{\sqrt{2}}(a_4,a_3,a_2,a_1,a_0)+\sqrt[3]{3}f_{\sqrt[3]{3}}(a_4,a_3,a_2,a_1,a_0)+\sqrt[3]{9}f_{\sqrt[3]{9}}(a_4,a_3,a_2,a_1,a_0)+$$
$$+\sqrt{2}\sqrt[3]{3}f_{\sqrt{2}\sqrt[3]{3}}(a_4,a_3,a_2,a_1,a_0)+\sqrt{2}\sqrt[3]{9}f_{\sqrt{2}\sqrt[3]{9}}(a_4,a_3,a_2,a_1,a_0)+f_1(a_4,a_3,a_2,a_1,a_0),$$

pričom $f_{\sqrt{2}},f_{\sqrt[3]{3}},f_{\sqrt[3]{9}},f_{\sqrt{2}\sqrt[3]{3}},f_{\sqrt{2}\sqrt[3]{9}},f_1$ sú lineárne funkcie premenných a_4,a_3,a_2,a_1,a_0 s racionálnymi koeficientmi, teda nadobúdajú len racionálne hodnoty. Aby uvedená rovnosť platila, musia sa všetky koeficienty $f_{\sqrt{2}},f_{\sqrt[3]{3}},f_{\sqrt[3]{9}},f_{\sqrt{2}\sqrt[3]{3}},f_{\sqrt{2}\sqrt[3]{9}},f_1$ rovnať 0. Dostávame tak sústavu 6 lineárnych rovníc s piatimi neznámymi, ktorá nemá nenulové racionálne riešenie. To je v spore s predpokladom, že takéto koeficienty existujú. Preto je nami nájdený polynóm šiesteho stupňa hľadaným polynómom (až na násobenie nenulovou konštantou).

Komentár a bodovanie: Vzhľadom na to, že hlavnou časťou úlohy bolo nájsť tento polynóm, za korektný dôkaz minimality jeho stupňa ste mohli získať 1 bod. Ak ste vo svojich riešeniach dospeli k veľmi dlhým a neprehľadným výrazom a povedali ste len, že ich roznásobením dostanete to, čo ste chceli, strácali ste 1 bod.

9. Dokážte, že existuje nekonečne veľa štvoríc prirodzených čísel x, y, z, u takých, že $x<y<z<u$ a platí $\binom{x}{2}+\binom{y}{2}+\binom{z}{2}=\binom{u}{2}$.

Riešenie: Zvoľme si $x=2$, $y=n>2$, $z=\frac{n(n-1)}{2}+1$ a $z=\frac{n(n-1)}{2}+2$. Potrebujeme ukázať, že platí $x<y<z<u$ a $\binom{x}{2}+\binom{y}{2}+\binom{z}{2}=\binom{u}{2}$. Zrejme $x<y$ a $z<u$. Ukážeme, že aj $y<z$. Keďže $n>2$, tak $\frac{n}{2}>1$ a $n-1>0$. Potom $\frac{n(n-1)}{2}>n-1$. Pričítaním 1 k obom stranám tejto nerovnosti dostávame požadované $y<z$. Skúmajme teraz hodnotu $\binom{x}{2}+\binom{y}{2}+\binom{z}{2}$:

$$\binom{x}{2}+\binom{y}{2}+\binom{z}{2}=\binom{2}{2}+\binom{n}{2}+\binom{\frac{1}{2}n(n-1)+1}{2}=1+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{\left(\frac{1}{2}n(n-1)+1\right)\left(\frac{1}{2}n(n-1)\right)}{2}=$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}n(n-1)+1\right)\cdot 2}{2}+\frac{\left(\frac{1}{2}n(n-1)+1\right)\left(\frac{1}{2}n(n-1)\right)}{2}=\frac{\left(\frac{1}{2}n(n-1)+1\right)\left(\frac{1}{2}n(n-1)+2\right)}{2}=$$

$$=\binom{\frac{1}{2}n(n-1)+2}{2}=\binom{z}{2}.$$

Ak teraz budeme za n voliť prirodzené čísla väčšie ako 2, dostaneme vždy inú štvoricu (budú sa líšiť minimálne napríklad v hodnote y), a teda dostávame nekonečne veľa riešení danej rovnice.

Komentár a bodovanie: Niektorí z vás zabudli overiť, či sú dané štvorice rôzne, resp. či uvedené čísla spĺňajú nerovnosť zo zadania. Za takéto chyby ste strácali 1 až 2 body.

10. Riešte rovnicu $\sqrt[8]{x+1}+\sqrt[8]{x-1}=\sqrt[8]{2}$.

Riešenie: Keďže funkcia $y=\sqrt[8]{x+1}$ aj funkcia $y=\sqrt[8]{x-1}$ sú rastúce funkcie, aj ich súčet $f(x)=\sqrt[8]{x+1}+\sqrt[8]{x-1}$ je rastúca funkcia. To znamená, že každú hodnotu z ich oboru hodnôt nadobúda práve raz. To znamená, že rovnica v zadaní má maximálne jedno riešenie. Keďže $f(1)=\sqrt[8]{2}$, tak týmto jediným riešením je $x=1$.

11. Dokážte, že platí $\cos\frac{\pi}{9}-\cos\frac{2\pi}{9}-\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$.

Riešenie: Vieme, že platí $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$. Potom

$$1-2\cos\frac{\pi}{3}=0.$$

Vynásobením nenulovým číslom $\cos\frac{\pi}{9}$ dostávame

$$\left(1-2\cos\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{9}=0.$$

Upravením tejto rovnosti dostávame

$$\cos\frac{\pi}{9}-2\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{9}=0.$$

Vieme, že platí

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.$$

Ak zvolíme $x=\frac{4\pi}{9}$ a $y=\frac{2\pi}{9}$, dostaneme

$$\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{2\pi}{9}=2\cos\frac{3\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}.$$

Dosadením do predchádzajúcej rovnice dostávame

$$\cos\frac{\pi}{9}-\cos\frac{4\pi}{9}-\cos\frac{2\pi}{9}=0.$$

Sčítaním tejto rovnice a rovnice $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ dostávame požadované tvrdenie.

Komentár a bodovanie: Za opačný smer dôkazu ste strácali 2 body.

12. Nech $n>1$ je prirodzené číslo. Dokážte, že platí nasledujúca nerovnosť

$$n\left(\sqrt[n]{n+1}-1\right)<1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}<n-(n-1)n^{-\frac{1}{n-1}}.$$

Riešenie: Z AG nerovnosti pre čísla $1+1$, $1+\frac{1}{2}$, …, $1+\frac{1}{n}$ dostávame, že

$$\frac{n+1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{n}=\frac{(1+1)+\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n}=\frac{2+\frac{3}{2}+\ldots+\frac{n+1}{n}}{n}\geq$$

$$\geq\sqrt[n]{2\cdot\frac{3}{2}\cdot\ldots\frac{n+1}{n}}=\sqrt[n]{n+1}.$$

Keďže $n>1$ a $2\neq\frac{3}{2}$, nastáva v tejto nerovnosti ostrá nerovnosť. Preto

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}>n\left(\sqrt[n]{n+1}-1\right),$$

čo sme chceli dokázať. Zvoľme si teraz $n=2$. Potom

$$1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\quad\text{a}\quad 2-(2-1)2^{-\frac{1}{2-1}}=\frac{3}{2},$$

a teda druhá nerovnosť neplatí. Avšak neostrú nerovnosť dokázať vieme.

Uvažujme AG nerovnosť pre $n-1$ čísel $1-\frac{1}{2}$, …, $1-\frac{1}{n}$:

$$\frac{n-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}{n-1}=\frac{(1-1)+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\ldots+\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n-1}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\ldots+\frac{n-1}{n}}{n-1}\geq$$

$$\geq\sqrt[n-1]{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\ldots\frac{n-1}{n}}=\sqrt[n-1]{\frac{1}{n}}=n^{-\frac{1}{n-1}},$$

odkiaľ dostávame

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\leq n-(n-1)n^{-\frac{1}{n-1}}.$$

Komentár a bodovanie: To, že druhá nerovnosť neplatí pre $n=2$ si všimol len jeden riešiteľ. Ostatní ste za tento prípad strácali 1 bod. Vyskytlo sa aj riešenie, ktoré využívalo grafy troch funkcií, medzi ktorými sme dokazovali nerovnosti. Ak však chcete za takéto riešenie body získať, je potrebné aj odhadnúť chybu, ktorú počítač robí. Ak máte tri body veľmi blízko seba, ťažko sa vám „od oka“ porovnávajú – napríklad v prípade $n=2$ toto počítačové riešenie neukázalo, že by tvrdenie platiť nemalo...

13. Nech f je polynóm. Ak je $f\left(x^n\right)$ deliteľný polynómom $x-1$, potom je deliteľný aj polynómom x^n-1. Dokážte.

Riešenie: Keďže je $f\left(x^n\right)$ deliteľný polynómom $x-1$, je 1 jeho koreňom, a teda platí $f(1)=0$. To ale znamená, že $x-1$ delí $f(x)$. Dosadením x^n miesto x dostávame, že x^n-1 delí $f\left(x^n\right)$, čo sme chceli dokázať.

Komentár a bodovanie: Niektoré riešenia pozostávali z toho, že ste si zapísali polynóm f vo všeobecnom tvare a delili ste ho polynómom x^n-1. Vzhľadom na to, že výsledok delenia nie je triviálny, bolo treba aj trochu popísať toto delenie.

14. Dokážte, že nevyhnutnou a postačujúcou podmienkou na to, aby bol polynóm $f(x)=a_0x^n+\ldots+a_n$ deliteľný polynómom $(x-1)^{k+1}$, je splnenie týchto podmienok:

$$\begin{aligned} a_0+a_1+\ a_2+\ldots+\ \ a_n&=0,\\ a_1+2a_2+\ldots+\ na_n&=0,\\ a_1+4a_2+\ldots+\ n^2a_n&=0,\\ \vdots\qquad\qquad&\quad\vdots\\ a_1+2^ka_2+\ldots+n^ka_n&=0. \end{aligned}$$

Riešenie: Polynóm f je deliteľný $(x-1)^{k+1}$ práve vtedy, keď

$$f(1)=a_0+\ldots+a_n=0$$

a $(x-1)^k$ je koreňom derivácie f. Pritom pri splnení podmienky $f(1)=0$ je nevyhnutné a dostačujúce, aby polynóm

$$f_1(x)=nf(x)-xf'(x)$$

bol deliteľný $(x-1)^k$. Na základe tohto pomocného tvrdenia dostávame z rovnice $f(1)=0$ prvú rovnicu, ktorú máme dokázať (a zároveň dostávame pravdivosť obráteného tvrdenia pre $k=1$). Označme

$$f_0(x)=f(x)$$

a

$$f_{l+1}(x)=nf_l(x)-xf_l'(x).$$

Potom z podmienky $f_1(1)=0$ dostaneme druhú rovnicu zo zadania. Predpokladajme, že už máme dokázané všetky rovnice až po m-tú, $m<k$. Znamená to, že

$$f_m(x)=a_1x^{n-1}+2^ma_2x^{n-2}+\ldots+n^ma_n.$$

Ďalej platí

$$f_{m+1}(x)=nf_m(x)-xf_m'(x).$$

Potom

$$\begin{aligned} f_{m+1}(x)&=n\left(a_1x^{n-1}+2^ma_2x^{n-2}+\ldots+n^ma_n\right)-\\ &-(n-1)a_1x^{n-1}-2^m(n-2)a_2x^{n-2}-\ldots-1(n-1)^ma_{n-1}x=\\ &=a_1x^{n-1}+\left(2^mn-2^mn+2^{m+1}\right)a_2x^{n-2}+\ldots+nn^ma_n=\\ &=a_1x^{n-1}+2^{m+1}a_2x^{n-2}+\ldots+n^{m+1}a_n. \end{aligned}$$

Teraz využijeme to, že 1 je koreňom f_{m+1}, teda $f_{m+1}(1)=0$. Znamená to, že

$$a_1+2^{m+1}a_2+\ldots+n^{m+1}a_n=0.$$

Zároveň ak platí

$$a_1+2^{m+1}a_2+\ldots+n^{m+1}a_n=0,$$

tak 1 je koreňom f_{m+1} a teda dostávame aj platnosť obráteného tvrdenia.

Ešte sa vrátime k dôkazu pomocného tvrdenia. Ak je polynóm f deliteľný $(x-1)^{k+1}$ a $k+1$ je najvyššia mocnina $x-1$, ktorou je deliteľný, tak sa dá zapísať v tvare

$$f(x) = g(x).(x-1)^{k+1},$$

kde g je polynóm, ktorý nie je deliteľný $x-1$, teda $g(1) \neq 0$. Potom

$$f_1(x) = nf(x) - xf'(x) = ng(x)(x-1)^{k+1} - x\left[g'(x)(x-1)^{k+1} + (k+1)g(x)(x-1)^k\right]$$

$$f_1(x) = (x-1)^{k+1}\left((ng(x) - xg'(x))(x-1) - x(k+1)g(x)\right).$$

Vidíme, že polynóm

$$f_1(x) = nf(x) - xf'(x)$$

je deliteľný $(x-1)^k$ a nie deliteľný $(x-1)^{k+1}$, pretože

$$(ng(1) - 1g'(1))(1-1) - 1(k+1)g(1) = -(k+1)g(1) \neq 0$$

z predpokladu. Obrátene, nech je polynóm

$$f_1(x) = nf(x) - xf'(x)$$

deliteľný $(x-1)^k$ a $f(1) = 0$. Potom

$$xf'(x) = nf(x) - f_1(x),$$

a teda

$$f'(1) = nf(1) - f_1(1) = 0.$$

Keďže 1 je koreňom polynómu f a aj jeho derivácie, je dvojnásobným koreňom polynómu f. Derivovaním oboch strán rovnice $xf'(x) = nf(x) - f_1(x)$ podľa x dostávame, že

$$xf''(x) = nf'(x) - f_1'(x) - f'(x).$$

Dosadením $x = 1$ zistíme, že 1 je koreňom druhej derivácie f, a teda 1 je trojnásobným koreňom f. Tento postup opakujeme k-krát a nakoniec dostaneme, že 1 je $(k+1)$-násobným koreňom f, čo sme chceli ukázať.

Komentár a bodovanie: Za dôkaz nevyhnutnej podmienky ste mohli získať 3 body, za dôkaz postačujúcej 2 body. Našlo sa aj riešenie, v ktorom boli ukázané iné podmienky. Keďže však zadanie žiadalo dôkaz týchto podmienok, udelené boli 2 body.

Vysvetlivky k výsledkovým listinám: M znamená meškanie, skratky škôl sú takéto:
Gymnázium Bratislava, Hubeného ul. – G Hu BA, Gymnázium H. Selyeho Komárno – G HS KO, Gymnázium Hlohovec – G HC, Gymnázium J. G. Tajovského Banská Bystrica – G JGT BB, Gymnázium J. Hronca Bratislava – G JH BA, Gymnázium Košice, Alejová – G Al KE, Gymnázium Ľ. J. Šuleka Komárno – G ĽJŠ KO, Gymnázium M. M. Hodžu Liptovský Mikuláš – G MMH LM, Gymnázium Poprad, Dominika Tatarku – G DT PP, Gymnázium Z. Kodálya Galanta – G ZK GA, Obchodná akadémia Šurany, nám. Hrdinov – OA ŠU, Základná škola Svit, Mieru – ZŠ ST, Základná škola Trenčín, Kubraňská cesta – ZŠ Ku TN, EG Tisovec – EG TI, 5. základná škola Trenčín, Dlhé hony – ZŠ DH TN, Gymnázium Košice, Poštová – G Po KE, Gymnázium A. Vrábla Levice – G AV LV, Gymnázium Nitra, Párovská – G Pá NR, Gymnázium Nové Zámky – G NZ, Gymnázium Púchov – G PU.

Výsledkové listiny po 2. sérii

Kategória Z

Por.	Meno	Škola	Ročník	PS	1	2	3	4	M	Spolu
1.	Herencsár Albert	G ZK GA	4	19	2	5	5	3		34
2.	Marák Károly	G NZ	7	19	0	5	3	5		32
3.	Baxová Katarína	ZŠ DH TN	9	19	1	5	4	3	1	31
4.	Hornyák Zsolt	G NZ	7	16	1	5	1	5		28
5.	Flimmel Samuel	G PU	8	19	-	-	-	-		19
5.	Lopatová Dominika	ZŠ ST	8	19	0	0	0	0		19
5.	Žársky Mário	G PU	8	19	-	-	-	-		19
8.	Klimčíková Iveta	ZŠ Ku TN	9	8	1	5	1	0		15
8.	Lopata Ján	ZŠ ST	7	15	0	0	0	0		15
10.	Cenigová Mária	G PU	8	14	-	-	-	-		14
10.	Ivančáková Andrea	ZŠ ST	7	4	0	5	-	5		14
12.	Rácová Kristína	ZŠ ST	7	3	0	5	-	5		13
13.	Balaj Marek	ZŠ Ku TN		7	2	0	1	-		10
13.	Ľupták Filip	ZŠ DT		0	2	5	-	3		10
15.	Rakytová Jana	ZŠ ST	7	9	-	-	-	-		9
16.	Marhefková Ivana	ZŠ ST	7	8	-	-	-	-		8
16.	Omastová Jana	ZŠ ST	7	8	-	-	-	-		8
18.	Štiberová Dušana	ZŠ ST	7	4	-	-	-	-		4
19.	Homzová Monika	ZŠ ST	7	1	-	-	-	-		1
20.	Mišerinská Petra	ZŠ ST	7	0	-	-	-	-		0

Kategória C

Por.	Meno	Škola	PS	3	4	5	6	M	Spolu
1.	Boža Vladimír	G DT PP	19	5	5	5	0		34
2.	Tureková Katarína	G JGT BB	10	5	5	5	4		29
3.	Juríková Katarína	G JGT BB	13	5	5	4	-		27
3.	Pipíšková Petra	G ĽJŠ KO	12	4	5	5	1		27
3.	Vrbovská Mária	G JGT BB	13	4	5	4	1		27
6.	Korcsok Peter	G ŠA	15	0	5	4	2		26
7.	Kobza Vladimír	G JGT BB	11	2	5	1	1		20
7.	Živčáková Andrea	G JGT BB	11	1	4	4	0		20
9.	Majláth Martin	G JGT BB	17	-	-	1	0		18
10.	Zubnárová Katarína	G JGT BB	12	0	5	1	1	1	18
11.	Šiagi Miroslav	G JGT BB	8	-	5	4	-		17
12.	Kolesíková Mária	G JGT BB	8	-	5	2	1		16
12.	Perešíni Ondrej	G JGT BB	9	1	5	1	-		16
14.	Zajacová Katarína	G AI KE	8	0	5	2	-	1	14
15.	Slovík Lukáš	G JGT BB	7	-	5	0	1		13
16.	Bedecs Ladislav	G HS KO	12	-	-	-	-		12
17.	Vágó Ádám	G HS KO	11	-	-	-	-		11
18.	Schoberová Lucia	EG TI	10	-	-	-	-		10
19.	Dobrotka Tomáš	G JGT BB	0	-	5	4	-		9

Kategória B

Por.	Meno	Škola	PS	5	6	7	8	Spolu
1.	Derňár Marek	G Al KE	19	4	5	5	4	37
2.	Blicha Martin	G Al KE	17	5	5	5	-	32
3.	Holecyová Mária	G Pá NR	14	4	-	4	-	22
4.	Páldy Alexander	G ZK GA	5	5	5	3	3	21
5.	Ficzová Monika	OA ŠU	7	4	0	5	-	16
6.	Kanta Marcel	G Hu BA	8	-	-	-	-	8
7.	Beštáková Dominika	G HC	5	-	-	-	-	5
8.	Dzurechová Zuzana	G HC	4	-	-	-	-	4
9.	Minárová Silvia	G HC	3	-	-	-	-	3
10.	Odrobináková Diana	G ĽJŠ KO	2	-	-	-	-	2
11.	Borisová Lucia	G HC	0	-	-	-	-	0
11.	Borská Daniela		0	-	-	-	-	0
11.	Bruncko Juraj		0	-	-	-	-	0
11.	Katuščák Slavomír		0	-	-	-	-	0
11.	Novomeská Zuzana		0	-	-	-	-	0
11.	Trúchly Juraj		0	-	-	-	-	0

Kategória A

Por.	Meno	Škola	Ročník	PS	7	8	9	10	Spolu
1.	Takács Michal	G JGT BB	3	20	5	4	5	5	39
2.	Perešíni Peter	G JGT BB	3	20	5	3	4	5	37
2.	Škrovinová Katarína	G Pá NR	7	20	5	3	4	5	37
4.	Veselovská Lenka	G MMH LM	7	20	5	1	2	5	33
5.	Pôbišová Zuzana	G JGT BB	3	15	5	4	3	4	31
6.	Bertová Slávka	G Al KE	7	20	-	-	0	5	25
7.	Kacz Krisztián	G HS KO	3	18	3	-	-	-	21
8.	Szűcs Gábor	G HS KO	3	12	5	-	1	1	19
9.	Kusora Ladislav	G HS KO	3	11	5	-	-	1	17
10.	Gál Dárius	G Po KE	3	13	-	-	-	-	13
11.	Kóša Peter	G JH BA	3	10	-	-	-	-	10
12.	Mikula Ján			4	5	-	0	-	9
13.	Selečéniová Ivana	G JGT BB	3	7	-	-	-	-	7
14.	Virgová Daniela	G AV LV	3	6	-	-	-	-	6
15.	Baranovič Stanislav		4	1	-	-	-	-	1
15.	Greguš Bohuslav		4	1	-	-	-	-	1
15.	Horváth Michal		3	1	-	-	-	-	1
15.	Juhásová Jolana		3	1	-	-	-	-	1
15.	Novotný Martin		3	1	-	-	-	-	1
15.	Semanová Eva		3	1	-	-	-	-	1

Kategória π

Por.	Meno	Škola	Ročník	PS	11	12	13	14	Spolu
1.	Boža Vladimír	G DT PP	1	7	5	0	5	3	20
2.	Takács Michal	G JGT BB	3	5	5	4	5	-	19
3.	Perešíni Peter	G JGT BB	3	0	4	4	5	-	13
4.	Kesely Michal	G JH BA	4	0	5	-	5	2	12
4.	Virgová Daniela	G AV LV	3	5	3	0	4	-	12
6.	Kacz Krisztián	G HS KO	3	5	3	-	-	-	8
7.	Kobza Vladimír	G JGT BB	1	5	0	-	0	-	5
8.	Kusora Ladislav	G HS KO	3	0	4	-	-	-	4
8.	Pôbišová Zuzana	G JGT BB	3	4	-	-	-	-	4
10.	Szűcs Gábor	G HS KO	3	0	3	-	-	-	3
11.	Vrbovská Mária	G JGT BB	1	1	-	-	-	-	1
11.	Zajacová Katarína	G Al KE	5	1	-	-	-	-	1

Súťažné úlohy – 3. séria

1. Nájdite geometrické miesto všetkých stredov kružníc, ktoré prechádzajú danými dvoma rôznymi bodmi A a B.

2. Riešte rovnicu (nezabudnite na diskusiu o počte riešení vzhľadom na hodnoty parametrov a, b):

$$\frac{x}{x+a}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+x}}=\frac{b}{a}.$$

3. Nech sú a a b prirodzené čísla, pre ktoré sú z podmienok
a) $a+1$ je deliteľné b,
b) $a=2b+5$,
c) $a+b$ je deliteľné tromi,
d) $a+7b$ je prvočíslo,
splnené práve tri. Nájdite všetky také dvojice a a b.

4. Dokážte, že pre ľubovoľné prirodzené n je $n^6+2n^5-n^2-2n$ deliteľné 120.

5. Nech a, b, c sú reálne čísla. Riešte sústavu rovníc (nezabudnite na diskusiu o počte riešení sústavy):

$$\frac{yz}{y+z}=a,\quad \frac{xz}{x+z}=b,\quad \frac{xy}{x+y}=c.$$

6. Nájdite súčet

$$S=\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}a_n},$$

ak viete, že čísla $a_1,a_2,\ldots,a_n$ sú po sebe idúce členy aritmetickej postupnosti.

7. Zostrojte úsečku dĺžky $x = \sqrt[4]{abcd}$, ak máte narysované úsečky s dĺžkami a, b, c, d.

8. Súčet dvoch koreňov polynómu $P(x) = 2x^3 - x^2 - 7x + \lambda$ sa rovná 1. Určte λ a korene tohto polynómu.

9. Dokážte, že pre všetky n prirodzené platí nerovnosť

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^4} + \frac{3}{3^9} + \frac{4}{3^{16}} + \cdots + \frac{n}{3^{n^2}} < \frac{1}{2}.$$

10. Dokážte, že ak

$$\frac{\sin^4 \alpha}{a} + \frac{\cos^4 \alpha}{b} = \frac{1}{a+b},$$

tak platí aj

$$\frac{\sin^8 \alpha}{a^3} + \frac{\cos^8 \alpha}{b^3} = \frac{1}{(a+b)^3}.$$

11. Nech $f(x) = x^3 - x + 1$. Nech $a_1 = m$, $a_{n+1} = f(a_n)$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots$. Potom pre každé celé $m \neq 0$ sú členy tejto postupnosti po dvoch nesúdeliteľné. Dokážte.

12. Nech má polynóm $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + 1$ s nezápornými koeficientmi n reálnych koreňov. Dokážte, že $P(2) \geq 3^n$.

13. Nájdite súčet

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{1 + k + k^2}.$$

14. Riešte rovnicu s neznámou x:

$$\frac{1}{\cos x \cos 2x} + \frac{1}{\cos 2x \cos 3x} + \cdots + \frac{1}{\cos 100 \cos 101 x} = 0.$$

Termín odoslania 3. série: do **2. 5. 2005**

Riešenia úloh zasielajte na adresu:

Metodicko-pedagogické centrum
MATMIX
Tomášikova 4
P. O. BOX 14
820 09 Bratislava 29

MINIMIX – príloha pre žiakov prvého stupňa ZŠ

Riešenia súťažných úloh 2. kola

E3: Opäť sme na cyklistickej trase z úlohy E2. Náš Maťko pomáha zabezpečiť občerstvenie na časovku cyklistov po tejto trase. Jeho úlohou je deň vopred rozviezť debničky s minerálkami a to takto: K stĺpiku na 2. kilometri 2 debničky, na 4. kilometri 1 debničku, na 9. kilometri 1 debničku a na 14. kilometri 1 debničku. Aby to zvládol, dostal od organizátorov malý elektrický minimobil, ktorý odvezie okrem neho iba jednu debničku. V noci mu všetky debničky aj minimobil zložia závozníci z auta na jednom mieste, ktoré si vopred určí, ale musí to byť pri niektorom kilometrovom stĺpiku. Na tom istom mieste Maťko nakoniec minimobil odstaví. Na ktorom kilometri si má Maťko nechať zložiť všetky debničky a minimobil, aby potom pri ich rozvážaní od tohto miesta najazdil čo najmenej kilometrov? Koľko kilometrov najazdí s plným minimobilom – teda iba pri jazde s debničkou vnútri?

Riešenie: (podľa Viktórie Hornyákovej, ZŠ s v. j. maď. Nové Zámky)
Ak Maťko nechá zložiť minimobil a debničky pri stĺpiku č. 3, najazdí s plným minimobilom 21 km, pri 4. stĺpiku je to iba 20 km, pri piatom 19 km, pri 6. stĺpiku 20 km a pri každom ďalšom stĺpiku je to už viac. Preto si Maťko celý náklad nechá zložiť pri piatom stĺpiku a s plným minimobilom najazdí 19 km. Samozrejme, Maťko spolu aj s prázdnym minimobilom najazdí dvakrát toľko, teda 38 km.

Poznámka redakcie: Ak by tých debničiek bolo viac, úloha by bola časovo náročná, preto vám ukážeme ľahký spôsob nájdenia správneho stĺpika. Debničky očíslujete 1, 2, 3, 4, ... a budete ich postupne priraďovať od prvého stĺpika smerom k druhému, tretiemu, atď. podľa požiadaviek úlohy. Potom hľadaný stĺpik bude ten, na ktorý pripadne prostredná debnička. V našom prípade sú to čísla stĺpikov 3, 3, 5, 10 a 15 a v prostriedku je tretia debnička ktorá pripadne na piaty stĺpik. V matematike má takýto stĺpik (jeho číslo) svoj názov – nazýva sa *medián*.

E4: Kristínka rada lyžuje a najradšej má zjazd. Otec ju vždy vyvezie od konca zjazdovky autom po ceste na kopec a ona si zíde po neveľmi prudkej zjazdovke rovno dole na lyžiach. Odtiaľ ju otec opäť zoberie autom hore. Cesta dole kopcom na lyžiach trvá Kristínke presne tak isto dlho ako otcovi po ceste autom. Auto ide trikrát rýchlejšie ako Kristínka na lyžiach a cesta zhora dole je o 4 kilometre dlhšia ako zjazdovka. Aká dlhá je zjazdovka?

Riešenie: Auto ide trikrát rýchlejšie ako Kristínka, preto za ten istý čas prejde trikrát dlhšiu dráhu, teda dráhu dlhú ako tri zjazdovky. Pretože je to o 4 km viac ako jedna zjazdovka, tie 4 km sú rovnako dlhé ako dve zjazdovky. Preto má zjazdovka dĺžku 2 km.

Súťažné úlohy 3. kola

E5: Do miestnosti, v ktorej boli počítače, prišli žiaci. Najskôr si sadli k počítačom po jednom, ale potom sa jednému počítač neušiel. Potom si sadli k počítačom po dvoch a jeden počítač ostal neobsadený. Koľko tam bolo detí a koľko počítačov? Úlohu riešte vyskúšaním rôznych úvah a možností a spolu s odpoveďou nám nakreslite obe situácie na malom náčrtku.

E6: Malá Viki rada vymýšľa. Sedela pred tohtoročným kalendárom (2005) a počítala dni od 1. januára až po 31. december. Zistila, že 31. 12. je 365. deň v roku, ale napríklad aj to, že 12. 4. je 102. deň v roku. Po dlhšom čase naraz vykríkla, že má jeden zaujímavý deň. Jeho dátum a poradové číslo sú až na bodky rovnaké. Koľko je takýchto dní v tomto roku a ktoré sú to dni?

Riešenia týchto dvoch úloh nám pošlite na adresu:

Metodicko-pedagogické centrum
MINIMIX
Tomášikova 4
P. O. BOX 14
820 09 Bratislava 29

najneskôr do **25. 4. 2005** (rozhoduje dátum poštovej pečiatky).

Výsledky súťaže MINIMIX – kategória E po 2. kole

Por.	Meno	Učiteľ	Základná škola	Tr.	1.	2.	3.	4.	Spolu
1	Alexandra Lochmanová	Alžbeta Pijáková	Petra Bezruča, Trenčín	4.A	10	10	10	10	40
	Alexandra Žilková	Katarína Kunová	Benkova, Nitra	3.V	10	10	10	10	40
	Andrea Martišová	Alžbeta Pijáková	Petra Bezruča, Trenčín	4.A	10	10	10	10	40
	Daniel Hajduk	Valéria Ferenčíková	Krosnianska 4, Košice	3.B	10	10	10	10	40
	Denis Rozložník	Valéria Ferenčíková	Krosnianska 4, Košice	3.A	10	10	10	10	40
	Dominik Benko	Valéria Ferenčíková	Krosnianska 4, Košice	3.B	10	10	10	10	40
	Filip Kevély	RNDr. Jozef Száraz	Veľký Kýr	4.A	10	10	10	10	40
	Frederik Gergely	RNDr. Jozef Száraz	Veľký Kýr	4.A	10	10	10	10	40
	Jakub Cimbala	Valéria Ferenčíková	Krosnianska 4, Košice	3.A	10	10	10	10	40
	Janka Ondrejčáková	Mária Sotáková	Benkova, Nitra	3.V	10	10	10	10	40
	Katarína Čambálová	E. Holečková	Veľký Ďur	4.A	10	10	10	10	40
	Lenka Pipišková	Monika Kovácsová	Drieňová 16, Bratislava	3.B	10	10	10	10	40
	Mária Lukáčová	Daniela Vajková	Krosnianska 4, Košice	2.A	10	10	10	10	40
	Mário Igaz	Majka Sotáková	Benkova, Nitra	3.T	10	10	10	10	40
	Martin Marek	Alžbeta Pijáková	Petra Bezruča, Trenčín	4.A	10	10	10	10	40
	Martin Vrabec	Valéria Ferenčíková	Krosnianska 4, Košice	3.A	10	10	10	10	40
	Michal Greššák	Valéria Ferenčíková	Krosnianska 4, Košice	3.A	10	10	10	10	40
	Miroslav Stankovič	Valéria Ferenčíková	Krosnianska 4, Košice	4.A	10	10	10	10	40

	Paťko Petrík	**Magdaléna Frtúsová**	**Veľký Ďur**	**3.A**	**10**	**10**	**10**	**10**	**40**
	Peter Farkaš	**Magdaléna Frtúsová**	**Veľký Ďur**	**3.A**	**10**	**10**	**10**	**10**	**40**
	Sophia Sommerová	**Katarína Kiačková**	**Benkova, Nitra**	**3.T**	**10**	**10**	**10**	**10**	**40**
	Viktória Hornyáková	**Peter Zachar**	**VJM G.Czuczora,Nové Zámky**	**4.A**	**10**	**10**	**10**	**10**	**40**
	Zuzana Straková	**Alžbeta Pijáková**	**Petra Bezruča, Trenčín**	**4.A**	**10**	**10**	**10**	**10**	**40**
	Zuzanka Králiková	**Jana Králiková**	**Bruselská, Košice**	**1.C**	**10**	**10**	**10**	**10**	**40**
25	Adam Múdry	Daniela Vajková	Krosnianska 4, Košice	2.B	10	10	9	10	39
	Adam Orhalmi	Daniela Vajková	Krosnianska 4, Košice	2.A	10	9	10	10	39
	Adrián Mlinka	E. Holečková	Veľký Ďur	4.A	10	9	10	10	39
	Alexandra Dupláková	Valéria Ferenčíková	Krosnianska 4, Košice	4.A	10	9	10	10	39
	Andrea Minárová	Magdaléna Frtúsová	Veľký Ďur	3.A	10	9	10	10	39
	Dušan Buček	Katarína Kunová	Benkova, Nitra	3.V	10	9	10	10	39
	Eugen Polin	Alžbeta Pijáková	Petra Bezruča, Trenčín	4.A	10	9	10	10	39
	Florián Hatala	Valéria Ferenčíková	Krosnianska 4, Košice	3.B	10	9	10	10	39
	Katka Krajčiová	Silvia Jaščičáková	Jenisejská 22, Košice	2.C	10	9	10	10	39
	Lenka Mareková	Valéria Ferenčíková	Krosnianska 4, Košice	4.A	10	9	10	10	39
	Mária Kosťovová	E. Holečková	Veľký Ďur	4.A	10	9	10	10	39
	Michaela Iblová	E. Holečková	Veľký Ďur	4.A	10	9	10	10	39
	Milan Gašparík	Mária Sotáková	Benkova, Nitra	3.V	10	9	10	10	39
	Oliver Koreň	Valéria Ferenčíková	Krosnianska 4, Košice	3.B	10	9	10	10	39
	René Cehlár	Daniela Vajková	Krosnianska 4, Košice	2.A	10	9	10	10	39
	Tomáš Petty	Daniela Vajková	Krosnianska 4, Košice	2.A	10	9	10	10	39
	Tomáš Tomaško	Valéria Ferenčíková	Krosnianska 4, Košice	4.A	10	9	10	10	39
	Viktor Štefan Markotán	Magdaléna Frtúsová	Veľký Ďur	3.A	10	10	10	9	39
43	Berenika Tužilová	Valéria Ferenčíková	Krosnianska 4, Košice	4.A	10	9	9	10	38
	Jakub Krajňak	Daniela Vajková	Krosnianska 4, Košice	2.B	10	9	10	9	38
	Martina Pivarníková	Daniela Vajková	Krosnianska 4, Košice	2.A	10	8	10	10	38
	Riško Černík	Daniela Vajková	Krosnianska 4, Košice	2.B	10	8	10	10	38
	Soňa Vargová	Daniela Vajková	Krosnianska 4, Košice	2.A	10	8	10	10	38
	Štefan Masič	Valéria Ferenčíková	Krosnianska 4, Košice	3.A	10	8	10	10	38
	Veronika Goceljaková	Magdaléna Frtúsová	Veľký Ďur	3.A	10	9	10	9	38
50	Deniska Stončeková	Daniela Vajková	Krosnianska 4, Košice	2.B	10	7	10	10	37
	Šimon Tabačko	Daniela Vajková	Krosnianska 4, Košice	2.A	10	9	8	10	37
52	Michal Benej	Valéria Ferenčíková	Krosnianska 4, Košice	3.B	10	6	10	10	36
	Patrik Turzák	Valéria Ferenčíková	Krosnianska 4, Košice	4.A	10	6	10	10	36
	Peter Vook	Valéria Ferenčíková	Krosnianska 4, Košice	3.B	10	6	10	10	36
55	Adam Kollár	Daniela Vajková	Krosnianska 4, Košice	2.A	10	10	5	10	35
	Martin Ponteš	Katarína Kunová	Benkova, Nitra	3.V	10	5	10	10	35
	Miroslav Novák	Valéria Ferenčíková	Krosnianska 4, Košice	3.B	10	5	10	10	35
	Samuel Alezár	Daniela Vajková	Krosnianska 4, Košice	2.A	10	5	10	10	35
59	Daniel Ondra	Valéria Ferenčíková	Krosnianska 4, Košice	4.A	10	5	9	10	34
	Marinka Kapasná	Daniela Vajková	Krosnianska 4, Košice	2.B	10	4	10	10	34
	Samuel Černík	Valéria Ferenčíková	Krosnianska 4, Košice	4.A	10	4	10	10	34
62	Petra Tocíková	Daniela Vajková	Krosnianska 4, Košice	2.B	10	3	10	10	33
	Roman Staňo	Valéria Ferenčíková	Krosnianska 4, Košice	3.B	10	4	9	10	33
64	Róbert Selvek	Daniela Vajková	Krosnianska 4, Košice	2.A	10	8	4	10	32
65	Cyril Pavlovič	Daniela Vajková	Krosnianska 4, Košice	2.B	10	10	10	1	31
	Laura Šalja	Valéria Ferenčíková	Krosnianska 4, Košice	4.A	10	6	5	10	31
67	Terezka Volavková	Daniela Vajková	Krosnianska 4, Košice	2.A	9	1	10	10	30
68	Jakub Gubáň	Mária Sotáková	Benkova, Nitra	3.V	10	9	10	0	29
	Jozef Rieger	Magdaléna Frtúsová	Veľký Ďur	3.A	1	9	10	9	29
	Mário Ivančík	Katarína Kunová	Benkova, Nitra	3.V	10	9	10	0	29
	Rastislav Zdechovan	Valéria Ferenčíková	Krosnianska 4, Košice	3.A	10	0	9	10	29
72	Filip Stripaj	Valéria Ferenčíková	Krosnianska 4, Košice	4.A	10	8	0	10	28

73	Dušan Zis	Valéria Ferenčíková	Krosnianska 4, Košice	3.A	10	7	10	0	27
74	Eva Marková	Daniela Vajková	Krosnianska 4, Košice	2.B	10	4	10	1	25
	Peter Micek	Valéria Ferenčíková	Krosnianska 4, Košice	4.A	10	5	0	10	25
76	Laura Fabianová	Daniela Vajková	Krosnianska 4, Košice	2.A	10	0	1	10	21
	Tara Stefányi	Daniela Vajková	Krosnianska 4, Košice	2.B	10	1	1	9	21
	Tomáš Daneshjo	Valéria Ferenčíková	Krosnianska 4, Košice	3.A	10	2	9	0	21
79	Adriana Pálfyová	L. Furmáneková	Benkova, Nitra	2.T	10	10			20
	Alena Miková	Katarína Kunová	Benkova, Nitra	3.U	10	10			20
	Alexandra Šabová	Ivana Urcikánová	Benkova, Nitra	2.V	10	10			20
	Branislav Viliam Hakala	Valéria Ferenčíková	Krosnianska 4, Košice	3.A	10	0	9	1	20
	Ivan Fiebig	L. Furmáneková	Benkova, Nitra	2.T	10	10			20
	Jakub Marták	Ivana Urcikánová	Benkova, Nitra	2.V	10	10			20
	Juraj Štefánik	Kiačková, Kunová	Benkova, Nitra	3.T	10	10			20
	Katka Marčeková	L. Furmáneková	Benkova, Nitra	2.T	10	10			20
	Matúš Greguš	Mária Sotáková	Benkova, Nitra	3.V	10	0	5	5	20
	Michal Bali	Mária Sotáková	Benkova, Nitra	3.V	10	10			20
	Roman Kluvanec	L. Furmáneková	Benkova, Nitra	2.T	10	10			20
	Tereza Svoreňová	Natália Kollárová	Nábrežie mládeže, Nitra	2.B	10	10			20
	Terezka Kunáková	Ivana Urcikánová	Benkova, Nitra	2.V	10	10			20
92	Daniel Domaniský	L. Furmáneková	Benkova, Nitra	2.T	10	9			19
	Dominik Krismán Dikarev	Valéria Ferenčíková	Krosnianska 4, Košice	3.A	10	9			19
	Dominika Furmáneková	L. Furmáneková	Benkova, Nitra	2.T	10	9			19
	Faustína M. Ciprusová	Valéria Ferenčíková	Krosnianska 4, Košice	3.A	10	0	9	0	19
	Jakub Domian	L. Furmáneková	Benkova, Nitra	2.T	10	9			19
	Katka Burdová	Valéria Ferenčíková	Krosnianska 4, Košice	3.A	10	9			19
	Michal Solčanský	L. Furmáneková	Benkova, Nitra	2.T	10	9			19
	Milan Ďuriančík	Mária Sotáková	Benkova, Nitra	3.V	10	9			19
	Radko Bernáth	L. Furmáneková	Benkova, Nitra	2.T	10	9			19
	Samko Hrstka	Kiačková, Sotáková	Benkova, Nitra	3.T	10	9			19
	Zuzana Černeková	Majka Sotáková	Benkova, Nitra	3.V	10	9			19
103	Jakub Hromada	Valéria Ferenčíková	Krosnianska 4, Košice	3.B			9	9	18
	Patrik Kolenčík	Mária Sotáková	Benkova, Nitra	3.V	10	8			18
105	Alana Korimová	Valéria Ferenčíková	Krosnianska 4, Košice	4.A			7	10	17
106	Ján Jursa	Valéria Ferenčíková	Krosnianska 4, Košice	4.A	10	6			16
	Sarah Shahpesandy	Valéria Ferenčíková	Krosnianska 4, Košice	3.B	10	6			16
	Terézia Marková	Daniela Vajková	Krosnianska 4, Košice	2.B	10	4	1	1	16
109	Katka Blišáková	Mária Sotáková	Benkova, Nitra	3.V	10	5			15
	Petra Eškutová	Valéria Ferenčíková	Krosnianska 4, Košice	3.B	10	5			15
111	Dávid Pásztor	Valéria Ferenčíková	Krosnianska 4, Košice	4.A	10	2	1	1	14
	Jakub Kupčík	Valéria Ferenčíková	Krosnianska 4, Košice	3.B	10	4			14
113	Jakub Lokša	Daniela Vajková	Krosnianska 4, Košice	2.A	10	0	2	1	13
	Monika Kunayová	Daniela Vajková	Krosnianska 4, Košice	2.B	10	0	1	2	13
	Niki Stripaj	Daniela Vajková	Krosnianska 4, Košice	2.B	10	0	2	1	13
116	Juraj Urban	Ivana Urcikánová	Benkova, Nitra	2.V	0	10			10
	Roman Kaufman	L. Furmáneková	Benkova, Nitra	2.T	2	8			10
	Xénia Baranová	Valéria Ferenčíková	Krosnianska 4, Košice	3.B	10	0			10
119	Janka Olvecká	L. Furmáneková	Benkova, Nitra	2.T	0	9			9
	Richard Križan	Katarína Kunová	Benkova, Nitra	3.V	0	9			9
121	Samuel Mikle	Ivana Urcikánová	Benkova, Nitra	2.V	0	8			8
122	Jozef Blaško	Ivana Urcikánová	Benkova, Nitra	2.V	0	7			7
123	Andrea Čierna	L. Furmáneková	Benkova, Nitra	2.T	0	5			5
	Barborka Báreková	L. Furmáneková	Benkova, Nitra	2.T	0	5			5

Hardy, G. H.: Obrana matematikova

PROSTOR, Praha 1999

Nekonvenčný, výstredný a radikálny *G. H. Hardy* (1877 – 1947), čistý matematik, napísal svoje vyznania ako tvorivý umelec. Hrdo a pokorne, s vnútornou hĺbkou a úplnou otvorenosťou. Ako intelektuálnu nadstavbu bezohľadnej priamočiarosti a súťaživého nadšenia. „*Človek niekedy musí hovoriť zložité veci, ale mal by ich hovoriť čo najjednoduchšie.*“

Kto cíti potrebu spoznať zmysel práce tvorivého matematika, určite neodolá, aby sa nepozrel do tejto knižky. Uvediem iba niekoľko citátov Hardyho argumentácie:

„*Mohutnosť matematickej pravdy je zrejmá a impozantná… Matematika je zdrojom radosti pre značné množstvo ľudí… Matematika, rovnako ako poézia alebo hudba, môže prebúdzať a udržiavať vznešené rozpoloženie ducha a prispievať tak k šťastiu matematikov aj iných ľudí.*“

„*Človek, ktorý by dokázal presvedčivo popísať matematickú skutočnosť, by vyriešil veľmi mnoho najobtiažnejších problémov metafyziky.*“

„*Verím, že matematická skutočnosť leží mimo nás, že našou úlohou je objavovať či pozorovať ju, a že vety, ktoré dokazujeme, a ktoré nafúknuto označujeme ako svoje výtvory, sú jednoducho našimi záznamami našich pozorovaní.*“

Hardyho úvahy o zmysluplnosti ľudskej tvorivosti všeobecne a matematickej zvlášť možno vyplývajú aj z presvedčenia, že „*čistá matematika je ako skala, na ktorej stojí celý idealizmus*“ a „*matematické myšlienky nezomierajú*“. Zaujímavo bude aj dnes pôsobiť jeho vyznanie: „*Keď svet šalie, môže matematik vo svojej vede nájsť nedostihnuteľne utišujúci prostriedok.*“

Súčasťou knižky je predhovor napísaný C. P. Snowom, v ktorom sa dozvieme podrobnejšie aj o okolnostiach spolupráce Hardyho s Ramanujanom i Littlewoodom. Tam zaznel aj názor, že *Obrana matematikova* je knihou znepokojujúceho smútku, testamentom tvorivého matematika. Hardy vedel, že niečo vytvoril, otázkou aj pre neho zostalo, akú to má cenu.

Nebude na škodu odhadovať reflexiu vlastnej práce po tejto duchovnej spovedi.

Dušan Jedinák

O b s a h

Redakčná pošta ..... 2. strana obálky
Dušan Jedinák: György Pólya – zaujatosť pre spôsob myslenia 1
Martin Hriňák: Polynómy II. 3
Milan Maxian: Ekonomická univerzita a matematika 7
Riešenia súťažných úloh 2. série 8
Výsledkové listiny po 2. sérii – kategória Z 18
Výsledkové listiny po 2. sérii – kategória C 18
Výsledkové listiny po 2. sérii – kategória B 19
Výsledkové listiny po 2. sérii – kategória A 19
Výsledkové listiny po 2. sérii – kategória π 20
Súťažné úlohy – 3. séria 20
MINIMIX – príloha pre žiakov prvého stupňa ZŠ 21
MINIMIX – Súťažné úlohy 3. kola 22
Výsledky súťaže MINIMIX – kategória E po 2. kole 22
Dušan Jedinák: Hardy, G. H.: Obrana matematikova ..... 3. strana obálky

****

Vyšlo pre vás:
MINIMATIK - malý lexikón matematiky pre základné školy - vyšlo v nakladateľstve EDITOR. Cena 72 Sk. Pre hromadné objednávky zo škôl ostáva 10 Sk za kus pre PK, resp. pre objednávateľa. Objednávky priamo v redakcii Matmixu.

****

MATMIX - matematický časopis pre žiakov základných a stredných škôl, vydáva **Metodicko-pedagogické centrum** v Bratislave na Tomášikovej ul. s **finančnou podporou Ministerstva školstva SR a OZ EDUKÁCIA** ako pomocnú literatúru pre PK matematiky a pre žiakov so záujmom o matematiku. Ceny pre víťazov sponzoruje **CASIO**
Šéfredaktor: RNDr. Ľudovít Hrdina, CSc.
Redakcia: PhDr. Katarína Dzúriková, Mgr. Martin Hriňák, PhDr. Soňa Hronská, Dušan Jedinák, RNDr. Viera Kolbaská, RNDr. Milan Maxian
Tlač a väzba: Eduard Rác
Adresa redakcie: Metodicko-pedagogické centrum, MATMIX, resp. pre 1. stupeň ZŠ MINIMIX, Tomášikova 4, P. O. BOX 14, 820 09 Bratislava 29
Telefóny: 02/ 48-20-94-32, 43-42-22-53, 43-42-57-90 **Fax:** 02/ 43-33-59-46
E-mail: hrdina@mctba.sk, pre korešpondenčnú súťaž okrem E: hrinak@mctba.sk
www stránka: www.matmix-web.sk